



ΧΑΡΟΚΟΠΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ, ΓΕΩΓΡΑΦΙΑΣ ΚΑΙ

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΒΙΩΣΙΜΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΣ»

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: ΔΙΟΙΚΗΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ

ΜΟΝΑΔΩΝ

«Δημιουργικότητα και Μαθηματική Δημιουργικότητα. Καινοτόμες εφαρμογές ανάπτυξης της Μαθηματικής Δημιουργικότητας στο σχολείο (μαθητές Β Γυμνασίου)»

Διπλωματική Εργασία

Κωνσταντίνος Γκρίτζαλης

Αθήνα, 2022



HAROKOPIO UNIVERSITY

SCHOOL OF ENVIRONMENT, GEOGRAPHY AND APPLIED
ECONOMICS

DEPARTMENT OF ECONOMICS AND SUSTAINABLE
DEVELOPMENT

POSTGRADUATE PROGRAMME

«EDUCATION AND CULTURE»

COURSE: ADMINISTRATION AND MANAGEMENT OF
EDUCATIONAL UNITS

**«Creativity and Mathematical Creativity. Innovative applications for
the development of Mathematical Creativity at school (B High School
students)»**

Master Thesis

Konstantinos Gkritzalis

Athens, 2022



ΧΑΡΟΚΟΠΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

**ΣΧΟΛΗ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ, ΓΕΩΓΡΑΦΙΑΣ ΚΑΙ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ**

ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΒΙΩΣΙΜΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΣ»

**ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: ΔΙΟΙΚΗΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ
ΜΟΝΑΔΩΝ**

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή

Επιβλέπων

Δημήτριος Ζμπάινος

Αναπληρωτής καθηγητής, Τμήμα Οικονομίας και Βιώσιμης Ανάπτυξης,

Χαροκόπειο Πανεπιστήμιο

Ιωάννης Κωστάκης

Επίκουρος καθηγητής, Τμήμα Οικονομίας και Βιώσιμης Ανάπτυξης,

Χαροκόπειο Πανεπιστήμιο

Δρ Κωνσταντίνος Αποστολόπουλος

Διδάσκων στο Τμήμα Οικονομίας και Βιώσιμης Ανάπτυξης,

Χαροκόπειο Πανεπιστήμιο

Ο Κωνσταντίνος Γκρίτζαλης

δηλώνω υπεύθυνα ότι:

- 1) Είμαι ο κάτοχος των πνευματικών δικαιωμάτων της πρωτότυπης αυτής εργασίας και ,από όσο γνωρίζω ,η εργασία μου δε συκοφαντεί πρόσωπα, ούτε προσβάλλει τα πνευματικά δικαιώματα τρίτων.
- 2) Αποδέχομαι ότι η ΒΚΠ μπορεί, χωρίς να αλλάξει το περιεχόμενο της εργασίας μου, να τη διαθέσει σε ηλεκτρονική μορφή μέσα από τη ψηφιακή Βιβλιοθήκη της, να την αντιγράψει σε οποιοδήποτε μέσο ή/και σε οποιοδήποτε μορφότυπο , καθώς και να κρατά περισσότερα από ένα αντίγραφα για λόγους συντήρησης και ασφάλειας.
- 3) Όπου υφίστανται δικαιώματα άλλων δημιουργών έχουν διασφαλιστεί όλες οι αναγκαίες άδειες χρήσης ενώ το αντίστοιχο υλικό είναι ευδιάκριτο στην υποβληθείσα εργασία.

«Η μάθηση δεν είναι προϊόν διδασκαλίας του εκπαιδευτικού.

Η μάθηση είναι προϊόν της δραστηριότητας των παιδιών»

Τζον Χολτ, 1923- 1985

(Αμερικανός συγγραφέας και παιδαγωγός)

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους όσους συνέβαλαν στην ολοκλήρωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Πρώτο απ' όλους θέλω να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου, που με εμπιστεύτηκε και συνεργάστηκε μαζί μου για την πραγματοποίηση αυτής της εργασίας, προσφέροντάς μου πολύτιμη βοήθεια, τις γνώσεις και τις άμεσες ανατροφοδοτήσεις του. Τέλος, ευχαριστώ την οικογένειά μου που με υπομονή και κουράγιο προσέφεραν την απαραίτητη ηθική συμπαράσταση για την ολοκλήρωση αυτού του κύκλου σπουδών μου.

Περιεχόμενα

Περίληψη	3
Abstract	4
ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ.....	5
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ: ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑ.....	5
1.1 Εισαγωγή	5
1.2 ΕΝΝΟΙΑ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑΣ	6
1.3 ΑΡΧΙΚΕΣ ΘΕΩΡΙΕΣ ΓΙΑ ΤΗ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑ.....	7
1.4 ΣΥΓΧΡΟΝΕΣ ΘΕΩΡΙΕΣ ΓΙΑ ΤΗ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΣΥΝΘΕΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ	8
1.4.1 Δημιουργικό άτομο	9
1.4.2 Δημιουργική διεργασία.....	11
1.4.3 Δημιουργική πίεση	11
1.4.4 Δημιουργικό έργο.....	12
1.5 ΓΝΩΣΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΗΣ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑΣ	13
1.5.1 Γνωστικές λειτουργίες, γνώση και νοημοσύνη	13
1.5.2 Γνωστικά μοντέλα	15
1.5.3 Δημιουργικές γνωστικές διεργασίες	16
1.6 ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑ: ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗ Ή ΕΞΕΙΔΙΚΕΥΜΕΝΗ ΙΚΑΝΟΤΗΤΑ;.....	18
1.6.1 Το μοντέλο των Beghetto και Kaufman ή μοντέλο των τεσσάρων C.....	18
1.7 ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΗΣ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑΣ	20
1.7.1 Εισαγωγή	20
1.7.2 Τρόποι αξιολόγησης της δημιουργικότητας στο εκπαιδευτικό πλαίσιο	20
1.7.2.1 Τεστ της δομής της νόησης του Guilford	21
1.7.2.2 Τεστ Απομακρυσμένων Συνθέσεων του Mednick	21
1.7.2.3 Τεστ Δημιουργικής Σκέψης του Torrance	21
1.7.2.4 Τεχνική της συναινετικής αξιολόγησης.....	22
1.8 ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΟΥ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ	23
1.8.1 Προσδιορισμός του δημιουργικού δυναμικού	23
1.8.2 Μέτρηση του δημιουργικού δυναμικού	24
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑ.....	26
2.1 Ο προσδιορισμός της φύσης των μαθηματικών.....	26
2.2 Μαθηματική Ικανότητα.....	27
2.3 Μαθηματική Δημιουργικότητα.....	28
2.3.1 Η έννοια της Μαθηματικής Δημιουργικότητας	28

2.3.2	Ιστορική Αναδρομή	29
2.4	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ	31
2.4.1	Ορισμός της Μαθηματικής Δημιουργικότητας.....	32
2.4.2	Ανάπτυξη της Μαθηματικής Δημιουργικότητας στο Σχολείο	34
2.4.2.1	Μαθηματικά προβλήματα	34
2.4.2.2	Προβλήματα Ανοιχτού τύπου	35
2.4.2.3	Διατύπωση προβλημάτων	35
2.4.2.4	Στάδια ανάπτυξης της Μαθηματικής Δημιουργικότητας μέσω της επίλυσης προβλημάτων του Erryck	36
2.4.2.5	Μοντέλο Δημιουργικής Πολυμάθειας των Beghetto&Kaufman	37
2.4.3	Μαθηματική Δημιουργικότητα και εκπαιδευτική πραγματικότητα	38
2.5	Μαθηματική ικανότητα και Μαθηματική Δημιουργικότητα	39
2.5.1	Μαθηματική Ικανότητα και Μαθηματική Επίδοση	39
2.5.2	Μαθηματική Ικανότητα και Μαθηματική Δημιουργικότητα	41
2.6	Αξιολόγηση της Μαθηματικής Δημιουργικότητας	42
2.6.1	Εισαγωγή	42
2.6.2	Πλαίσιο αξιολόγησης της Μαθηματικής Δημιουργικότητας του Haylock	42
2.6.3	Προβλήματα πολλαπλών λύσεων της Leikin (Multiple Solution Tasks)	43
2.6.4	Δραστηριότητες τανγκραμ 5 σταδίων του Van Hiele.....	57
2.6.5	Αξιολόγηση των Kim, Cho και Ahn	64
	ΠΡΑΚΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ	65
	Καινοτόμες εφαρμογές ανάπτυξης Μαθηματικής Δημιουργικότητας στο σχολείο	65
	Προτεινόμενες δραστηριότητες.....	69
	Δραστηριότητα 1	71
	Δραστηριότητα 2	72
	Δραστηριότητα 3	73
	Δραστηριότητα 4	74
	Δραστηριότητα 5	75
	Δραστηριότητα 6	76
	Δραστηριότητα 7	78
	Δραστηριότητα 8	79
	Δραστηριότητα 9	80
	Δραστηριότητα 10	81
	Συμπεράσματα	82
	Βιβλιογραφία	84

Περίληψη

Ο σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να παρουσιαστεί ενδελεχώς η ικανότητα που κατέχουν όλα τα άτομα και τα καθιστά ικανά να αντιμετωπίζουν και να επιλύουν τα προβλήματα της καθημερινότητας, η ικανότητα εκείνη που συμβάλλει τα μέγιστα στην ανθρώπινη ανάπτυξη τόσο στα πλαίσια της ατομικής όσο και της κοινωνικής προόδου: η ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑ.

Στο θεωρητικό μέρος της εργασίας αρχικά γίνεται αναφορά στην έννοια, τις θεωρίες και την αξιολόγηση της Δημιουργικότητας. Στη συνέχεια η εργασία εστιάζει στην έννοια, τους τρόπους καλλιέργειας και την αξιολόγηση της Μαθηματικής Δημιουργικότητας.

Στο πρακτικό μέρος της εργασίας δίνονται ενδεικτικά κάποιες καινοτόμες δραστηριότητες για το Μέρος Β των Μαθηματικών της Β Γυμνασίου (1^ο κεφάλαιο: Εμβαδά επίπεδων σχημάτων – Πυθαγόρειο Θεώρημα και 3^ο κεφάλαιο: Μέτρηση κύκλου). Καινοτόμες εφαρμογές μέσα από τις οποίες σκοπός δεν είναι απλά «το δημιουργικό μάθημα» αλλά «η καλλιέργεια της μαθηματικής δημιουργικότητας των παιδιών». Οι μαθητές μέσα από τα δεδομένα που τους δίνονται επινοούν εικασίες- ερωτήματα, ψάχνουν διάφορες λύσεις και προσεγγίσεις, εκφράζουν ελεύθερα πολλές ιδέες (ευχέρεια), προσπαθούν να βρουν νέες στρατηγικές για να αντιμετωπίζουν το πρόβλημα (ευελιξία) και επινοούν πολλές απρόσμενες και έξυπνες ιδέες (πρωτοτυπία). Οι δραστηριότητες αυτές συμβάλλουν τα μέγιστα όχι μόνο στην πυροδότηση του ενδιαφέροντός τους και στην ενεργό συμμετοχή τους αλλά και στην αξιολόγηση των τριών ιδιοτήτων της δημιουργικότητας που προτάθηκαν από τον Torrance.

Λέξεις κλειδιά: δημιουργικότητα, αξιολόγηση μαθηματικής δημιουργικότητας, μαθηματική ικανότητα.

Abstract

The purpose of this paper is to thoroughly present the ability that all individuals possess and enable them to face and solve everyday problems, the ability that contributes the most to human development in the context of both individual and social progress: CREATIVITY.

In the theoretical part of the work, reference is initially made to the concept, theories and evaluation of Creativity. The paper then focuses on the concept, cultivation methods and evaluation of Mathematical Creativity.

In the practical part of the work are given some innovative activities for Part B of Mathematics of B High School (1st chapter: areas of flat shapes - Pythagorean Theorem and 3rd chapter: circle measurement). Innovative applications through which the purpose is not simply "to create a creative lesson" but "to cultivate children's mathematical creativity». Through the data given to them, students invent conjectures-questions, look for different solutions and approaches, freely express many ideas (ease), try to find new strategies to deal with the problem (flexibility) and invent many unexpected and clever ideas (originality). These activities contribute greatly not only to sparking their interest and active participation but also to the evaluation of the three qualities of creativity proposed by Torrance.

Keywords: creativity, assessment of mathematical creativity, mathematical ability

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ: ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑ

1.1 Εισαγωγή

Ένας από τους σημαντικότερους παράγοντες της ανθρώπινης ανάπτυξης (τόσο σε ατομικό όσο και σε κοινωνικό επίπεδο) είναι η δημιουργικότητα (Beghetto & Kaufman, 2007; Hennessey & Amabile, 2010; Sternberg, 2006, 2012; Sternberg & Lubart, 1999).

Η κατανόηση της δημιουργικότητας και της δημιουργικής διαδικασίας είναι «η εκ των ων ουκ άνευ» προϋπόθεση για να κατανοηθούν τα επιτεύγματα των επιστημών (θετικών-κοινωνικών-ανθρωπιστικών), η τεχνολογική ανάπτυξη, οι τέχνες και γενικότερα η ανθρωπότητα (Hennessey & Amabile, 2010; Runco, 2004).

Οι τομείς στους οποίους μπορούμε να κατηγοριοποιήσουμε τη δημιουργικότητα είναι:

- 1) ο επιστημονικός (όπου η δημιουργικότητα χαρακτηρίζεται από ένα μη δομημένο περιβάλλον και δεν προσδιορίζεται από συγκεκριμένες συνθήκες -αφαιρετική-επιστημονική δημιουργικότητα)
- 2) ο μηχανικός (όπου η δημιουργικότητα χαρακτηρίζεται από ένα δομημένο περιβάλλον και προσδιορίζεται από συγκεκριμένες συνθήκες- συγκεκριμένη- μηχανική δημιουργικότητα)
- 3) ο καλλιτεχνικός (όπου η δημιουργικότητα παράγει ένα καινοτόμο έργο τέχνης -εμπειρική- καλλιτεχνική δημιουργικότητα) (Wang, 2008).

Μερικοί έχουν συνδέσει τη δημιουργικότητα μόνο με το καινοτομικό και αξιόλογο έργο επιστημόνων- μηχανικών- καλλιτεχνών. Ωστόσο, δημιουργικότητα είναι μια ικανότητα που κατέχουν όλα τα άτομα και μέσα από αυτήν γίνονται ικανά να αντιμετωπίζουν και να επιλύουν τα προβλήματα της σκληρής καθημερινότητας, καθώς επίσης αποτελεί τον κινητήριό μοχλό της εξέλιξης των πολιτισμών παγκοσμίως. (Hennessey & Amabile, 2010; Runco, 2004).

Είναι αναμφισβήτητο, άλλωστε, ότι η εξέλιξη σε όλους τους τομείς του ανθρώπινου πολιτισμού είναι ραγδαία και ότι τόσο τα άτομα όσο και οι πολιτισμοί θα πρέπει να προσαρμόζονται σε αυτές τις εξελίξεις, αφού η καθημερινότητά τους γίνεται όλο και πιο σύνθετη (Runco, 2004).

Γνωρίζουμε όλοι ότι η βιολογική εξέλιξη των ανθρώπων επιτυγχάνεται μέσα από αργές και σταθερές αλλαγές. Ωστόσο, η πολιτισμική εξέλιξη χαρακτηρίζεται από γρήγορες, καινοτόμες και πολλές φορές ρηξικέλευθες αλλαγές που είναι εμφανείς σε σύντομο χρονικό διάστημα. Συνεπώς, το άτομο οφείλει να προσαρμόζεται στις απαιτήσεις της συνεχούς πολιτισμικής εξέλιξης, να εξελίσσεται και να ωφελείται τα μέγιστα από τις ευκαιρίες που του προσφέρει η πολιτισμική εξέλιξη. Η κατανόηση της δημιουργικότητας και των διεργασιών της είναι επομένως αναγκαία και η ψυχολογική έρευνα έχει επικεντρωθεί στη μελέτη της δημιουργικότητας, αυτής της ξεχωριστής και μοναδικής ανθρώπινης ικανότητας που πυροδοτεί νέες ιδέες και συντελεί τα μέγιστα στην πρόοδο και την εξέλιξη σε όλους τους τομείς της ανθρώπινης δραστηριότητας (Claxton, Panells&Rhoads, 2005; Hennessey&Amalide, 2010; Simonton, 2000).

1.2 ΕΝΝΟΙΑ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑΣ

Από τα παλιά χρόνια οι άνθρωποι είχαν προσεγγίσει την έννοια της δημιουργικότητας και την είχαν συνδέσει με το υπερφυσικό, τη θεία χάρη, τη μεγαλοφυΐα και το μοναδικό χάρισμα (Weisberg, 2006).

Ωστόσο, όταν η επιστήμη της Ψυχολογίας έκανε την εμφάνισή της τον 19^ο αιώνα μ.Χ, η έννοια αυτής της σπουδαίας ικανότητας του ανθρώπου προσεγγίστηκε από διάφορες σχολές της ψυχολογικής σκέψης (Sternberg, 2006, 2012).

Έτσι:

- την ψυχαναλυτική θεωρία που συσχέτισε τη δημιουργικότητα με το ασυνείδητο και τις ασυνείδητες διεργασίες
- τη μορφολογική ψυχολογία που συσχέτισε τη δημιουργικότητα με τη λύση προβλημάτων, τη δημιουργική σκέψη, τον προαγωγικό συλλογισμό

- την ανθρωποκεντρική προσέγγιση που θεώρησε ότι η δημιουργικότητα είναι ένα από τα ανώτερα χαρακτηριστικά του ανθρώπου που του παρέχει τη δυνατότητα της αυτοπραγμάτωσης
- την εξελικτική προσέγγιση που υποστήριξε ότι η δημιουργικότητα προήλθε από τις ίδιες εξελικτικές διεργασίες που καθόρισαν τα χαρακτηριστικά του ανθρώπινου είδους.
- την ψυχομετρική προσέγγιση που μέτρησε τη δημιουργικότητα μέσα από την αποκλίνουσα σκέψη, τις γνωστικές διεργασίες, την προσωπικότητα και τις συμπεριφορές που σχετίζονται με τη δημιουργικότητα.
- τη γνωστική προσέγγιση που μελετά τόσο τη δημιουργική σκέψη όσο και τους συγκεκριμένους τομείς σκέψης (Plucker&Renzulli, 1999; Runco, 2004; Simonton, 2000; Weisberg, 2006).

1.3 ΑΡΧΙΚΕΣ ΘΕΩΡΙΕΣ ΓΙΑ ΤΗ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑ

Από τα μέσα του 20^{ου} αιώνα ξεκίνησε η συστηματική έρευνα της δημιουργικότητας μέσα από τις ψυχολογικές μελέτες των Guilford και Torrance (Simonton, 2000; Sternberg, 2006, 2012).

Συγκεκριμένα ο Guilford (1956) όρισε τη δημιουργικότητα ως ένα συνδυασμό ικανοτήτων που είναι συνήθεις σε κάθε άτομο , αλλά εκφράζονται και αναπτύσσονται σε διαφορετικά επίπεδα στον καθένα. Υποστήριξε, λοιπόν, ότι κάθε άτομο είναι «δυνάμει» δημιουργικό και ότι οι διαφορές ανάμεσα στα άτομα είναι ποιοτικές. Πρότεινε, επίσης, ως παράγοντες της δημιουργικότητας και της αποκλίνουσας σκέψης τα εξής βασικά χαρακτηριστικά:

- την ευελιξία
- την ευχέρεια
- την πρωτοτυπία (Claxton, Panells& Rhoads, 2005).

Ο Torrance (Torrance, 1968, 1965, 1993) προσδιόρισε τη δημιουργικότητα ως μία γνωστική διεργασία που συμπεριλαμβάνει την ανίχνευση της προβληματικής κατάστασης, το σχηματισμό των υποθέσεων και εικασιών σε σχέση με την προβληματική κατάσταση, την αξιολόγηση και εκτίμησή της, τη δοκιμή τους και ,πιθανότατα ,την αναθεώρηση και την επαναδοκιμή τους και τέλος την ανακοίνωση των αποτελεσμάτων.

Επιπρόσθετα, ο Torrance υποστήριξε ότι τα βασικά στοιχεία της προσωπικότητας που είναι απαραίτητα για να αναπτυχθεί η δημιουργικότητα σε ένα άτομο είναι:

- η επιμονή
- η ανεξαρτησία
- η περιέργεια
- η προθυμία να πάρει κάποιος ρίσκο
- η έλλειψη συμμόρφωσης και συμβιβασμού
- η έλλειψη φόβου αποτυχίας
- η ευαισθησία

Ο Torrance τόνισε ότι η ανάπτυξη ή η μη ανάπτυξη αυτών των χαρακτηριστικών εξαρτάται από το κοινωνικό, το οικογενειακό και το εκπαιδευτικό περιβάλλον.

Κατά συνέπεια, σύμφωνα με τον Torrance, ένα υποστηρικτικό περιβάλλον, ένα περιβάλλον που ενθαρρύνει την ανάπτυξη των προαναφερθέντων στοιχείων συντελεί τα μέγιστα στην ανάπτυξη της δημιουργικότητας.

Οι θεωρίες που ακολούθησαν και τα συνθετικά μοντέλα της δημιουργικότητας επηρεάστηκαν πολύ από τη συγκεκριμένη άποψη του Torrance (1993).

Η συνεισφορά του Torrance στο πεδίο της δημιουργικότητας είναι τεράστια και αξίζει να σημειωθεί ότι τα ψυχομετρικά τεστ του Torrance για την αξιολόγηση της δημιουργικότητας χρησιμοποιούνται ευρέως σε διάφορα πλαίσια (Kim, 2006).

1.4 ΣΥΓΧΡΟΝΕΣ ΘΕΩΡΙΕΣ ΓΙΑ ΤΗ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΣΥΝΘΕΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

Είναι πασιφανές ότι πολυάριθμοι αλληλοσχετιζόμενοι παράγοντες εμπλέκονται στα πολλαπλά επίπεδα της δημιουργικότητας και των δημιουργικών διεργασιών. Επομένως, η δημιουργικότητα δεν μπορεί να απομονωθεί και να ποσοτικοποιηθεί (Hennessey&Amabile, 2010).

Τα κυριότερα επίπεδα στα οποία η δημιουργικότητα ενεργεί από το πιο μικροσκοπικό στο πιο ευρύ επίπεδο είναι:

- νευροβιολογικό επίπεδο
- συναισθηματικό επίπεδο
- γνωστικό επίπεδο
- επίπεδο ατομικών χαρακτηριστικών και της προσωπικότητας
- επίπεδο του κοινωνικού περιβάλλοντος
- επίπεδο που αφορά ολόκληρες κουλτούρες

Συνεπώς, η ανάπτυξη της δημιουργικότητας ορίζεται από πολλούς και ποικίλους παράγοντες που αλληλεπιδρούν. Αυτοί οι παράγοντες είναι ατομικοί και περιβαλλοντικοί (Claxtonetal., 2005; Hennessey&Amabile, 2010; Simonton, 2000; Sternberg, 2006, 2012).

Οι προαναφερθέντες παράγοντες και τα επίπεδα αλληλεπιδρούν και συμβάλλουν τα μέγιστα στην ανάπτυξη και έκφραση της δημιουργικότητας.

Ένα συνθετικό μοντέλο της δημιουργικότητας που προέκυψε από τη μελέτη αυτής της επίδρασης είναι το μοντέλο των Four P. Αυτό το μοντέλο συντίθεται από τέσσερις παράγοντες που καθορίζουν τη δημιουργικότητα και είναι:

- το δημιουργικό άτομο
- η δημιουργική διαδικασία
- το δημιουργικό προϊόν
- η δημιουργική πίεση (Kaufmanetal., 2008 ; Rhodes, 1961)

1.4.1 Δημιουργικό άτομο

Οι έρευνες του παράγοντα «δημιουργικό άτομο» επικεντρώνονται σε διάφορα ατομικά χαρακτηριστικά όπως: τη νοημοσύνη, το γνωστικό υπόβαθρο, την αυτοαντίληψη του ατόμου ως δημιουργικού, την υψηλή εκτίμηση της αισθητικής, την ποιότητα των εμπειριών, τα διευρυμένα ενδιαφέροντα, την υψηλή ενεργητικότητα, την ανεξαρτησία, την αυτονομία, τη διαίσθηση, την αυτοπεποίθηση και την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων (Barron&Harrington, 1981; Runco,2004).

Δύο είναι τα συνθετικά μοντέλα που δίνουν έμφαση στον παράγοντα ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟ ΑΤΟΜΟ. Αυτά είναι:

1. Το «Πολυδιάστατο Μοντέλο της Δημιουργικότητας» που προτάθηκε από την Amabile και προσέγγισε τη δημιουργικότητα ως μία πολυπαραγοντική ικανότητα που καθορίζεται τόσο από τις γενικές όσο και από τις ειδικές δημιουργικές δεξιότητες του ατόμου, από την προσωπικότητα, τα κίνητρα και από τις γνωστικές του ικανότητες δίνοντας έμφαση στην επίδραση των παραγόντων του κοινωνικού περιβάλλοντος.

Σύμφωνα με το μοντέλο αυτό υπάρχουν πέντε διαδοχικά στάδια της δημιουργικής διεργασίας, αφού ληφθούν υπόψη οι κοινωνικές συνθήκες που αυτά πραγματοποιούνται. Τα στάδια αυτά είναι:

- ο προσδιορισμός του προβλήματος
- η προετοιμασία
- η γενίκευση της λύσης
- η επικύρωση της απάντησης
- η αξιολόγηση των αποτελεσμάτων σε ένα συγκεκριμένο κοινωνικό πλαίσιο (Amabile&Gryskiewicz, 1989).

2. Το μοντέλο της «Επενδυτικής Θεωρίας της Δημιουργικότητας» που προτάθηκε από τον Stenberg και τον Lubart. Σύμφωνα με αυτό το μοντέλο το άτομο έχει τη δυνατότητα ανάπτυξης καινοτόμων δημιουργικών ιδεών υπερνικώντας τα ενδεχόμενα εμπόδια. Συγκεκριμένα ο Stenberg διέκρινε τους εξής παράγοντες που έχουν άμεση σχέση με τη δημιουργική διεργασία και καθορίζουν την έκφραση της δημιουργικότητας.

Αυτά είναι:

- οι διανοητικές ικανότητες (συνθετική ικανότητα, αναλυτική ικανότητα, πρακτική ικανότητα)
- η γνώση ενός πεδίου που επιτρέπει στο άτομο να βρίσκει νέες ιδέες
- ο τρόπος σκέψης που συμβάλλει τα μέγιστα στη λήψη αποφάσεων
- τα χαρακτηριστικά της προσωπικότητας που επιτρέπουν την ανάπτυξη της δημιουργικής σκέψης
- τα εσωτερικευμένα κίνητρα
- το υποστηρικτικό περιβάλλον το οποίο θα προσφέρει την κατάλληλη ανατροφοδότηση και την ενθάρρυνση, ώστε να αναπτυχθούν δημιουργικές ιδέες (Stenberg&Lubart, 1999).

1.4.2 Δημιουργική διεργασία

Οι έρευνες που αφορούν στη δημιουργική διαδικασία δίνουν έμφαση στην εμπειρία των δημιουργικών διεργασιών (Csikszentmihalyi, 1999; Kaufmanetal., 2008). Έτσι λοιπόν επικεντρώνονται όχι στα ατομικά χαρακτηριστικά αλλά στα αποτελέσματα της συμπεριφοράς των δημιουργικών ατόμων.

Ένα χαρακτηριστικό μοντέλο που δίνει έμφαση στις δημιουργικές διεργασίες είναι το συστημικό μοντέλο του Csikszentmihalyi στο οποίο η δημιουργικότητα ορίζεται ως μία διαδικασία που εξαρτάται άμεσα από την αλληλεπίδραση του ατόμου, του πολιτισμού-συμβολικού τομέα και του κοινωνικού πεδίου. Έτσι λοιπόν το δημιουργικό άτομο επιδρά άμεσα στις υπάρχουσες γνώσεις και στους υπάρχοντες κανόνες και παράγει δημιουργικό έργο που είναι κοινωνικά αποδεκτό.

1.4.3 Δημιουργική πίεση

Με τον όρο «δημιουργική πίεση» εννοούμε την πίεση που ασκείται από το περιβάλλον στο δημιουργικό άτομο και στη δημιουργική διαδικασία.

Αυτή η πίεση που δέχεται το δημιουργικό άτομο είναι μία συνισταμένη πολλών και ποικίλων παραγόντων όπως της κοινωνίας, της οικογένειας και της κουλτούρας. Η πίεση αυτή, επίσης, μπορεί να ενισχύσει ή να αποτρέψει ή και να μην επηρεάσει καθόλου τη δημιουργική σκέψη (Amabile&Gryskiewicz, 1989; Runco, 2004).

Έχουν γίνει πολλές έρευνες που αφορούν τόσο στο εργασιακό όσο και στο οικογενειακό περιβάλλον. Συγκεκριμένα οι παράγοντες που σχετίζονται με το εργασιακό περιβάλλον και επηρεάζουν θετικά τη δημιουργικότητα του ατόμου είναι: η επαρκής ελευθερία, οι προκλήσεις στον εργασιακό χώρο, ο ανταγωνισμός, η αναγνώριση και η επικοινωνία. Αντίθετα, οι παράγοντες του εργασιακού περιβάλλοντος που επηρεάζουν αρνητικά το άτομο είναι: η πίεση, ο συνεχής έλεγχος, η απελευθερία.

Από την άλλη πλευρά στο οικογενειακό περιβάλλον η συμπεριφορά των γονέων και το υποστηρικτικό- ενθαρρυντικό περιβάλλον της οικογένειας συμβάλλει τα μέγιστα στην ανάπτυξη της δημιουργικότητας (Sternberg, 2006, 2012; Torrance, 1965). Αυτό όμως δε σημαίνει ότι πολλές φορές και ένα αυστηρό, αποστερημένο και μη υποστηρικτικό περιβάλλον

δε μπορεί να λειτουργήσει ενισχυτικά για τη δημιουργική σκέψη (Koestner, Walker&Fichman, 1999). Τα υποκειμενικά χαρακτηριστικά και η εμπειρία του ατόμου σε συνδυασμό με το εργασιακό και οικογενειακό περιβάλλον μπορούν να επιδράσουν προτρεπτικά ή αποτρεπτικά στη δημιουργική σκέψη.

1.4.4 Δημιουργικό έργο

Ο τέταρτος παράγοντας που καθορίζει τη δημιουργικότητα είναι το δημιουργικό έργο ή το δημιουργικό προϊόν, δηλαδή το αποτέλεσμα της δημιουργικής διαδικασίας (καλλιτεχνικό ή λογοτεχνικό έργο, επιστημονική ανακάλυψη, λύση σε πρόβλημα της καθημερινότητας ή της επιστήμης).

Το Propulsion Model το εισήγαγαν οι Sternberg, Kaufman και Pretz το 2002 και είναι το θεωρητικό μοντέλο που επικεντρώνεται στο δημιουργικό προϊόν. Σύμφωνα με το μοντέλο αυτό η προϋπάρχουσα γνώση και η εμπειρία παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στο δημιουργικό έργο, η συμβολή του προκαλεί σημαντικό αντίκτυπο, επιφέρει αλλαγές και συμβάλλει τα μέγιστα στην εξέλιξη του πλαισίου που παράγεται (Sternberg et al., 2002).

Δύο είναι τα βασικά χαρακτηριστικά που προσδιορίζουν το δημιουργικό έργο. Αυτά είναι: η πρωτοτυπία (καινοτομία) και η αποτελεσματικότητα (Kaufman et al., 2008; Lubart&Guignard, 2004; Runco&Jaeger, 2012).

Η πρωτοτυπία και η αποτελεσματικότητα θα πρέπει να έχουν ταυτόχρονη ισχύ, για να μπορεί το έργο να χαρακτηριστεί δημιουργικό (Beghetto&Kaufman, 2007; Kaufman et al., 2008; Runco&Jaeger, 2012).

1.5 ΓΝΩΣΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΗΣ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑΣ

Ένας πολύ σημαντικός παράγοντας της ανθρώπινης γνωστικής ικανότητας είναι η δημιουργικότητα.

Οι θεωρίες της γνωστικής προσέγγισης της δημιουργικότητας αφορούν:

- i. στις βασικές γνωστικές διεργασίες (π.χ μνήμη, προσοχή, αντίληψη)
- ii. στις διανοητικές ικανότητες (π.χ αποκλίνουσα και συγκλίνουσα σκέψη)
- iii. στις συσχετίσεις τους με τις ατομικές διαφορές (π.χ νοημοσύνη, γλώσσα) (Runco, 2004, 2007).

1.5.1 Γνωστικές λειτουργίες, γνώση και νοημοσύνη

Οι παράγοντες που αλληλεπιδρούν για να προκύψει το δημιουργικό έργο (δηλαδή οι δημιουργικές ιδέες και τα πρωτότυπα και εφαρμόσιμα προϊόντα της δημιουργικής διαδικασίας) είναι:

- i. οι βασικές γνωστικές λειτουργίες που είναι κοινές σε όλα τα άτομα.

Με τον όρο «τυπική σκέψη» αποδίδουμε ένα σύνολο γνωστικών ικανοτήτων που αφορούν:

- στην απομνημόνευση
- στη νοητική απεικόνιση
- στο σχεδιασμό
- στην πρόβλεψη του αποτελέσματος
- στην επιλογή και κρίση των πράξεων που θα οδηγήσουν στο βέλτιστο αποτέλεσμα
- στην απόφαση μεταξύ των εναλλακτικών δράσεων
- στον καθορισμό των συνεπειών που προκύπτουν μέσω του επαγωγικού συλλογισμού
- στην αντίληψη ενός γενικού σχεδίου μέσω του παραγωγικού συλλογισμού

Αυτές οι γνωστικές ικανότητες ομαδοποιούνται στις εξής κατηγορίες: μνήμη, σχεδιασμός, κρίση, λογική (Weisberg, 2006).

- ii. η προϋπάρχουσα γνώση που διαμορφώνεται από τα πλαίσια που επενεργεί το άτομο (εκπαιδευτικό πλαίσιο, κοινωνικό-πολιτισμικό πλαίσιο).

Η προϋπάρχουσα γνώση έχει διττό ρόλο στη δημιουργική σκέψη:

- τη δηλωτική και πρακτική γνώση που παρέχει στο άτομο τις δυνατότητες και τις επιλογές να επιλύει προβλήματα και
- τη διαδικαστική γνώση που εμπεριέχει τις τακτικές, τις μεθόδους και τις στρατηγικές που μαθαίνει το άτομο για να αντιμετωπίζει τις καταστάσεις και να επιλύει προβλήματα (Runco, 2004).

Απαραίτητη προϋπόθεση, επομένως, για να οδηγηθεί το άτομο στη δημιουργική σκέψη είναι η ύπαρξη ενός επιπέδου προϋπάρχουσας γνώσης που ο βαθμός του δεν μπορεί να προσδιοριστεί (και αυτό γιατί μερικές φορές ένα υψηλό επίπεδο γνώσης μπορεί να γίνει ανασταλτικός παράγοντας της δημιουργικής σκέψης δεδομένου ότι το άτομο εφαρμόζει τις ήδη καθιερωμένες τακτικές μεθόδους και στρατηγικές που έχει μάθει και δεν δείχνει καμία ευελιξία και καινοτομία στον τρόπο διαχείρισης των καταστάσεων και της επίλυσης προβλημάτων) (Abraham, 2013; Runco, 2004).

Υπάρχουν τρεις τομείς διαπραγμάτευσης της φύσης της δημιουργικής σκέψης:

- i. η προσανατολισμένη ή η μη προσανατολισμένη σε έναν τρόπο σκέψης
- ii. οι εξειδικευμένες ή οι γενικευμένες ιδιότητες
- iii. η συστηματική ή η μη δομική σκέψη

Τα διάφορα δεδομένα αποδεικνύουν ότι η δημιουργική σκέψη σχετίζεται άμεσα με τις παραπάνω συνθήκες και ότι μπορεί να οδηγήσουν σε δημιουργική ιδέα ή σε δημιουργικό έργο είδους (Stenberg, 2005; Wardetal., 1999).

Για πολλές δεκαετίες το μείζον ζήτημα που απασχολούσε τους επιστήμονες ήταν η σχέση της δημιουργικότητας με τη νοημοσύνη

Αρχικά η δημιουργικότητα ταυτιζόταν με τη νοημοσύνη (επειδή η δημιουργικότητα δεν αποτελούσε ερευνητικό πεδίο και δεν υπήρχαν αρκετά ερευνητικά δεδομένα) (Runco, 2007).

Ωστόσο, η σύγχρονη έρευνα έδειξε ότι οι δύο αυτές δομές είναι διαφορετικές (Nusbaum&Silvia, 2011).

Συγκεκριμένα, η νοημοσύνη εστιάζει στην αναλυτική ικανότητα, την προϋπάρχουσα γνώση, τη λύση ενός γνωστού/ δεδομένου προβλήματος και οδηγεί στην ακαδημαϊκή επιτυχία.

Αντίθετα, η δημιουργικότητα εστιάζει (με βάση την προϋπάρχουσα γνώση) στην παραγωγή και εφαρμογή νέων και καινοτόμων ιδεών σε μη γνωστά και δεδομένα προβλήματα αλλά και στην επίλυση γνωστών και δεδομένων προβλημάτων με διαφορετικούς και νέους τρόπους (Lubartetal., 2013) και οδηγεί στη δημιουργία μοναδικών έργων και ιδεών που χρήσουν αναγνώρισης στο συγκεκριμένο πλαίσιο που εκφράζονται (Lubartetal., 2013).

1.5.2 Γνωστικά μοντέλα

Υπάρχουν δύο μοντέλα που περιγράφουν την πολυπλοκότητα και την ετερογένεια των γνωστικών διεργασιών της δημιουργικότητας. Συγκεκριμένα:

1) Το Geneploremodel στο οποίο οι νοητικές διεργασίες που μελετώνται είναι:

- η εννοιολογική επέκταση (αφορά στην ικανότητα διεύρυνσης μιας υπάρχουσας εννοιολογικής δομής και οδηγεί στις καινοτόμες ιδέες)
- η δημιουργική απεικόνιση (αφορά στην ικανότητα αφαίρεσης, την πρόσφατη αξιοποιούμενη γνώση και τη διορατική επίλυση των προβλημάτων].
- Η αποκλίνουσα σκέψη (Abraham, 2013; Abraham &Windmann, 2007; Smith, Ward & Finke, 1995; Stenberg, 2005).

Σύμφωνα με τη Geneploremodel υπάρχουν δύο στάδια διεργασίας στη δημιουργική σκέψη:

- το παραγωγικό, όταν δημιουργούνται οι νοητικές αναπαραστάσεις
- το διερευνητικό, όπου αυτές οι αναπαραστάσεις γίνονται δημιουργικές ιδέες μέσω των νοητικών διεργασιών (Smithetal., 1995; Sternberg, 2005).

2) Το μοντέλο των Stenberg και Davinson (Davinson, 1995; Stenberg, 2005)

Σύμφωνα με το μοντέλο αυτό οι γνωστικές διεργασίες που σχετίζονται με τη δημιουργική σκέψη είναι:

- η επιλεκτική κωδικοποίηση (αφορά στο διαχωρισμό και το φιλτράρισμα των πληροφοριών των ερεθισμάτων του περιβάλλοντος που είναι απαραίτητα για την επίλυση ενός προβλήματος)
- ο επιλεκτικός συνδυασμός (αφορά στην καινοτόμο και παραγωγική σύνθεση των πληροφοριών και ερεθισμάτων)
- η επιλεκτική σύγκριση (αφορά στη σύγκριση, στη δημιουργία αναλογιών και στη συσχέτιση μεταξύ της προϋπάρχουσας γνώσης και των νέων πληροφοριών του περιβάλλοντος, ώστε το άτομο να οδηγηθεί με επιτυχία στην επίλυση ενός προβλήματος στην επίτευξη ενός συγκεκριμένου σκοπού ή έργου}.

1.5.3 Δημιουργικές γνωστικές διεργασίες

Οι τέσσερις κατηγορίες στις οποίες μπορούμε να χωρίσουμε τις δημιουργικές γνωστικές διεργασίες είναι:

- 1) η αναλυτική δημιουργική σκέψη ή η αποκλίνουσα δημιουργική σκέψη
 - αφορά στην από πάνω προς τα κάτω δημιουργική διεργασία'
 - οδηγεί μέσω επαγωγικού συλλογισμού σε πολλές καινοτόμες λύσεις ενός υπάρχοντος προβλήματος
 - η αισθητηριακή και αντιληπτική επεξεργασία του ερεθίσματος του περιβάλλοντος καθορίζεται από το βαθμό της προϋπάρχουσας γνώσης/εμπειρίας του ατόμου.
 - ο βαθμός της προϋπάρχουσας γνώσης/εμπειρίας καθορίζει τη δημιουργική σκέψη και την επίλυση ενός δεδομένου προβλήματος (Runco, 2007; Wang, 2008; Weisberg, 2006).
- 2) η συνθετική δημιουργικής σκέψη ή η συγκλίνουσα δημιουργική σκέψη
 - αφορά την από κάτω προς τα πάνω δημιουργική διεργασία
 - οδηγεί μέσω παραγωγικού συλλογισμού σε μία καινοτόμο λύση ενός υπάρχοντος προβλήματος
 - το ερέθισμα του περιβάλλοντος επεξεργάζεται αισθητηριακά και αντιληπτικά
 - το ερέθισμα αντιστοιχίζεται με την προϋπάρχουσα εμπειρία/γνώση στο μνημονικό σύστημα

- το ερέθισμα κατευθύνει την ενέργεια του ατόμου που οδηγεί στη δημιουργική σκέψη και την επίλυση ενός δεδομένου προβλήματος
- 3) η δημιουργική διεργασία που στηρίζεται σε ένα δεδομένο και αφορά στην αφαιρετική δημιουργική διεργασία που ακολουθεί κάποια ανάλογη μεθοδολογία (επαγωγική, παραγωγική, απαγωγική, αναλογική)
- 4) η δημιουργική διεργασία επίλυσης προβλήματος που οδηγεί στην καινοτόμο λύση του προβλήματος (μέσα από τη δημιουργική στοχοθεσία ή μέσα από δημιουργικούς τρόπους επίλυσης του δεδομένου προβλήματος) (Runco, 2007; Wang, 2008; Weisberg, 2006).

Συμπερασματικά, η προϋπάρχουσα γνώση έχει μεγάλη σημασία για τις δημιουργικές διεργασίες επειδή:

- κατευθύνει την εξερεύνηση του περιβάλλοντος από το άτομο
- καθορίζει τη σκέψη και την κατεύθυνση των ενεργειών του ατόμου

1.6 ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑ: ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗ Ή ΕΞΕΙΔΙΚΕΥΜΕΝΗ ΙΚΑΝΟΤΗΤΑ;

Ένα ζήτημα μείζονος σημασίας είναι το εξής ερώτημα:

«Η δημιουργικότητα αποτελεί μία γενικευμένη ικανότητα ή μια εξειδικευμένη ικανότητα που σχετίζεται με διάφορους τομείς (π.χ τέχνη, επιστήμη) ή συγκεκριμένα έργα (π.χ επίλυση προβλημάτων)»(Lubart&Guinard, 2004; Silvia, Kaufman&Pretz, 2009).

Συνεπώς απαιτείται να προσεγγίσουμε περισσότερο τη γενική έννοια της δημιουργικότητας και να διαχωρίσουμε τις συνιστώσες που την αποτελούν.

1.6.1 Το μοντέλο των Beghetto και Kaufman ή μοντέλο των τεσσάρων C

Σύμφωνα με τους ερευνητές της δημιουργικότητας μπορούμε να διακρίνουμε, βάσει εξωτερικών μόνο κριτηρίων (και όχι βάσει ενός σταθερού στοιχείου της προσωπικότητας), :

- τη Big- Creation (η διαπρεπής, η εξαιρετική και σπάνια δημιουργικότητα που έχει μεγάλο αντίκτυπο στην κοινωνία)
- τη Little- Creation (η καθημερινή ικανότητα επίλυσης προβλημάτων και προσαρμοστικότητας) (Beghetto&Kaufman, 2007; Kaufman, 2002).

Στη συνέχεια, οι ίδιοι ερευνητές πρότειναν ένα νέο διαχωρισμό της δημιουργικότητας αναφερόμενοι και στη minicreation. Έτσι αναγνωρίζεται τόσο η αναπτυξιακή διάσταση και το διαπροσωπικό κριτήριο της δημιουργικότητας, όσο και η σημαντική συσχέτισή της με τη μαθησιακή διεργασία.

Λίγο αργότερα οι ίδιοι ερευνητές πρόσθεσαν στο μοντέλο των τριώνC και την Pro-CCreativity, δηλαδή τη δημιουργικότητα του επαγγελματικού επιπέδου (η οποία όμως δεν έχει την ευρεία αναγνώριση και οι δημιουργοί της δεν έχουν το κύρος των δημιουργών της Big-C δημιουργικότητας).

Στην κατηγορία αυτή ανήκουν: όλοι οι επαγγελματίες και όλα τα έργα του ακαδημαϊκού τομέα, του τεχνολογικού τομέα, της αρχιτεκτονικής, των τεχνών, της ποίησης, της λογοτεχνίας.

Οι ερευνητές μελέτησαν ενδελεχώς τις βιογραφίες εξαιρετικά δημιουργικών ατόμων (από τα χρόνια της Αναγέννησης και της μεταγενέστερης εποχής). Διαπίστωσαν ότι το δημιουργικό δυναμικό ορισμένων προσωπικοτήτων ήταν πολύ υψηλό, αφορούσε σε πολλά επίπεδα (*homouniversalis*) και παρήγαγαν καινοτόμο και μοναδικό έργο.

Προκύπτει, λοιπόν, αβίαστα το εξής ερώτημα:

«Το πολύεπίπεδο δημιουργικό δυναμικό χαρακτηρίζει μόνο συγκεκριμένους ανθρώπους ή είναι κοινό χαρακτηριστικό όλων των ανθρώπων;»

(Δηλαδή το κάθε άτομο μπορεί να έχει δημιουργικό δυναμικό σε πολλαπλούς μη συσχετιζόμενους τομείς ή το δημιουργικό του δυναμικό περιορίζεται σε έναν ή σε περισσότερους συσχετιζόμενους τομείς;) (Beghetto&Kaufman, 2007; 2009; Plucker&Beghetto, 2004; Plucker&Zabelina, 2009).

Ένα άλλο ερώτημα που προκύπτει σχετίζεται με το βαθμό έκφρασης του πολυεπίπεδου δημιουργικού δυναμικού του ατόμου. Συγκεκριμένα

«Ο βαθμός έκφρασης του πολυεπίπεδου δημιουργικού δυναμικού θα πρέπει να είναι ο ίδιος σε όλους τους τομείς που εκφράζεται ή το άτομο εκφράζει διαφορετικά επίπεδα δημιουργικής ικανότητας στους διάφορους τομείς της δραστηριότητάς του;» (Beghetto&Kaufman, 2009).

Αρκετοί από τους σύγχρονους ερευνητές προσδιορίζουν τη δημιουργικότητα ως μία γνωστική ικανότητα συγκεκριμένου τομέα, ενώ κάποιοι άλλοι υποστηρίζουν ότι η δημιουργικότητα διαχέεται σε πολλούς τομείς. (Plucker&Zabelina, 2009).

1.7 ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΗΣ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑΣ

1.7.1 Εισαγωγή

Οι κατηγορίες στις οποίες χωρίζεται η αξιολόγηση και η έρευνα της δημιουργικότητας και της δημιουργικής διαδικασίας είναι:

- η ψυχομετρική (επικεντρώνεται στο άτομο και τις δημιουργικές διεργασίες)
- η πειραματική (εστιάζει στο δημιουργικό έργο)
- η βιογραφική (μελετά τα δημιουργικά άτομα χρησιμοποιώντας ποιοτικές μεθόδους)
- η ιστορική (μελετά τη δημιουργικότητα μέσα από συγκεκριμένα ιστορικά δεδομένα και αυτοαναφορές)
- η βιολογική (μελετά: τη νευροφυσιολογία του εγκεφάλου, τις λειτουργίες που εμπλέκονται στη δημιουργική σκέψη και τις δημιουργικές και γνωστικές νευροψυχολογικές διεργασίες). (Plucker&Renzulli, 1999).

1.7.2 Τρόποι αξιολόγησης της δημιουργικότητας στο εκπαιδευτικό πλαίσιο

Στο εκπαιδευτικό πλαίσιο από τους παραπάνω τρόπους αξιολόγησης της δημιουργικότητας χρησιμοποιείται ο εξής:

Η ψυχομετρική και πειραματική αξιολόγηση

Οι ερευνητές αρχικά εκτιμούσαν και αξιολογούσαν την αποκλίνουσα σκέψη (οι πτυχές της θεωρούνταν βασικές συνιστώσες της δημιουργικότητας). Στη συνέχεια, όμως, εκτιμούν και αξιολογούν τα κίνητρα και την προσωπικότητα, τις γνωστικές και ψυχο- συναισθηματικές διεργασίες, τη δημιουργική ικανότητα και το δημιουργικό προϊόν (Claxtonetal., 2005; Cropley, 1999). Η αξιολόγηση γίνεται με τα τεστ αποκλίνουσας σκέψης.

Τα πιο διαδεδομένα και ευρέως χρησιμοποιούμενα τεστ αποκλίνουσας σκέψης είναι:

1.7.2.1 Τεστ της δομής της νόησης του Guilford

Σύμφωνα με τη δοκιμασία αυτή οι διάφορες ικανότητες του ατόμου οργανώνονται σε τρεις διαστάσεις με διαφορετικά χαρακτηριστικά η καθεμία.

Η πρώτη διάσταση αφορά στο περιεχόμενο (αναφέρεται στην προσοχή που δίνει το άτομο στα διαφορετικά χαρακτηριστικά μιας πληροφορίας π.χ τα αισθητηριακά, τα συμβολικά, τα συμπεριφορικά).

Η δεύτερη διάσταση αφορά στο προϊόν (σχετίζεται στα είδη των πληροφοριών που επεξεργάζεται το άτομο από το περιεχόμενο μιας πληροφορίας (π,χ λέξεις, σχήματα, σχέσεις)

Η τρίτη διάσταση αφορά στη διαδικασία που περιγράφει τις γνωστικές διεργασίες (π.χ αποκλίνουσα παραγωγή, αξιοποίηση προϋπάρχουσας γνώσης).

Ο Guilfordπρέσβευε ότι ο συνδυασμός των ικανοτήτων κάθε διάστασης θα είναι διαφορετικός για το κάθε άτομο.

1.7.2.2 Τεστ Απομακρυσμένων Συνθέσεων του Mednick

Στο τεστ αυτό (RAT) εμπεριέχονται 30 θέματα. Από αυτά το καθένα έχει 3 δοθέντα στοιχεία και ένα κενό το οποίο καλείται να συμπληρώσει το άτομο. Αυτό το τεστ της δημιουργικής σκέψης βασίστηκε στην αντίληψη του Mednick ότι τα δημιουργικά άτομα είναι καλύτερα στην εξεύρεση απομακρυσμένων ιδεών.

1.7.2.3 Τεστ Δημιουργικής Σκέψης του Torrance

Το τεστ αυτό έχει δύο κλίμακες:

- ✓ Το TTCT-Verbal που αποτελεί τη λεκτική κλίμακα
- ✓ Το TTCT-Figural που αποτελεί την καλλιτεχνική κλίμακα

Ο Torrance δημιούργησε αυτό το τεστ δημιουργικής σκέψης το 1966 και μέσω αυτού αξιολογούνται οι εξής γνωστικές δημιουργικές διεργασίες:

- i. Η ευχέρεια (αφορά στο πλήθος των σχετικών λύσεων)

- ii. Η ευελιξία (προσδιορίζεται ως η διαφοροποίηση ή η εναλλαγή στις κατηγορίες των απαντήσεων)
- iii. Η πρωτοτυπία (σχετίζεται με την πρωτοτυπία των απαντήσεων) και
- iv. Η επεξεργασία (αναφέρεται στον αριθμό των λεπτομερειών που χρησιμοποιούνται σε μία απάντηση)

1.7.2.4 Τεχνική της συναινετικής αξιολόγησης

Με την τεχνική αυτή αξιολογούνται τα καλλιτεχνικά και λογοτεχνικά δημιουργικά προϊόντα (Baer, Kaufman&Gentile, 2004; Hennessey&Amabile, 1999). Η αξιολόγησή τους γίνεται κάτω από αυστηρές πειραματικές συνθήκες, όπου τα προϊόντα παράγονται σύμφωνα με τις οδηγίες που χορηγούνται στα άτομα και ο χαρακτηρισμός τους ως «δημιουργικών» ή «μη δημιουργικών» αποδίδεται έπειτα από τη συναίνεση των ειδικών (Hennessey&Amabile, 1999; Kaufmanetal., 2008).

Η τεχνική αυτή αποκλείει από την αξιολόγηση τα έργα που προέκυψαν πέρα από την πειραματική διάταξη και από τις συνθήκες ελέγχου.

1.8 ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΟΥ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ

1.8.1 Προσδιορισμός του δημιουργικού δυναμικού

Ήδη από το 2004 ο Gagne διαχώρισε τους όρους «χαρισματικότητα» και «ταλέντο». Συγκεκριμένα υποστήριξε ότι η «χαρισματικότητα» περιγράφει την εξαιρετική ικανότητα-ικανότητες ενός ατόμου. Αντίθετα, ο όρος «ταλέντο» περιγράφει την επίτευξη δηλαδή το αποτέλεσμα της συστηματικής ανάπτυξης ικανοτήτων του ατόμου με την προϋπάρχουσα γνώση.

Με ανάλογο τρόπο το 2013 οι ερευνητές έκαναν τη διάκριση στο δυναμικό και την επίτευξη στο πλαίσιο της δημιουργικότητας. Υποστήριξαν, λοιπόν, ότι:

- 1) δημιουργικό δυναμικό είναι οι ικανότητες που υπάρχουν εν δυνάμει στο άτομο (χωρίς το ίδιο να έχει συνειδητή γνώση της ύπαρξής τους και χωρίς απαραίτητα αυτές να εκδηλωθούν σε όλη τη διάρκεια της ζωής του).
- 2) το δυναμικό αυτό μπορεί να αξιοποιηθεί, εάν δοθούν στο άτομο οι κατάλληλες συνθήκες από το περιβάλλον του
- 3) το δυναμικό αυτό διαφέρει από άτομο σε άτομο
- 4) το δυναμικό αυτό σε ατομικό επίπεδο διαφέρει από έναν τομέα δραστηριοτήτων σε έναν άλλο (λόγω της φύσης των απαιτήσεων κάθε τομέα/ κάθε εργασίας και λόγω των γνωστικών και μη γνωστικών παραγόντων που εμπλέκονται σε κάθε έργο) (Lubartetal., 2013).

Συμπερασματικά, στο δημιουργικό δυναμικό συνυπάρχουν: πτυχές της νοημοσύνης, των γνωστικών διεργασιών, της προϋπάρχουσας γνώσης, της προσωπικότητας, των κινήτρων. Το δημιουργικό δυναμικό εκδηλώνεται όταν το άτομο εμπλακεί σε μία δημιουργική διαδικασία, δηλαδή σε μία σειρά από σκέψεις και πράξεις που θα οδηγήσουν στην παραγωγή μιας δημιουργικής ιδέας/ ενός δημιουργικού έργου μέσω της αποκλίνουσας- διερευνητικής δημιουργικής σκέψης μέσω της συγκλίνουσας- συνθετικής δημιουργικής σκέψης.

1.8.2 Μέτρηση του δημιουργικού δυναμικού

Για να αξιολογήσουμε το δημιουργικό δυναμικό ενός ατόμου ακολουθούμε δύο κύριες προσεγγίσεις:

1. Την ολιστική προσέγγιση

Βασίζεται στη δημιουργική διαδικασία και αξιολογείται το δημιουργικό δυναμικό δηλαδή δυνητικά το τι μπορεί να κάνει το άτομο, ενεργοποιώντας τα γνωστικά και τα μη γνωστικά χαρακτηριστικά του, σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο εργασίας. Σύμφωνα με την ολιστική προσέγγιση παρουσιάζεται στο άτομο μία δραστηριότητα ορισμένης χρονικής διάρκειας και του ζητείται να παράγει δημιουργικό έργο σε συγκεκριμένο χρόνο. Μέσα από τη δοκιμασία αξιολόγησης του δημιουργικού δυναμικού ΕΡοC (Evaluation of Potential Creativity) παρέχεται η δυνατότητα της ταυτόχρονης αξιολόγησης της αποκλίνουσας και της συγκλίνουσας σκέψης σε διάφορους τομείς της δημιουργικής διεργασίας και επιτρέπεται η δημιουργία ενός προσωπικού προφίλ των πλαισίων εργασίας, που δείχνει τις σχετικές δυνατότητες και αδυναμίες του κάθε παιδιού σε κάθε τομέα.

Με την ολιστική αυτή προσέγγιση εκτιμούνται τόσο τα γνωστικά όσο και τα μη γνωστικά χαρακτηριστικά της δημιουργικότητας, καθώς και οι επιπτώσεις αυτής της αλληλεπίδρασης.

2. Την αναλυτική προσέγγιση

Βασίζεται στους παράγοντες που καθορίζουν το δημιουργικό προφίλ του ατόμου. Με την προσέγγιση αυτή το άτομο δεν καλείται να παράγει δημιουργικό έργο, αλλά αξιολογείται μέσα από μία σειρά δοκιμασιών όπως τα ερωτηματολόγια, ώστε να δημιουργηθεί ένα προφίλ των γνωστικών και μη γνωστικών δημιουργικών χαρακτηριστικών του ατόμου. Αυτό το προφίλ θα είναι πληρέστερο, εάν αξιολογηθούν οι εξής πέντε βασικοί γνωστικοί παράγοντες:

- αποκλίνουσα σκέψη
- αναλυτική σκέψη
- γνωστική ευελιξία
- συνειρμική σκέψη
- επιλεκτικός συνδυασμός

και οι εξής πέντε μη γνωστικοί παράγοντες:

- ανοχή της ασάφειας
- ανάληψη ρίσκων
- ανεκτικότητα στη νέα εμπειρία
- διαίσθηση
- κίνητρα για δημιουργία

Συμπερασματικά η αναλυτική προσέγγιση αξιολογεί το εν δυνάμει δημιουργικό προφίλ του ατόμου (Lubartetal., 2013).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑ

2.1 Ο προσδιορισμός της φύσης των μαθηματικών

Ένα ερώτημα σχετικά με τον προσδιορισμό της φύσης των Μαθηματικών είναι το εξής: « Η μαθηματική γνώση δημιουργείται ή ανακαλύπτεται;»

Το ερώτημα αυτό ερμηνεύεται από τις εξής προσεγγίσεις:

1. Την προσέγγιση του Πλάτωνα. Σύμφωνα με αυτή τη θεώρηση τα Μαθηματικά και η μαθηματική γνώση υπήρξαν ανεξάρτητα από τον άνθρωπο και ανακαλύφθηκαν από αυτόν, όπως ο φυσικός κόσμος και οι σχέσεις που τον διέπουν.
2. Τη «φορμαλιστική θεωρία». Η θεωρία αυτή είναι αντίθετη με τον Πλατωνισμό και υποστηρίζει ότι τα Μαθηματικά και η μαθηματική γνώση αποτελούν προϊόν της ανθρώπινης σκέψης και δημιουργήθηκαν όπως ο πολιτισμός και η τεχνολογία (Davis&Hersh, 1998; Hersh, 1997; Liljedahl&Allan, 2013).
3. Το «Λογικισμό» ή «Λογικοκρατία». Σύμφωνα με τη θεωρία αυτή όλες οι επιστημονικές-μαθηματικές αλήθειες και θεωρήματα (π.χ η εξαγωγή συμπερασμάτων) θα πρέπει να πληρούν το κριτήριο της λογικής, δηλαδή θα πρέπει να αποδεικνύονται με βάση τα αξιώματα και τους κανόνες της λογικής.
4. Τον «Κονστрукτιβισμό». Οι θεωρητικοί του υποστήριξαν πως η μαθηματική αλήθεια και η διατύπωση των θεωρημάτων θα πρέπει να προσδιορίζεται μέσα από επικοινωνιακές-διαισθητικές μεθόδους και υπογράμμισαν ότι ο άνθρωπος παράγοντας είναι θεμελιώδης για τη δημιουργία της νέας γνώσης (Ernest, 2005; Sriraman, 2004b, 2009; Sriramanetal., 2013).

2.2 Μαθηματική Ικανότητα

Το 1918 ο Rogers A. διαχώρισε δύο θέματα μαθηματικής ικανότητας: το αναπαραγωγικό (που σχετίζεται με τη λειτουργία της μνήμης) και το παραγωγικό (που σχετίζεται με τη λειτουργία της σκέψης).

Ο Betz όρισε τη μαθηματική ικανότητα ως την ικανότητα να έχουμε μια ξεκάθαρη επίγνωση των εσωτερικών συνδέσεων των μαθηματικών σχέσεων και να σκεφτόμαστε με ακρίβεια χρησιμοποιώντας μαθηματικές αντιλήψεις.

Ο Wenzl την όρισε ως την ικανότητα να εγκαθιδρύσουμε στο μαθηματικό υλικό, συνδέσεις με σημασία.

Ο Lietzmann σημειώνει ότι είναι η ικανότητα να αιτιολογούμε μια συγκεκριμένη κατάσταση με τη χρήση των συμβόλων από τη μαθηματική γλώσσα.

Ο Φιλανδός ψυχολόγος Meinander μιλάει για τη μαθηματική ικανότητα ότι είναι ένα περίπλοκο προσόν που περιλαμβάνει τη νοημοσύνη, τη μνήμη και το ενδιαφέρον (Krutetskii, 1976).

Ο γνωστός ψυχολόγος Revenz στο βιβλίο του TalentundGenie (1952) εξετάζει δύο βασικούς τύπους της μαθηματικής ικανότητας: την εφαρμοστικότητα (applicative) (την ικανότητα να βρίσκουμε τις μαθηματικές σχέσεις γρήγορα, χωρίς προηγούμενες δοκιμές και να εφαρμόζουμε την κατάλληλη πληροφορία σε ανάλογες καταστάσεις) και την παραγωγικότητα (productive) (την ικανότητα να αποκαλύπτουμε σχέσεις που δεν προέρχονται άμεσα από τη διαθέσιμη πληροφορία) (Krutetskii, 1976).

Ο πιο σημαντικός και εκτενής ορισμός για τη «σχολική» μαθηματική ικανότητα σύμφωνα με την Krutetskii (1976), είναι του Σουηδού Ingvar Werdelin όπου περιληπτικά αναφέρει ότι αφορά στην ικανότητα των μαθητών να κατανοούν, να θυμούνται και να εφαρμόζουν τα μαθηματικά σύμβολα και τις μαθηματικές μεθόδους.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, είναι σαφές ότι δεν υπάρχει ένας συγκεκριμένος ορισμός για τη μαθηματική ικανότητα που να μπορεί να ικανοποιήσει τον καθέναν. Το σημείο στο οποίο θα μπορούσαν να συμφωνήσουν οι ερευνητές είναι ότι πρέπει να γίνει διαχωρισμός μεταξύ της «σχολικής» ικανότητας και μεταξύ της δημιουργικής μαθηματικής ικανότητας που σχετίζεται

με την ανεξάρτητη δημιουργία ενός γνήσιου προϊόντος που έχει κοινωνική αξία (Σκουμπουρδή, 2005)

2.3 Μαθηματική Δημιουργικότητα

2.3.1 Η έννοια της Μαθηματικής Δημιουργικότητας

Η απάντηση στο προηγούμενο ερώτημα («Τα Μαθηματικά δημιουργούνται ή ανακαλύπτονται;») καθορίζει και τον τρόπο προσέγγισης της Μαθηματικής Δημιουργικότητας.

Οι επιστημονικές μελέτες έχουν δείξει περίτρανα ότι η μαθηματική δημιουργικότητα είναι ένας από τους σημαντικότερους παράγοντες της ανώτερης μαθηματικής σκέψης, γιατί συμβάλλει τα μέγιστα στην ανάπτυξη και την εξέλιξη των Μαθηματικών ως επιστημονικού τομέα μέσω της δημιουργίας νέων αξιωμάτων και θεωρημάτων (Ernyck, 1991; Haylock, 1997; Leikin&Pitta- Pantazi, 2013; Mann, 2006, 2009; Sriraman, 2004a, 2009a; Sriramanetal., 2013).

Δικαιολογημένα, λοιπόν, οι σύγχρονες έρευνες στρέφουν το ενδιαφέρον τους:

1. στη μελέτη της μαθηματικής δημιουργικότητας των επιστημόνων μαθηματικών (Sriraman, 2004a, 2009a; Sriramanetal., 2013)
2. στη μελέτη της μαθηματικής δημιουργικότητας των μαθητών (Anderson, Krathwohl&Bloom, 2001; Krathwohl, 2002; Sriramanetal., 2013)

Έχουν δοθεί πολλοί και ποικίλοι ορισμοί της Μαθηματικής Δημιουργικότητας. Ωστόσο, η βασική αυτή έννοια προσδιορίζεται κυρίως με τις εξής παραμέτρους της δημιουργικότητας:

- το δημιουργικό άτομο
- το δημιουργικό προϊόν
- τη δημιουργική διεργασία
- το δημιουργικό περιβάλλον (Haylock, 1997; Sriramanetal., 2013)

και τα εξής κριτήρια της μαθηματικής δημιουργικότητας:

- την υπέρβαση των ορίων που θέτει ο καθιερωμένος τυπικός και στατικός τρόπος σκέψης και επίλυσης

- την επιλογή ενός διαφορετικού τρόπου σκέψης που δεν θα οδηγήσει απαραίτητα στη λύση ενός προβλήματος (Haylock, 1997; Krutetskii, 1977; Mann, 2006)
- τη διάκριση ανάμεσα στη μαθηματική δημιουργική σκέψη και τη συστηματική εφαρμογή και εξάσκηση των πολλαπλών στρατηγικών επίλυσης ενός προβλήματος (Balka, 1974; Mann, 2006)

Συμπερασματικά, η μαθηματική δημιουργική σκέψη αναφέρεται στη διερεύνηση των γνώσεων και στρατηγικών του ατόμου με την ανακάλυψη νέων που θα συμβάλλουν τα μέγιστα στην επιστήμη των Μαθηματικών.

2.3.2 Ιστορική Αναδρομή

Ήδη από τις αρχές του 20^{ου} αιώνα παρατηρήθηκαν οι πρώτες προσπάθειες για να προσδιοριστεί και να διερευνηθεί η έννοια της Μαθηματικής Δημιουργικότητας. Συγκεκριμένα:

- Ο Poincare (1952) όρισε τη μαθηματική δημιουργικότητα ως διάκριση ή επιλογή του κατάλληλου συνδυασμού ιδεών ανάμεσα σε ένα πλήθος ιδεών και συνδυασμών.
- Ο Poincare (1952) και ο Handamard (1945) επηρεασμένοι από τις αρχές της Μορφολογικής Ψυχολογίας κατέληξαν στη διάκριση τεσσάρων σταδίων στη γνωστική διεργασία της μαθηματικής δημιουργικότητας. Αυτά είναι:
 - i. Η προετοιμασία, που αφορά στην κατανόηση του προβλήματος
 - ii. Η επώαση κατά την οποία το άτομο εστιάζει σε άλλα προβλήματα και απομακρύνεται από το αρχικό
 - iii. Ο φωτισμός, κατά τη διάρκεια του οποίου το άτομο φαντάζεται τη λύση του αρχικού προβλήματος ενώ ασχολείται με άλλα προβλήματα
 - iv. Η επαλήθευση, κατά τη διάρκεια της οποίας το άτομο διατυπώνει τη λύση που έχει βρει και την επαληθεύει.

Στο συγκεκριμένο μοντέλο, ωστόσο, απουσιάζει η έννοια της καινοτομίας (η οποία αποτελεί δομική έννοια- αναπόσπαστο μέρος της δημιουργικότητας) και έτσι καθίσταται ελλιπές.

- Ο Polya (1954) προσδιόρισε τη μαθηματική δημιουργικότητα με γνώμονα τις ποικίλες στρατηγικές που χρησιμοποιεί το άτομο για να οδηγηθεί στην οδήγηση του προβλήματος και την απαλήθευση της λύσης.
- Ο Balka (1974) υποστήριξε ότι τα βασικά χαρακτηριστικά της μαθηματικής δημιουργικότητας είναι η συγκλίνουσα και η αποκλίνουσα σκέψη και ότι συμβάλλουν τα μέγιστα στην ανάπτυξη καινοτόμων ιδεών και στη διάσπαση του αρχικού προβλήματος σε επιμέρους υποερωτήματα.

Μετά από έρευνα που πραγματοποίησε ανάμεσα σε δασκάλους, μαθητές και μαθηματικούς διέκρινε έξι ικανότητες που συνθέτουν τη μαθηματική δημιουργικότητα.

Οι ικανότητες αυτές είναι:

- i. η ικανότητα διατύπωσης μαθηματικής υπόθεσης
 - ii. η ικανότητα προσδιορισμού- αναγνώρισης μαθηματικών μοτίβων
 - iii. η ικανότητα υπέρβασης του προκαθορισμένου και τυπικού τρόπου επίλυσης προβλημάτων
 - iv. η ικανότητα ανάπτυξης και εκτίμησης ασυνήθιστων μαθηματικών ιδεών
 - v. η ικανότητα αναγνώρισης των στοιχείων που λείπουν για την επίλυση του προβλήματος και η αναζήτηση μέσω ερωτήσεων για τη συμπλήρωσή τους
 - vi. η ικανότητα διαχωρισμού του προβλήματος σε υποερωτήματα
- Ο Krutetskii (1977) χαρακτήρισε τη μαθηματική δημιουργικότητα ως την ικανότητα διατύπωσης ενός προβλήματος, δημιουργίας ερωτημάτων και υποθέσεων, της ανακάλυψης της μαθηματικής γνώσης, της ανεξαρτησίας της σκέψης και της πρωτοτυπίας.
 - Ο Ervynck (1991) υποστήριξε ότι η μαθηματική δημιουργικότητα είναι ένα κύριο χαρακτηριστικό της αναπτυγμένης μαθηματικής σκέψης και ειδικότερα ως μία από τις παρακάτω ικανότητες:
 - i. η ικανότητα διατύπωσης χρήσιμων και νέων μαθηματικών εννοιών και υποθέσεων που θα οδηγήσουν στη δημιουργία μιας νέας θεωρίας
 - ii. η ικανότητα διερεύνησης των εγγενών σχέσεων μεταξύ δύο ή περισσότερων κομβικών- καίριων μαθηματικών εννοιών που δεν είχαν παρατηρηθεί πριν
 - iii. η ικανότητα οργάνωσης των στοιχείων μιας θεωρίας κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να γίνεται ολοφάνερη η επαγωγική λογική της
 - Ο Torrance (1965) υποστήριξε ότι η δημιουργικότητα είναι μια γνωστική διαδικασία κατά την οποία το άτομο ψάχνει να βρει λύσεις για ένα πρόβλημα δίνοντας έμφαση

στα στοιχεία εκείνα που λείπουν από το πρόβλημα κάνοντας εικασίες ή διατυπώνοντας υποθέσεις σχετικά με αυτές τις ελλείψεις δοκιμάζοντας και ξαναδοκιμάζοντας τις υποθέσεις και ,τέλος ,ανακοινώνει τη λύση που βρήκε.

Παράλληλα, ο Torrance διέκρινε τέσσερα θεμελιώδη στοιχεία της δημιουργικότητας. Αυτά είναι:

- i. η πρωτοτυπία (originality)
 - ii. η ευχέρεια (fluency)
 - iii. η ευελιξία (flexibility)
 - iv. η επεξεργασία (elaboration)
- Ο Silver (1997) και η Leikin (2007) χρησιμοποίησαν τον ορισμό του Torrance για να περιγράψουν τη μαθηματική δημιουργικότητα αποβάλλοντας όμως τον παράγοντα «επεξεργασία», επειδή είναι δύσκολο να προσδιοριστεί στον τομέα της μαθηματικής δημιουργικότητας
 - Τέλος, ο Sriraman (2009) ισχυρίστηκε ότι η μαθηματική δημιουργικότητα θα πρέπει να προσδιορίζεται με βάση το κριτήριο της πρωτοτυπίας και της καινοτομίας.

2.4 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ

Η Μαθηματική Δημιουργικότητα εξετάζεται:

- είτε ως η εξέχουσα ικανότητα διαπρεπών μαθηματικών που συμβάλλει στη διερεύνηση της μαθηματικής γνώσης σε παγκόσμιο επίπεδο (απόλυτη δημιουργικότητα). Η απόλυτη δημιουργικότητα εκτιμάται με βάση τις ανακαλύψεις που προάγουν τα Μαθηματικά ως επιστήμη σε παγκόσμιο επίπεδο. Ο Fermat είναι ένας διαπρεπής μαθηματικός, ένας επιστήμονας με απόλυτη μαθηματική δημιουργικότητα.
- είτε ως η δημιουργική ικανότητα των μαθητών στα εκπαιδευτικά πλαίσια που διευρύνει τη μαθηματική γνώση σε σχέση με την προϋπάρχουσα γνώση, τις προϋπάρχουσες στρατηγικές και τους προϋπάρχοντες τρόπους επίλυσης προβλημάτων (συσχετιζόμενη δημιουργικότητα). Η συσχετιζόμενη δημιουργικότητα εκτιμάται με βάση τις προηγούμενες εμπειρίες και την προηγούμενη απόδοση άλλων μαθητών με παρόμοιο εκπαιδευτικό ιστορικό. Η καλλιέργεια και η ανάπτυξη της συσχετιζόμενης

δημιουργικότητας στο σχολείο μπορεί να οδηγήσει μελλοντικά στην απόλυτη δημιουργικότητα του ατόμου (Liljedahl&Sriraman, 2006; Sriramanetal., 2013).

Στη συνέχεια θα αναφερθεί ένας άλλος διαχωρισμός της Μαθηματικής Δημιουργικότητας:

- η μαθηματική δημιουργικότητα σε επίπεδο σχολείου, δηλαδή η διαδικασία που θα οδηγήσει σε μία καινοτόμο λύση ενός προβλήματος, στο σχηματισμό νέων ερωτημάτων και πιθανών υποθέσεων ,ώστε το πρόβλημα να ιδωθεί με άλλη οπτική γωνία
- η μαθηματική δημιουργικότητα σε επαγγελματικό επίπεδο, δηλαδή η ικανότητα παραγωγής πρωτότυπου μαθηματικού έργου που προσθέτει σημαντικά στην προϋπάρχουσα γνώση ή η ικανότητα διατύπωσης νέων ερωτημάτων που ανοίγει καινούριους δρόμους για άλλους μαθηματικούς (Shriki, 2010; Sriraman, 2009a).

2.4.1 Ορισμός της Μαθηματικής Δημιουργικότητας

Κάθε προσπάθεια ορισμού της μαθηματικής δημιουργικότητας θα πρέπει να ενσωματώνει στοιχεία από τον τομέα της δημιουργικότητας και ταυτόχρονα από την επιστήμη των μαθηματικών (Haylock, 1987). Σε κάποιες περιπτώσεις οι ερευνητές καταφεύγουν στη γενική δημιουργική ικανότητα, για να επιλέξουν τις ιδέες που σχετίζονται με τον τομέα των μαθηματικών (Haylock, 1987), ενώ άλλες φορές αναπτύσσουν ορισμούς που αναφέρονται αποκλειστικά σε δεξιότητες από το γνωστικό αντικείμενο των μαθηματικών και ιδιαίτερα δεξιότητες που εμφανίζονται κατά την επίλυση προβλήματος (Kattou, Kontoyianni, Pitta-Pantazi, Christou&Cleanthouw, 2011).

Στην πρώτη κατηγορία, ορισμών περιλαμβάνονται οι ερευνητικές προσπάθειες των Krutetskii (1976), Ernyck (1991), Silver (1997), Haylock (1997), Kim, Cho&Ahn (2003), Leikin&Lev (2007).

Οι συγκεκριμένοι ορισμοί υιοθετούν τις έννοιες της ευελιξίας, της ευχέρειας και της πρωτοτυπίας, όπως προτάθηκαν από τον Torrance (1974, 1995), στο πλαίσιο των μαθηματικών. Σε αυτό το πλαίσιο, η ευχέρεια αναφέρεται στον αριθμό των ορθών και διαφορετικών λύσεων που προτείνονται, η ευελιξία στις εναλλαγές μεταξύ διαφορετικών ιδεών και τέλος, η πρωτοτυπία αναφέρεται στο βαθμό καινοτομίας των προτεινόμενων

λύσεων (Leikin, 2007). Ταυτόχρονα, κατά την επίλυση προβλημάτων με πολλαπλές λύσεις, ο Holland (Imai, 2000) πρόσθεσε τα στοιχεία της επεξεργασίας, δηλαδή της επέκτασης ή της βελτίωσης μεθόδων και της ευαισθησίας, δηλαδή της εποικοδομητικής κριτικής των κοινότυπων μεθόδων, ως κριτήρια της μαθηματικής δημιουργικότητας.

Στη δεύτερη κατηγορία περιλαμβάνονται ορισμοί οι οποίοι έχουν ως επίκεντρο τη λύση προβλήματος. Για παράδειγμα, ο Polya (1954) όρισε τη μαθηματική δημιουργικότητα ως την ικανότητα επίλυσης προβλήματος με ευρετικές μεθόδους και ο Ervynck (1991) ως την ικανότητα επίλυσης προβλήματος για ανάπτυξη της σκέψης σε δομές. Οι Baharkai Maker (2011) αναφέρθηκαν στη μαθηματική δημιουργικότητα ως την ικανότητα παραγωγής καινοτόμων λύσεων σε μαθηματικά προβλήματα εφαρμόζοντας μαθηματικές αρχές και ιδιότητες με πολλούς, διαφορετικούς τρόπους για την παραγωγή ορθών μαθηματικών απαντήσεων. Πέρα από την επίλυση προβλημάτων, η ικανότητα διατύπωσης μαθηματικών προβλημάτων περιλαμβάνεται σε ορισμούς για το δημιουργικό άτομο (Krutetskii, 1975; Silver, 1997).

Ο Aiken (1993) παρατήρησε ότι οι ορισμοί για τη μαθηματική δημιουργικότητα επικεντρώνονται συνήθως σε διαδικασίες σκέψης που ενδεχομένως θα εμφανιστούν κατά τη δημιουργική εργασία. Η παρατήρηση μοτίβων με αριθμούς ή σχήματα (Freiman & Sriraman, 2011), η διάκριση ή η επιλογή στοιχείων που πληρούν συγκεκριμένα κριτήρια (Hadamard, 1945) και η επέκταση μοτίβων με πρωτότυπους τρόπους (Cornish & Wines, 1980) περιλαμβάνονται στις δημιουργικές διεργασίες. Ταυτόχρονα, η ικανότητα εντοπισμού σχέσεων μεταξύ ασύνδετων ιδεών (Tammadge, 1979; Haylock 1987) και κατ'επέκταση η ικανότητα αφαίρεσης και γενίκευσης μαθηματικών εννοιών (Haylock 1985; Krutetskii, 1976) θεωρούνται ως ανωτέρου επιπέδου διαδικασίες σκέψης, απαραίτητες για τη δημιουργικότητα στα μαθηματικά (Ervynck, 1991). Πιο πρόσφατα, σε ορισμούς για τη μαθηματική δημιουργικότητα αναφέρθηκε η ικανότητα εφαρμογής μη αλγοριθμικών διαδικασιών για τη λήψη απόφασης (Sriraman, 2005), ο ευέλικτος χειρισμός πληροφορόρησης και η ικανότητα αντιστροφής διαδικασιών (Sheffield, 2008).

Η ποικιλομορφία των ορισμών που έχουν προταθεί για τη μαθηματική δημιουργικότητα, δεν θα πρέπει να αποτελεί βαρύ παιδαγωγικό εμπόδιο. Ανεξαρτήτως του ορισμού που υιοθετείται σε κάθε ερευνητική προσπάθεια, η ανάπτυξη της μαθηματικής δημιουργικότητας σε όλους

τους μαθητές θα πρέπει να είναι ένας από τους κύριους στόχους της μαθηματικής παιδείας στα σχολεία (Leikin, 2009).

2.4.2 Ανάπτυξη της Μαθηματικής Δημιουργικότητας στο Σχολείο

Αναμφισβήτητα η οικογένεια και το σχολείο είναι δύο πολύ σημαντικοί φορείς αγωγής-παιδείας-κοινωνικοποίησης (Kaufman&Stenberg, 2006; Leikin&Pitta- Pantazi, 2013). Στα πρώτα χρόνια της ζωής του ανθρώπου «χτίζονται» τα θεμέλια όχι μόνο της δημιουργικής σκέψης αλλά και της μαθηματικής δημιουργικής σκέψης (Leikin&Pitta- Pantazi, 2013). Επομένως, το περιβάλλον της διδασκαλίας των μαθηματικών οφείλει να παρέχει στους μαθητές τις κατάλληλες συνθήκες, ώστε να μπορέσουν να αναπτύξουν το δημιουργικό τους δυναμικό στα Μαθηματικά (Leikin&Pitta- Pantazi, 2013).

2.4.2.1 Μαθηματικά προβλήματα

Στο Αναλυτικό Πρόγραμμα των Μαθηματικών σε πολλές χώρες η επίλυση προβλημάτων θεωρείται πολύ σημαντική, γιατί μέσω αυτών η σκέψη των μαθητών καλλιεργείται και αξιολογούνται οι μαθηματικές τους ικανότητες (Kwon, Park&Park, 2006; Masonm 1991; Pehkonen, Naveri&Laine, 2013).

Τι είναι, όμως, το «μαθηματικό πρόβλημα»;

Σύμφωνα με τον Pehkonen είναι η δοκιμασία κατά την οποία το παιδί για να την εκτελέσει θα πρέπει να συνδέσει την προϋπάρχουσα γνώση με τα δεδομένα που του παρέχονται με τρόπο που να είναι καινούριος για αυτό.

Μέσα από την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων ο μαθητής:

- αναπτύσσει ευρέως τις γνωστικές ικανότητές του
- αναπτύσσει τη δημιουργική του ικανότητα
- αποκτά σημαντικά κίνητρα μάθησης (Pehkonen, 1997b)

Οι εκπαιδευτικές πρακτικές που εφαρμόζονται στις περισσότερες χώρες είναι

1. η διδασκαλία μεθόδων-στρατηγικών-αλγορίθμων και
2. η επίδειξη παραδειγματικής επίλυσης προβλήματος (προβλημάτων)

2.4.2.2 Προβλήματα Ανοιχτού τύπου

Η χρήση της μεθόδου προβλημάτων ανοιχτού τύπου

- προάγει τη δημιουργικότητα των μαθητών
- πυροδοτεί το ενδιαφέρον τους
- προκαλεί την ενεργό συμμετοχή τους (Kwonetal., 2006)

Παράλληλα, με τα προβλήματα ανοιχτού τύπου οι μαθητές ασκούνται όχι μόνο στην επίλυση ενός προβλήματος με διαφορετικούς τρόπους αλλά και στην ανακάλυψη νέων τρόπων προσέγγισης της λύσης με βάση την προϋπάρχουσα γνώση και εμπειρία (Becker&Shimada, 1997)

Τα χαρακτηριστικά του ανοιχτού τύπου προβλημάτων είναι:

1. η ανταπόκριση στο επίπεδο του κάθε μαθητή και η ύπαρξη ενδιαφέροντος και οικείας θεματολογίας, ώστε ο μαθητής
 - να αντιλαμβάνεται ότι είναι απαραίτητο να λύνει προβλήματα
 - να νιώθει ότι μπορεί να τα καταφέρει με τις γνώσεις του
 - να αποκτά την αίσθηση της ικανοποίησης
2. η δυνατότητα γενίκευσής τους σε άλλα προβλήματα (Nohda, 2000).

2.4.2.3 Διατύπωση προβλημάτων

Μία άλλη μέθοδος ανάπτυξης και αξιολόγησης της μαθηματικής δημιουργικότητας και προτείνεται από τα Αναλυτικά Προγράμματα σε παγκόσμιο επίπεδο είναι η διατύπωση προβλημάτων (Lavy&Shriki, 2010; Silver, 1997, 2013; Singer, Pelczer&Voica, 2011; Voica&Singer, 2013)

Οι μαθητές, δηλαδή, θα πρέπει:

- να διαμορφώνουν και να ερευνούν μαθηματικές εικασίες
- να μάθουν πώς να γενικεύουν και να επεκτείνουν τα μαθηματικά προβλήματα διατυπώνοντας ερωτήματα σε συνέχεια των δεδομένων που τους παρέχονται από τη συγκεκριμένη δραστηριότητα (Brown&Walter, 2005).

Η χρήση της μεθόδου της διατύπωσης προβλημάτων στοχεύει:

1. στη διεύρυνση της σκέψης και της αντίληψης των μαθητών
2. στη βελτίωση της ικανότητας επίλυσης προβλημάτων
3. στην καλύτερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών
4. στο σχηματισμό προβλημάτων από τους μαθητές που το περιεχόμενό τους μπορεί να προέρχεται είτε από Μαθηματικά είτε από άλλα γνωστικά αντικείμενα
5. στην ανάπτυξη της συγκλίνουσας σκέψης
6. στην αλλαγή του τρόπου αντιμετώπισης των Μαθηματικών ως διδακτικό αντικείμενο από τους μαθητές και στην ανάπτυξη βαθιάς γνώσης των μαθηματικών φαινομένων και της γενίκευσής τους (Silver, 2013).

2.4.2.4 Στάδια ανάπτυξης της Μαθηματικής Δημιουργικότητας μέσω της επίλυσης προβλημάτων του Erryck

Σύμφωνα με τον Erryck (1991) η επίλυση προβλημάτων στο χώρο του σχολείου αναπτύσσει τη μαθηματική δημιουργικότητα μέσα από τα εξής στάδια:

- i. Στάδιο 0: πρωταρχικό τεχνικό στάδιο

Στο στάδιο αυτό ο μαθητής, χωρίς να γνωρίζει τη θεωρητική βάση των μαθηματικών κανόνων και των διαδικασιών, τους εφαρμόζει μηχανικά (κάνει δηλαδή πρακτική εφαρμογή)

- ii. Στάδιο 1: εκτέλεση αλγορίθμων

Στο στάδιο αυτό ο μαθητής εκτελεί με ακρίβεια μαθηματικούς υπολογισμούς, επιλύει με επιτυχία απλά και πολύπλοκα προβλήματα και χρησιμοποιεί με ευχέρεια μαθηματικές τεχνικές.

- iii. Στάδιο 2: δημιουργικό στάδιο

Στο στάδιο αυτό ο μαθητής επιλέγει έναν τρόπο λύσης ή μία τεχνική που δεν έχει εκτελέσει έως τώρα και δημιουργεί έναν νέο τρόπο επίλυσης. Το βήμα αυτό είναι το τελικό και αναπτυγμένο στάδιο της μαθηματικής σκέψης που αφορά στην επιλογή του προσδιορισμού μιας νέας μαθηματικής έννοιας ή στην απόφαση της ανάπτυξης, της διατύπωσης και της απόδειξης ενός νέου μαθηματικού θεωρήματος.

Η προϋπάρχουσα εμπειρία της μαθηματικής γνώσης και το κατάλληλο πλαίσιο που θα οδηγήσει στη δημιουργία της νέας γνώσης είναι «εκ των ουκ άνευ» προϋποθέσεις της ανάπτυξης της μαθηματικής δημιουργικότητας.

2.4.2.5 Μοντέλο Δημιουργικής Πολυμάθειας των Beghetto&Kaufman

Οι Beghetto και Kaufmann (2009) στηριζόμενοι στη γενική παραδοχή ότι «όλα τα παιδιά (και όλοι οι άνθρωποι) έχουν δημιουργικό δυναμικό ακόμα και αν αυτό δεν έχει εκδηλωθεί» υποστήριξαν ότι:

- i. η δημιουργικότητα μπορεί να αποτελεί ταυτόχρονα μία γενική ικανότητα αλλά και μία ικανότητα συγκεκριμένου τομέα
- ii. το δημιουργικό δυναμικό των μαθητών μπορεί να εκφραστεί σε πολλαπλά επίπεδα, αν καλλιεργηθεί στο χώρο του σχολείου.

Ο Srirman (2009b) έκανε μια τριετή έρευνα και διαπίστωσε ότι οι μισοί μαθητές που συμμετείχαν σε αυτήν απέκτησαν χαρακτηριστικά πολυμάθειας και δημιουργικής πολυμάθειας μέσω της διδασκαλίας των Μαθηματικών.

Το μοντέλο δημιουργικής πολυμάθειας μέσω των Μαθηματικών που πρότειναν οι Beghetto&Kaufman είναι

- i. ανάπτυξη της Big-C και της Pro-C δημιουργικότητας μέσω της μελέτης βιογραφιών επαγγελματιών μαθηματικών που είχαν πολυεπίπεδο δημιουργικό δυναμικό
- ii. ανάπτυξη της little-c μέσω των κατάλληλων δραστηριοτήτων, προβλημάτων και σχεδίων εργασίας (για την ανάπτυξη του μαθηματικού τους δημιουργικού δυναμικού) και μέσω άλλων δραστηριοτήτων άλλων γνωστικών αντικειμένων π.χ λογοτεχνίας, φυσικής (για την ανάπτυξη του δημιουργικού τους δυναμικού σε άλλα επίπεδα)

- iii. ανάπτυξη της mini-c μέσω εκείνης της διδασκαλίας και εκείνων των δραστηριοτήτων που έχουν νόημα για τους μαθητές και ενίσχυση των συνδέσεων τους με την ύλη των Μαθηματικών

2.4.3 Μαθηματική Δημιουργικότητα και εκπαιδευτική πραγματικότητα

Η εκπαίδευση στοχεύει να προετοιμάσει τους ανθρώπους του αύριο εφοδιάζοντάς τους με τις απαραίτητες γνώσεις και – κυρίως- με τις γνωστικές και μεταγνωστικές ικανότητες που θα συμβάλλουν τα μέγιστα στην πρόοδο και την εξέλιξη όχι μόνο των ίδιων των ατόμων αλλά και της κοινωνίας γενικότερα (Andersometal., 2001).

Σύμφωνα λοιπόν με την αναθεώρηση της στοχοθεσίας της ταξινομίας του Bloom δίνεται ιδιαίτερη βαρύτητα στη μεταγνώση και υψηλότερη γνωστική διεργασία θεωρείται η δημιουργική σκέψη (Krathwohl, 2002).

Συνεπώς, οι μεγάλες προκλήσεις της εκπαίδευσης είναι:

- η διεύρυνση των γνωστικών δομών που καθορίζουν και σχετίζονται με τη δημιουργικότητα
- οι τρόποι καλλιέργειας και ανάπτυξής της στο σχολικό περιβάλλον (Leikin, 2013; Leikinetal., 2009; Sriramanetal., 2013).

Ωστόσο, τα τελευταία χρόνια μόλις η μαθηματική εκπαιδευτική ικανότητα κάνει προσπάθειες όχι μόνο για να αναγνωριστεί η σπουδαιότητα της μαθηματικής δημιουργικότητας , αλλά και να προταθούν οι τρόποι καλλιέργειάς της στο χώρο του σχολείου.

Τα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών τόσο της Ελλάδας όσο και άλλων χωρών ενώ αναφέρουν θεωρητικά ότι πρώτιστος στόχος είναι η ανάπτυξη της δημιουργικότητας σε όλα τα γνωστικά αντικείμενα, στην πράξη δεν ακολουθούν πρακτικές που να συμβάλλουν στην ανάπτυξη της δημιουργικής σκέψης.

Ακολουθείται, λοιπόν, ο παραδοσιακός τρόπος διδασκαλίας επειδή

- οι εκπαιδευτικοί τείνουν να διδάσκουν με τρόπο που έχουν διδαχθεί και οι ίδιοι
- υπάρχει ασφυκτική πίεση από τη διδακτέα ύλη

- δεν υπάρχει εξοικείωση των εκπαιδευτικών με τους τρόπους καλλιέργειας της μαθηματικής δημιουργικότητας (daPonte, 2007; Sarrazy&Novotna, 2013; Shriki, 2010)

Ωστόσο, το μείζον θέμα είναι να αναδειχθούν οι παράγοντες που προσδιορίζουν τη μαθηματική δημιουργικότητα και να βελτιωθούν οι μέθοδοι εκπαίδευσης (Shriki, 2010; Williams&Huang, 2014).

2.5 Μαθηματική ικανότητα και Μαθηματική Δημιουργικότητα

2.5.1 Μαθηματική Ικανότητα και Μαθηματική Επίδοση

«Μαθηματική ικανότητα» με βάση τα γνωστικά κριτήρια ορίζεται ως η ικανότητα απόκτησης, επεξεργασίας και διατήρησης των μαθηματικών πληροφοριών (Krutetski, 1977; Vilkomir&O'Donoghue, 2009).

Σύμφωνα με τον Krutetski η μαθηματική ικανότητα των παιδιών αποτελείται από τις ακόλουθες επιμέρους ικανότητες που την συνθέτουν:

- τη χρήση της μαθηματικής γλώσσας (όρων και συμβόλων των Μαθηματικών)
- την ικανότητα γενίκευσης των στρατηγικών και των τρόπων επίλυσης των προβλημάτων με τον πιο σύντομο και ακριβή τρόπο
- το λογικό-επαγωγικό τρόπο σκέψης
- την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων με τον πιο σύντομο και ακριβή τρόπο
- την ικανότητα εναλλαγής της κατεύθυνσης της σκέψης
- την ικανότητα ευελιξίας μεταξύ των γνωστικών διεργασιών
- την ανάκληση της προϋπάρχουσας γνώσης, των αποκτηθέντων μαθηματικών εννοιών και γενικεύσεων
- την ανάπτυξη ενός «μαθηματικού νου» πριν την εφηβεία

Ο Krutetski διέκρινε τρία επίπεδα μαθηματικής ικανότητας (δεδομένου ότι οι μαθητές δείχνουν διαφορετικές ικανότητες στα Μαθηματικά)

- i. ικανοί μαθητές στα Μαθηματικά (αυτοί που έχουν υψηλή ικανότητα ταχείας και ευρείας γενίκευσης των μαθηματικών εννοιών και στρατηγικών)

- ii. επαρκείς μαθητές (που έχουν ικανοποιητικές ικανότητες επίλυσης προβλημάτων αλλά δεν μπορούν να γενικεύουν τις έννοιες και τις στρατηγικές)
- iii. μη ικανοί μαθητές (που αποτυγχάνουν στην επίλυση προβλημάτων και έχουν αδυναμία στη γενίκευση εννοιών και στρατηγικών)

Από την άλλη πλευρά «μαθηματική ικανότητα» ,με βάση τα πραγματιστικά κριτήρια ορίζεται ως η ικανότητα μάθησης και κατάκτησης των μαθηματικών εννοιών και δεξιοτήτων (Koshy, Ernest&Casey, 2009).

Χαρακτηριστικά, ο Karsenty όρισε την μαθηματική ικανότητα ως την ικανότητα του ατόμου να κατέχει υψηλό επίπεδο μαθηματικών γνώσεων, να εκτελεί μαθηματικές πράξεις και αλγορίθμους και να λύνει αποτελεσματικά προβλήματα (Karsenty, 2014).

Πολλοί ταυτίζουν τον όρο «ικανότητα» με τον όρο «επίδοση», επειδή συνήθως οι υψηλές ακαδημαϊκές γνώσεις φέρνουν και υψηλή επίδοση σε όλα τα γνωστικά αντικείμενα, και αντίστοιχα ταυτίζουν τη «μαθηματική ικανότητα» με τη «μαθηματική επίδοση» (Benbow&Arjmand, 1990; Hemmings, Grootenbuer&Kay, 2011; Singh, Granville&Dika, 2002; Spinath, Harlaar&Plomin, 2006; Sriramanetal., 2013).

Ωστόσο αυτές οι δύο έννοιες δεν θα πρέπει να ταυτίζονται, αφού ικανότητα δεν σημαίνει απαραίτητα και επίδοση (Kim, Cho&Ahn, 2004; Sriramanetal., 2013) και οι παραδοσιακές μέθοδοι αξιολόγησης της μαθηματικής επίδοσης δεν μπορούν να αξιολογήσουν επαρκώς τη μαθηματική ικανότητα (υπάρχουν χαρισματικοί μαθητές με χαμηλές επιδόσεις στα παραδοσιακά κριτήρια αξιολόγησης (Ching, 1997; Kimetal., 2004).

2.5.2 Μαθηματική Ικανότητα και Μαθηματική Δημιουργικότητα

Μία σημαντική παράμετρος της μαθηματικής ικανότητας είναι η μαθηματική δημιουργικότητα, η οποία και θα πρέπει να καλλιεργείται στο σχολικό χώρο μέσω της διδασκαλίας των Μαθηματικών (Ervynck, 1991; Kattouetal., 2013; Mann, 2005; Sriraman, 2009a).

Ωστόσο, η σύγχρονη έρευνα δεν έχει εξακριβώσει προς το παρόν την ακριβή σχέση μεταξύ της μαθηματικής ικανότητας και της μαθηματικής δημιουργικότητας, δηλαδή αν η μαθηματική ικανότητα είναι προαπαιτούμενο για τη μαθηματική δημιουργικότητα ή αν ισχύει το αντίστροφο.

Αναμφίβολα, ωστόσο, η μαθηματική γνώση (εφαρμογή και αξιοποίησή της) θεωρείται απαραίτητη προϋπόθεση για την υψηλή ακαδημαϊκή επίδοση στα Μαθηματικά (Kattouetal., 2013; Sriraman, 2008; Sriraman, Yaftian&Lee, 2011). Συνεπώς, η μαθηματική ικανότητα και η μαθηματική δημιουργικότητα συνδέονται άρρηκτα με τη μαθηματική γνώση (Mann, 2005).

Σπουδαίοι ερευνητές όπως ο Silver, ο Ervynck, ο Mann, η Leikin πιστεύουν ακράδαντα ότι η μαθηματική γνώση (γνώση των εννοιών, των θεωρημάτων, των αλγορίθμων και των στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων) είναι απαραίτητη προϋπόθεση της μαθηματικής δημιουργικότητας και ότι οι μαθητές μπορούν να βελτιώσουν σημαντικά την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων σε ένα διδακτικό περιβάλλον που καλλιεργεί τη μαθηματική δημιουργικότητα των μαθητών.

Από την άλλη πλευρά, άλλοι ερευνητές, όπως ο Haylock, οι Hong&Aqui, ο Pehkonen υποστηρίζουν το αντίθετο, δηλαδή ότι η συσσώρευση της μαθηματικής γνώσης, η μεγάλη εξοικείωση και η συνεχής επανάληψη των στρατηγικών και των τρόπων επίλυσης προβλημάτων μπορεί να αποτελέσουν ανασταλτικούς παράγοντες της ανάπτυξης του δημιουργικού δυναμικού, επειδή οι μαθητές εκπαιδεύονται να επιλύουν ένα πρόβλημα με τις στρατηγικές που έχουν διδαχθεί και εφαρμόζουν και δεν υπάρχει περιθώριο για την ανάπτυξη της φαντασίας τους και του πειραματισμού τους.

Οι συγκεκριμένοι ερευνητές υποστήριξαν ότι οι παραδοσιακές δοκιμασίες αξιολόγησης μετρούν μόνο την απομνημόνευση, την ακρίβεια και την ταχύτητα της απάντησης στους αλγορίθμους και στους τρόπους επίλυσης προβλημάτων που έχουν διδαχθεί. Στις

συγκεκριμένες δοκιμασίες δεν συμπεριλαμβάνονται δραστηριότητες που αξιολογούν τη δημιουργικότητα. Συνεπώς, είναι αναγκαία η κατασκευή και χρήση ενός σταθμισμένου εργαλείου αξιολόγησης της μαθηματικής δημιουργικότητας και αναγνώρισης των χαρισματικών μαθητών στα Μαθηματικά.

2.6 Αξιολόγηση της Μαθηματικής Δημιουργικότητας

2.6.1 Εισαγωγή

Η ανάπτυξη, η μελέτη και η αξιολόγηση της μαθηματικής δημιουργικότητας στο σχολείο πραγματοποιείται μέσα από πολλές και ποικίλες δοκιμασίες αποκλίνουσας και συγκλίνουσας σκέψης με την επίλυση προβλημάτων ανοιχτού τύπου και με την αντίστροφη διαδικασία στη διατύπωση προβλημάτων με προβλήματα άλγεβρας και γεωμετρίας (Kwonetal., 2006; Leikin, 2009; Leikinetal., 2009; Leikin&Pitta- Pantazi, 2013; Silver, 1997, 2013; Singeretal., 2011; Tabach&Friendlander, 2013; Voica&Singer, 2013).

Όλα τα εργαλεία ανάπτυξης και αξιολόγησης της μαθηματικής δημιουργικότητας αφορούν την υποκειμενική επιλογή των δραστηριοτήτων που οι ίδιοι οι ερευνητές ορίζουν ως δημιουργικές.

Κρίνεται, λοιπόν, επιτακτική η ανάγκη κατασκευής και χρήσης ενός επίσημου σταθμισμένου εργαλείου αξιολόγησης της μαθηματικής δημιουργικότητας.

Στη συνέχεια αναφέρονται τέσσερις συστηματικές προσπάθειες αξιολόγησης της μαθηματικής δημιουργικότητας.

2.6.2 Πλαίσιο αξιολόγησης της Μαθηματικής Δημιουργικότητας του Haylock

Ο Haylockπρότεινε ένα πλαίσιο αξιολόγησης της μαθηματικής δημιουργικότητας βασισμένος στη θεωρία του Torrance, του Guilford, του Poincare, του Hadard, του Balka.

Το πλαίσιο αξιολόγησης του Haylockστηρίχθηκε στις δύο βασικές πτυχές της μαθηματικής δημιουργικότητας:

- την ικανότητα υπέρβασης των τυποποιημένων τρόπων και στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων που ο μαθητής έχει διδαχθεί και έχει μάθει να εφαρμόζει δίνοντας λύσεις στο πρόβλημα.
- Την αποκλίνουσα σκέψη που μέσα από αυτή ο μαθητής θα δώσει πολλαπλές (ευχέρεια), διαφορετικές (ευελιξία) και καινοτόμες (πρωτοτυπία) λύσεις του προβλήματος.

2.6.3 Προβλήματα πολλαπλών λύσεων της Leikin (Multiple Solution Tasks)

Οι Leikin κ.α (2010) εξετάζοντας τη σχέση των δραστηριοτήτων πολλαπλών λύσεων με την ανάπτυξη της μαθηματικής δημιουργικότητας αναφέρουν ότι η τακτική χρήση τέτοιων δραστηριοτήτων αύξησε σημαντικά την ευχέρεια και την ευελιξία των μαθητών. Δεν βρέθηκαν, ωστόσο, σημαντικά αποτελέσματα που να δείχνουν ότι οι δραστηριότητες αυτές έχουν επίδραση στην τρίτη παράμετρο της δημιουργικότητας, την πρωτοτυπία.

Η δοκιμασία αυτή αξιολογεί όχι μόνο τη δημιουργική αποκλίνουσα σκέψη αλλά και τις τρεις ιδιότητες της δημιουργικότητας που προτάθηκαν από τον Torrance (ευχέρεια, ευελιξία, πρωτοτυπία).

Δίνεται στο μαθητή ένα πρόβλημα πολλαπλών λύσεων και εκείνος θα πρέπει να το λύσει με διαφορετικούς τρόπους χρησιμοποιώντας:

- διαφορετικούς ορισμούς ή αναπαραστάσεις μιας μαθηματικής έννοιας
- ιεραρχία, αντίληψη μίας ειδικής περίπτωσης ως μέρος μίας πιο γενικής
- διαφορετικά εργαλεία και θεωρήματα από μία συγκεκριμένη μαθηματική ενότητα
- μαθηματικά εργαλεία από διαφορετικούς κλάδους των μαθηματικών

Τα προβλήματα πολλαπλών λύσεων χρησιμοποιούνται είτε για την ανάπτυξη είτε για την αξιολόγηση μίας μαθηματικής έννοιας. Οι διάφορες λύσεις του ίδιου μαθηματικού προβλήματος αντανακλούν διαφορετικές όψεις μιας μαθηματικής έννοιας. Οι διαφορετικές αυτές όψεις είναι απαραίτητες για μία ολική κατανόηση και μάθηση της μαθηματικής έννοιας.

Οι δραστηριότητες με πολλαπλούς τρόπους επίλυσης μπορούν να χρησιμεύσουν :

- ως ένα εργαλείο αξιολόγησης της μαθηματικής γνώσης και της δημιουργικότητας
- για τη μέτρηση και παρακολούθηση της εξέλιξης της μαθηματικής γνώσης και δημιουργικότητας
- για τη σύγκριση της γνώσης και της δημιουργικότητας μεταξύ μαθητών με διαφορετικά επίπεδα μαθηματικής ικανότητας
- ως εργαλείο έρευνας για την επαλήθευση των θεωρητικών υποθέσεων, όπως οι σχέσεις μεταξύ της μαθηματικής γνώσης και της ευελιξίας ή μεταξύ της μαθηματικής δημιουργικότητας και του πρωτότυπου συλλογισμού.

Με τις δραστηριότητες αυτές οι μαθητές δεν καλούνται μόνο να βρουν και να διατυπώσουν όσο το δυνατόν περισσότερους τρόπους επίλυσης, αλλά να αναζητήσουν και να εφαρμόσουν τη βέλτιστη στρατηγική επίλυσης, τη στρατηγική με το μικρότερο κόστος.

Η ευχέρεια αξιολογείται με βάση το πλήθος των διαφορετικών τρόπων επίλυσης που εντόπισε ο μαθητής.

Η ευελιξία αξιολογείται με βάση την ταχύτητα επίλυσης και με βάση την ικανότητα του μαθητή να εναλλάσσεται μεταξύ διαφορετικών στρατηγικών, ιδίως όταν η δραστηριότητα προσφέρεται, ώστε οι στρατηγικές να ανήκουν σε διαφορετικές κατηγορίες

Η πρωτοτυπία έχει να κάνει με το αν ο μαθητής έχει αναπτύξει στρατηγικές του αντισυμβατικού χώρου λύσεων.

Σε πολλές έρευνες έχει χρησιμοποιηθεί η **μέθοδος προβλημάτων πολλαπλών λύσεων** που προτάθηκε από τη Leikin.

Ένα πρόβλημα πολλαπλών λύσεων (multiplesolutiontask), είναι ένα πρόβλημα το οποίο καλείται ο μαθητής να λύσει με πολλούς και διαφορετικούς τρόπους (Leikin, 2009). Βασιζόμενοι στην Leikin (2006), η διαφορά των λύσεων μπορεί να αντικατοπτρίζεται με τη χρήση:

- διαφορετικών απεικονίσεων μιας μαθηματικής έννοιας.
- διαφορετικών ιδιοτήτων (ορισμών ή θεωρημάτων) των μαθηματικών εννοιών από ένα ιδιαίτερο μαθηματικό θέμα.
- διαφορετικά μαθηματικά εργαλεία και θεωρήματα από διαφορετικούς κλάδους των μαθηματικών.

Η Leikin (2007) πρότεινε την έννοια των χώρων λύσεων που επιτρέπει στους ερευνητές να εξετάσουν τις διάφορες πτυχές της μαθηματικής δημιουργικότητας, κατά την επίλυση προβλημάτων με διαφορετικούς τρόπους. Είναι οι εξής κατηγορίες:

- i. Οι **εξειδικευμένοι χώροι λύσεων (*expertsolutionspaces*)** οι οποίοι περιλαμβάνουν ένα ολοκληρωμένο σύνολο λύσεων σε ένα πρόβλημα που είναι γνωστό σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Μπορούν επίσης να θεωρηθούν ως ένα σύνολο λύσεων που οι εμπειρογνώμονες μαθηματικοί μπορούν να προτείνουν στο πρόβλημα. Οι εξειδικευμένοι χώροι λύσεων χωρίζονται σε **συμβατικούς χώρους λύσεων (*conventional solution spaces*)**, οι οποίοι στο περιβάλλον των σχολικών μαθημάτων περιλαμβάνουν λύσεις οι οποίες συνιστώνται από το αναλυτικό πρόγραμμα, βρίσκονται στα σχολικά εγχειρίδια και διδάσκονται από τον εκπαιδευτικό, καθώς και τους **μη συμβατικούς χώρους λύσεων (*unconventional solution spaces*)**, οι οποίοι περιλαμβάνουν λύσεις οι οποίες δεν συνιστώνται από το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών.
- ii. Οι **ατομικοί χώροι λύσεων (*individual solution spaces*)** οι οποίοι είναι συλλογές λύσεων που παράγονται από ένα άτομο σε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα. Οι ατομικοί χώροι λύσεων χωρίζονται σε **προσωπικούς χώρους λύσεων (*available individual solution spaces*)**, οι οποίοι περιλαμβάνουν λύσεις οι οποίες μπορούν να παρουσιαστούν από ένα άτομο άμεσα, χωρίς κάποια βοήθεια, και τους **ενδεχόμενους χώρους λύσεων (*potentialsolutionspaces*)**, οι οποίοι περιλαμβάνουν λύσεις που μπορούν να δοθούν από ένα άτομο με την βοήθεια κάποιου άλλου. Οι λύσεις οι οποίες προέρχονται από τους ενδεχόμενους χώρους λύσεων αντιστοιχούν στην ζώνη επικείμενης ανάπτυξης (Zone of proximal development, ZPD) του Vygotsky (1978), όπου ZPD είναι η διαφορά ανάμεσα σε αυτό που από μόνο του ένα παιδί μπορεί να πετύχει κι αυτό που θα κατακτήσει αν το βοηθήσουν.
- iii. Οι **ομαδικοί χώροι λύσεων (*Collective solution spaces*)** είναι ένας συνδυασμός των λύσεων που παράγονται από μία ομάδα ατόμων. Οι χώροι ομαδικών λύσεων είναι συνήθως ευρύτεροι από τους ατομικούς χώρους λύσεων μέσα σε μια συγκεκριμένη κοινότητα και αποτελούν μία από τις κύριες πηγές για την ανάπτυξη ατομικών χώρων λύσης. Τόσο οι ατομικοί όσο και οι ομαδικοί χώροι λύσεων είναι υποσύνολα των εξειδικευμένων χώρων λύσεων.

Οι ομάδες (διαστήματα) λύσεων, μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως εργαλείο για τη διερεύνηση της μαθηματικής δημιουργικότητας των μαθητών. Συγκρίνοντας τα ατομικά και ομαδικά διαστήματα λύσεων των μαθητών από διαφορετικές ομάδες, εκτιμούμε τη μαθηματική γνώση και τη δημιουργικότητα των μαθητών (Leikin, 2009).

Στο σημείο αυτό, πάμε να δούμε ποιο είναι το σύστημα βαθμολόγησης για την αξιολόγηση της δημιουργικότητας μέσω προβλημάτων πολλαπλών λύσεων.

Με βάση τις διάφορες θεωρίες που συνδέουν την μαθηματική δημιουργικότητα με την επίλυση των μαθηματικών προβλημάτων με πολλούς τρόπους, οι Leikin και Lev (2007) εξέτασαν τις διαφορές στη δημιουργικότητα των ταλαντούχων και μη ταλαντούχων μαθητών στα μαθηματικά. Ανέπτυξαν ένα εργαλείο που περιελάμβανε ένα σύνολο μαθηματικών προβλημάτων και ένα σύστημα βαθμολόγησης για την αξιολόγηση των επιδόσεων των μαθητών σχετικά με την επίδοση σε προβλήματα πολλαπλών λύσεων. Εξέτασαν την πρωτοτυπία (originality) των λύσεων σύμφωνα με τη συμβατικότητα, τη διαθεσιμότητα και την επανάληψή τους. Η πρωτοτυπία των ατομικών λύσεων των μαθητών (που παράγονται χωρίς συμβουλές) βαθμολογήθηκε με 2,4 και 6 σύμφωνα με το επίπεδο της συμβατικότητας, ενώ οι λύσεις που παράχθηκαν με υποδείξεις έλαβαν βαθμολογίες 1,2 και 3. Η ευελιξία (flexibility) αξιολογήθηκε με τον αριθμό των μη επαναλαμβανόμενων λύσεων στους ενδεχόμενους και στους επιμέρους ατομικούς χώρους λύσης. Η ευχέρεια (fluency) αξιολογήθηκε σε σχέση με το χρόνο που αφιέρωσαν οι μαθητές για να παράγουν τις λύσεις. Χρησιμοποιώντας αυτό το μοντέλο απέδειξαν ότι η δημιουργικότητα των ταλαντούχων μαθητών ήταν υψηλότερη από εκείνη των μέσων μαθητών σε κάθε είδος εργασίας.

Οι Leikin και Lev (2007) έθεσαν στην μελέτη τους τις ακόλουθες υποθέσεις ως αναγκαίες για περαιτέρω εξέταση:

- i. Η δημιουργικότητα των μαθητών που σχετίζεται με την επίλυση προβλημάτων πολλαπλών λύσεων μπορεί να διαμορφωθεί ως συνδυασμός ευχέρειας, ευελιξίας και πρωτοτυπίας.
- ii. Η αξιολόγηση της μαθηματικής δημιουργικότητας χρησιμοποιώντας έργα πολλαπλών λύσεων εξαρτάται από αυτά τα έργα.

Στη συνέχεια ανακάλυψαν κάποια προβλήματα του μοντέλου που έπρεπε να επιλυθούν, το πώς ενσωματώνεται η δημιουργικότητα σε αυτά τα έργα, αλλά και κάποιους περιορισμούς στο σύστημα βαθμολόγησης που εφάρμοσαν. Κατά την αξιολόγηση της δημιουργικότητας χρησιμοποιώντας τα στοιχεία πρωτοτυπίας, ευχέρειας και ευελιξίας και το σχήμα βαθμολόγησης που παρουσιάστηκε παραπάνω δεν ήταν δυνατή η αναπαραγωγή των λεπτομερειών αυτών των στοιχείων με βάση την τελική βαθμολογία που πέτυχαν οι μαθητές. Ο στόχος τους ήταν να αναπτυχθεί ένα σύστημα βαθμολόγησης που θα επέτρεπε την ανάλυση της απόδοσης των μαθητών ποιοτικά, με βάση τις βαθμολογίες τους. Συνειδητοποίησαν επιπλέον ότι πρέπει να δημιουργήσουν ακριβέστερους ορισμούς, όσον αφορά τη μεταβλητή της ευελιξίας.

Η Leikin (2009) παρουσίασε ένα εκλεπτυσμένο μοντέλο για την αξιολόγηση της δημιουργικότητας χρησιμοποιώντας προβλήματα πολλαπλών λύσεων. Αυτό το μοντέλο καθιστά δυνατή όχι μόνο την αξιολόγηση της προσωπικής μαθηματικής δημιουργικότητας των μαθητών αλλά και την εκτίμηση της αποτελεσματικότητας των προβλημάτων πολλαπλών λύσεων στην αξιολόγηση της δημιουργικότητας. Το μοντέλο περιέχει λειτουργικούς ορισμούς και ένα αντίστοιχο σύστημα βαθμολόγησης για την αξιολόγηση της δημιουργικότητας με βάση τρεις διαστάσεις (πρωτοτυπία, ευχέρεια και ευελιξία), όπως τις πρότεινε ο Torrance. Για να αξιολογηθεί η πρωτοτυπία, χρησιμοποιεί τα επίπεδα διορατικότητας του Enyngs (1991) σε συνδυασμό με τη συμβατικότητα των λύσεων.

Η δημιουργικότητα μπορεί να αξιολογηθεί για μεμονωμένα άτομα και ομάδες ατόμων για τα ίδια έργα. Το μοντέλο διακρίνει διάφορους τύπους χώρων, που βασίζονται στην κατάσταση επίλυσης προβλημάτων (προφορική συνέντευξη ή γραπτή εξέταση) και στο μέγεθος και τη φύση μιας ομάδας. Αυτές οι διαφορές επηρεάζουν την αξιολόγηση της πρωτοτυπίας, της ευχέρειας και της ευελιξίας σε λειτουργικό επίπεδο.

Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζονται αυτές οι διακρίσεις:

Κατάσταση		Εστίαση στο χώρο λύσης	Χώρος λύσης αναφοράς για την αξιολόγηση της πρωτοτυπίας	
Το έργο (Ανεξάρτητα από το θέμα)	Εξειδικευμένη			
Προφορικά (Συνέντευξη)	Ατομικά	Ατομικοί	Διαθέσιμοι & Ενδεχόμενοι	Εξειδικευμένοι
	Σε ομάδες	Ομαδικοί		
Γραπτά (Τεστ)	Μικρές ομάδες (≤10)	Ατομικοί	Διαθέσιμοι	
	Μεγάλες ομάδες (≥10)	(α) Ατομικοί (β) Ομαδικοί		

Η δημιουργικότητα που ενσωματώνεται σε ένα έργο αξιολογείται με βάση τους εξειδικευμένους χώρους λύσεων του. Αντίθετα, σε σχετικά μεγάλες ομάδες ($n > 10$) συμμετεχόντων που έχουν ένα κοινό εκπαιδευτικό ιστορικό (ομάδες αναφοράς) η πρωτοτυπία εξετάζεται με βάση τη συχνότητα μιας λύσης στους χώρους ομαδικών λύσεων. Κατά τη σύγκριση διαφορετικών ομάδων ατόμων αξιολογούμε και συγκρίνουμε τους χώρους ομαδικών λύσεων των ομάδων.

Πρωτοτυπία (Originality)

Κατά την αξιολόγηση της πρωτοτυπίας (Or) γίνεται διάκριση μεταξύ προφορικών ή γραπτών περιβαλλόντων και μεταξύ μικρών ή μεγάλων ομάδων ως εξής:

- ο Για ένα πρόβλημα πολλαπλών λύσεων ή έναν μεμονωμένο μαθητή σε μια μικρή ομάδα ($1 \leq g < 10$, g είναι ο αριθμός των μαθητών σε μια ομάδα) με παρόμοιο ιστορικό μάθησης, βαθμολογείται η πρωτοτυπία μιας λύσης βασισμένη στη συμβατικότητα της και το επίπεδο γνώσης, και η συμβατότητα της λύσης σύμφωνα με το ιστορικό εκμάθησης των συμμετεχόντων (απόλυτη αξιολόγηση):
 - i. $Or_i = 10$, για μία λύση βασισμένη στη διορατικότητα (insight-based solution) ή για μία μη συμβατική λύση.

- ii. $Or_i = 1$, για μία λύση που είναι εν μέρει αντισυμβατική (που αποκτάται σε διαφορετικό πλαίσιο).
 - iii. $Or_i = 0.1$, για μία λύση βασισμένη σε αλγόριθμο ή συμβατική λύση.
- Σε μία μεγάλη ομάδα μαθητών ($g \geq 10$) με κοινό εκπαιδευτικό υπόβαθρο αξιολογείται η πρωτοτυπία με τη σύγκριση των επιμέρους χώρων λύσεων με το χώρο συλλογικής λύσης της ομάδας αναφοράς. Αν P είναι το ποσοστό των μαθητών της ομάδας που παράγει μια συγκεκριμένη λύση, τότε (σχετική αξιολόγηση):
 - i. $Or_i = 10$, όταν $P < 15\%$.
 - ii. $Or_i = 1$, όταν $15\% \leq P < 40\%$.
 - iii. $Or_i = 0.1$, όταν $P \geq 40\%$.
 - Ο συνολικός βαθμός πρωτοτυπίας ενός μαθητή για ένα πρόβλημα είναι το άθροισμα της πρωτοτυπίας του μαθητή στις λύσεις του ατομικού χώρου λύσεών του. Η συνολική πρωτοτυπία που ενσωματώνεται σε ένα πρόβλημα είναι το άθροισμα των βαθμολογιών πρωτοτυπίας όλων των λύσεων στο χώρο των εξειδικευμένων λύσεων.
 - $Or_r = \sum_{i=1}^n Or_i$, όπου n ο αριθμός των κατάλληλων λύσεων στον αντίστοιχο χώρο.

Ευχέρεια (Fluency)

Η ευχέρεια (N) αναφέρεται στον ρυθμό με τον οποίο προχωρά η επίλυση, καθώς και στις εναλλαγές που γίνονται μεταξύ των διαφορετικών λύσεων:

- Η ευχέρεια, εξετάζοντας τα έργα πολλαπλών λύσεων, αναφέρεται στον αριθμό των λύσεων που παράγει ο λύτης.
- Η ευχέρεια ενός μαθητή σε μια γραπτή δοκιμασία ανιχνεύεται από τον αριθμό των λύσεων στο χώρο των ατομικών λύσεων.
- Η ευχέρεια ενός μαθητή σε μια ατομική συνέντευξη είναι ο αριθμός των κατάλληλων λύσεων στο χώρο ατομικών λύσεων που παράγεται μέσα σε μια μονάδα χρόνου.

Ευελιξία (Flexibility)

Για την αξιολόγηση της ευελιξίας (Flx) δημιουργήθηκαν οι ομάδες λύσεων για προβλήματα πολλαπλών λύσεων. Δύο λύσεις ανήκουν σε ξεχωριστές ομάδες λύσεων, αν χρησιμοποιούν στρατηγικές επίλυσης βασισμένες σε διαφορετικές αναπαραστάσεις, σε διαφορετικές ιδιότητες (θεωρήματα, ορισμοί ή βοηθητικές κατασκευές), καθώς και σε διαφορετικούς κλάδους μαθηματικών.

- Η ευελιξία που ενσωματώνεται σε ένα πρόβλημα πολλαπλών λύσεων αξιολογείται βάσει των ομάδων λύσεων στο χώρο των εξειδικευμένων λύσεων.
- Κατά την επίλυση ενός προβλήματος πολλαπλών λύσεων από το μαθητή η ευελιξία αξιολογείται με βάση τις λύσεις του μέσα στον ατομικό χώρο λύσεων. Όσον αφορά τους αντίστοιχους χώρους λύσης, οι Leikin και Len αξιολογούν την ευελιξία ως εξής:
 - i. $Flx_1 = 10$, για την πρώτη κατάλληλη λύση
 - ii. $Flx_i = 10$, αν ανήκει σε μια ομάδα διαφορετικών λύσεων από τις (την) προηγούμενες (προηγούμενη)
 - iii. $Flx_i = 1$, αν η λύση ανήκει σε μία από τις ομάδες που χρησιμοποιήθηκαν προηγουμένως αλλά έχει μια σαφή μικρή διάκριση
 - iv. $Flx_i = 0.1$, αν η λύση είναι σχεδόν πανομοιότυπη με προηγούμενες λύσεις.
- Η συνολική βαθμολογία ευελιξίας ενός μαθητή για ένα πρόβλημα είναι το άθροισμα της ευελιξίας του στις λύσεις του ατομικού χώρου λύσης του μαθητή. Η συνολική ευελιξία που ενσωματώνεται σε ένα έργο είναι το άθροισμα των βαθμών ευελιξίας όλων των λύσεων στον εξειδικευμένο χώρο λύσεων.

Δημιουργικότητα (Creativity)

Η δημιουργικότητα (Cr) μιας συγκεκριμένης λύσης είναι το προϊόν της πρωτοτυπίας και της ευελιξίας της λύσης:

$$Cr_i = Flx_i * Or_i$$

Το συνολικό σκορ δημιουργικότητας σε ένα πρόβλημα πολλαπλών λύσεων είναι το άθροισμα των βαθμών δημιουργικότητας σε κάθε λύση στο χώρο του προβλήματος ενός ατόμου:

$$C_r = \sum_{i=1}^n Flx_i * Or_i$$

Τέλος, ο ρυθμός παραγωγής της λύσης και η ορθότητά της αντικατοπτρίζονται στην βαθμολογία της ευχέρειας.

Ακολουθεί ο πίνακας που έχει συνοπτικά τα παραπάνω

	Ευχέρεια	Ευελιξία	Πρωτοτυπία	Δημιουργικότητα
Σκορ για κάθε λύση	1	○ $Flx_1 = 10$, για την πρώτη λύση ○ $Flx_i = 10$, λύσεις από διαφορετική ομάδα στρατηγικών ○ $Flx_i = 1$, παρόμοια στρατηγική αλλά διαφορετική αναπαράσταση ○ $Flx_i = 0.1$, ίδια στρατηγική, ίδια αναπαράσταση	○ $Or_i = 10$, $P < 15\%$ ή για διορατικότητα/ συμβατική λύση ○ $Or_i = 1$, $15\% \leq P < 40\%$ ή για μοντέλο βασισμένο/μερικώς σε αντισυμβατική ή λύση ○ $Or_i = 0,1$ ή για βασισμένο σε συμβατική λύση	$Flx_i * Or_i$
Συνολική βαθμολογία	n	$Flx = \sum_{i=1}^n Flx_i$	$Or = \sum_{i=1}^n Or_i$	$\sum_{i=1}^n Flx_i * Or_i$

n είναι ο συνολικός αριθμός των κατάλληλων λύσεων

$P = (m_j / n) \cdot 100\%$ όπου m_j ο αριθμός των μαθητών που χρησιμοποίησαν τη στρατηγική

Βασιζόμενοι στα παραπάνω, οι Roza Leikin και Yona Kloss (2011) πραγματοποίησαν μία έρευνα με στόχο να μελετήσουν τη μαθηματική δημιουργικότητα των μαθητών της 8^{ης} και 10^{ης} τάξης. Τα προβλήματα που χρησιμοποίησαν ήταν τα εξής:

Πρόβλημα 1

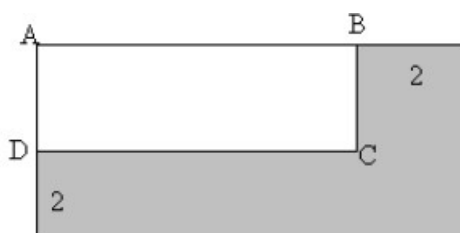
Σύστημα εξισώσεων:
$$\begin{cases} 3x + 4y = 14 \\ 4y + 3x = 14 \end{cases}$$

Πρόβλημα 2

Η Μάλι παράγει μια μαρμελάδα φράουλας για καταστήματα τροφίμων. Χρησιμοποιεί μεγάλα δοχεία για να διανέμει στα καταστήματα τη μαρμελάδα. Αρχικά ισομοίρασε 80 λίτρα μαρμελάδα στα δοχεία. Αποφάσισε να κρατήσει τα 4 δοχεία και μοίρασε την μαρμελάδα από αυτά τα δοχεία σε άλλα δοχεία. Συνειδητοποίησε ότι πρόσθεσε σε κάθε ένα δοχείο ακριβώς το $\frac{1}{4}$ της προηγούμενης ποσότητας. Πόσα δοχεία είχε ετοιμάσει στην αρχή;

Πρόβλημα 3

Όταν οι πλευρές του ορθογωνίου ΑΒΓΔ μεγεθύνθηκαν κατά 2 εκατοστά, το εμβαδόν του μεγάλωσε κατά 24 cm^2 . Να βρείτε την περίμετρο του ΑΒΓΔ.



Πρόβλημα 4

Δίνεται ότι: $\alpha + b = 1$, $\alpha > b$,

Ποιο είναι μεγαλύτερο από τα: $\alpha^2 + \beta$ και $b^2 + \alpha$; (Maison 2010)

Το τεστ είχε προβλήματα και από την ύλη της 8^{ης} τάξης (πριν το τεστ) επομένως τα προβλήματα για τους μαθητές της 10^{ης} τάξης τα προβλήματα ήταν επιλύσιμα. Τα προβλήματα ήταν από διαφορετικές ενότητες των μαθηματικών.

Το 1^ο πρόβλημα είχε σύστημα γραμμικών εξισώσεων, το 2^ο και το 3^ο πρόβλημα ήταν προβλήματα διατυπωμένα με λέξεις. Το 2^ο πρόβλημα ήταν πρόβλημα που επιλύεται με εξισώσεις με κλάσματα και το 3^ο ήταν πρόβλημα που μπορεί να επιλυθεί με γραμμική εξίσωση. Το 4^ο πρόβλημα, περιείχε αλγεβρικές εκφράσεις που απαιτούνται κάποιες αλγεβρικές πράξεις για να επιλυθεί.

Προφανώς, τα προβλήματα αυτά έχουν και άλλους τρόπους λύσης.

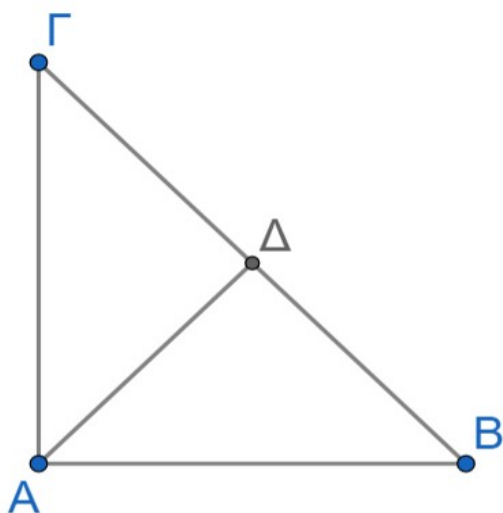
Οι Γρίδος, Γαγάτσης κ.α (2019) πραγματοποίησαν μία έρευνα με στόχο να ερευνήσουν τη μαθηματική δημιουργικότητα μαθητών μέσα από προβλήματα πολλαπλών λύσεων λαμβάνοντας υπ' όψιν το ρόλο του γεωμετρικού σχήματος.

Στη συγκεκριμένη έρευνα έλαβαν μέρος συνολικά 149 μαθητές (77 αγόρια και 72 κορίτσια)

Οι 147 μαθητές συμπλήρωσαν το τεστ σε συνθήκες τάξης και με τους άλλους δύο μαθητές έγινε μια συζήτηση σχετικά με τις λύσεις του τεστ. Το τεστ αποτελείτο από τέσσερα προβλήματα γεωμετρίας τα οποία τέθηκαν και εγκρίθηκαν από δύο μαθηματικούς της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και δύο καθηγητές πανεπιστημίου. Από τους μαθητές ζητήθηκε ρητά να λύσουν τα προβλήματα με όσο το δυνατόν περισσότερους τρόπους μπορούν. Τα προβλήματα 1 και 3 συνοδεύονταν από τα αντίστοιχα σχήματα, ενώ τα προβλήματα 2 και 4 δόθηκαν μόνο με την εκφώνηση. Η διάρκεια του τεστ ήταν 110 λεπτά. Τα προβλήματα της γραπτής δοκιμασίας ήταν τα εξής:

Πρόβλημα 1

Αποδείξτε , με όσους περισσότερους τρόπους μπορείτε, ότι η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου τέμνει στο μέσον την υποτείνουσα.

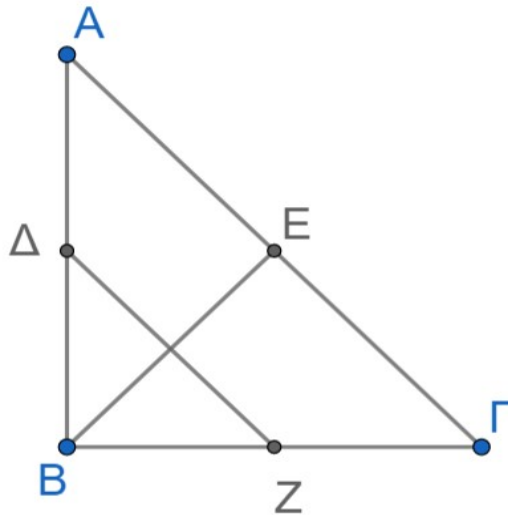


Πρόβλημα 2

AB είναι η διάμετρος ενός κύκλου με κέντρο το σημείο O. Δ και E είναι δύο σημεία του κύκλου τέτοια ώστε $\Delta O \parallel EB$. Το σημείο Γ είναι το σημείο τομής των AΔ και BE. Αποδείξτε με όσους περισσότερους τρόπους μπορείτε ότι $\Gamma B = AB$.

Πρόβλημα 3

Έστω ένα ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ($\hat{B} = 90^\circ$), Δ είναι το μέσον της πλευράς AB, E το μέσο της πλευράς AΓ και Z μέσον της πλευράς BΓ. Αποδείξτε με όσους περισσότερους τρόπους μπορείτε ότι $\Delta Z = EB$.



Πρόβλημα 4

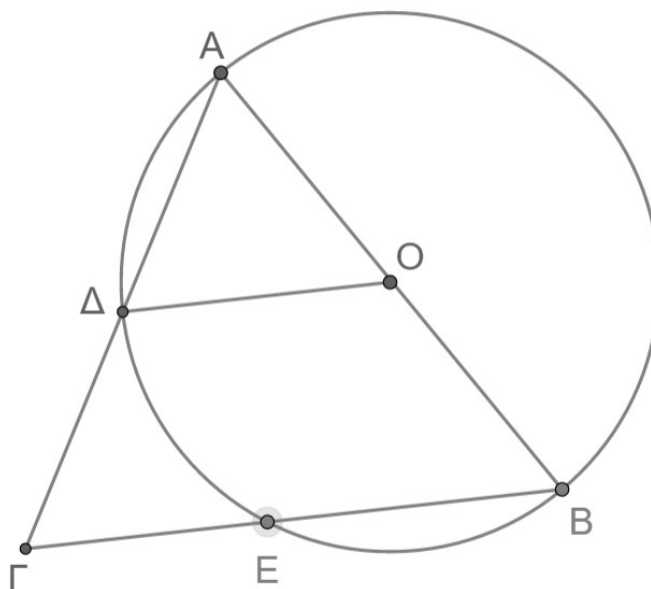
Βρείτε το κέντρο ενός κύκλου με όσους περισσότερους τρόπους μπορείτε, εάν γνωρίζετε μόνο την περιφέρειά του.

Οι λύσεις των μαθητών ταξινομήθηκαν σύμφωνα με τη στρατηγική που ακολούθησαν. Στη συνέχεια, οι πτυχές της δημιουργικότητας (ευελιξία- ευχέρεια- πρωτοτυπία- συνολική δημιουργικότητα) υπολογίστηκαν σύμφωνα με τη μέθοδο που πρότεινε η Leikin (2009) και αναλύθηκε πιο πάνω.

Σε άλλη έρευνα των Leikin και AnatLevan- Waynberg (2009) , με στόχο να ερευνήσουν τα προβλήματα πολλαπλών λύσεων ως εργαλείο ανάπτυξης της μαθηματικής σκέψης και δημιουργικότητας στη γεωμετρία, δόθηκε τεστ με ενδεικτικό πρόβλημα το παρακάτω:

Πρόβλημα

AB είναι η διάμετρος ενός κύκλου με κέντρο το σημείο O. Δ και E είναι σημεία του κύκλου έτσι ώστε $\Delta O \parallel EB$. Το σημείο Γ είναι το σημείο τομής των AD και BE (βλ. σχήμα). Να αποδείξετε με όσους περισσότερους τρόπους μπορείτε ότι $\Gamma B = AB$.



2.6.4 Δραστηριότητες τανγκραμ 5 σταδίων του Van Hiele

Σύμφωνα με τον Van Hiele (1959,1999) πέντε είναι οι φάσεις που θα διερευνήσουν τη δημιουργική σκέψη του μαθητή.

Οι φάσεις αυτές είναι:

- η διερεύνηση του μαθηματικού προβλήματος
- ο καθοδηγούμενος προσανατολισμός της επίλυσης του προβλήματος
- η επεξεργασία της προϋπάρχουσας γνώσης στη γεωμετρία και στη δόμηση των σχημάτων
- η επιλογή ενός διαφορετικού τρόπου δόμησης
- η σύνθεση

Η συγκεκριμένη προσπάθεια αξιολόγησης της μαθηματικής δημιουργικότητας στηρίζεται στην πρωτοτυπία, την ευχέρεια, τη συγκλίνουσα σκέψη.

Σε έρευνά τους οι ECahyanita, SSunardi, EYudianto, NRAini, andHTWijaya (2021) προσπάθησαν να αξιολογήσουν τη μαθηματική δημιουργικότητα μαθητών με χρήση τανγκραμ , αλλά και να μελετήσουν εάν αυτός ο τρόπος αξιολόγησης είναι επαρκής.

Η έρευνα αυτή χρησιμοποίησε ένα μοντέλο που αποτελείται από τον καθορισμό, το σχεδιασμό, την ανάπτυξη και τη διάδοση του τεστ γεωμετρίας βασισμένο στα ταγκραμ. Αυτή η έρευνα είχε σκοπό να περιγράψει τη διαδικασία ανάπτυξης ενός τέτοιου τεστ. Η ανάπτυξη δοκιμών περιελάμβανε επικύρωση από ειδικούς. Το παραγόμενο τεστ έλαβε βαθμολογία 4,47 (σε κλίμακα 1-5), οπότε ήταν εφικτό να χρησιμοποιηθεί. Τα ερευνητικά δοκιμαστικά θέματα ήταν 3 στους 30 μαθητές που επιλέχθηκαν με βάση τα επίπεδα VanHiele. Δεδομένα για το δημιουργικό προφίλ των μαθητών αποκτήθηκαν μέσα από τεστ και συνεντεύξεις. Η ευελιξία, η πρωτοτυπία, η ευχέρεια και η επεξεργασία είναι οι πτυχές της δημιουργικής σκέψης. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι στην επίλυση τεστ γεωμετρίας βασισμένο στο τανγκραμ, ένας μαθητής στο δημιουργικό επίπεδο (επίπεδο 3) ικανοποίησε όλες τις πτυχές της δημιουργικής σκέψης, ένας αρκετά δημιουργικός μαθητής (επίπεδο 2) είχε ικανοποιητικό τον δείκτη της ευχέρειας και της ευελιξίας και ο σχεδόν μη δημιουργικός μαθητής (επίπεδο 1) είχε σε ικανοποιητικά επίπεδα μόνο την ευχέρεια.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα, φάνηκε ότι το τεστ γεωμετρίας βασισμένο στο τανγκραμ ήταν έγκυρο, εφικτό και αποτελεσματικό για τη μέτρηση της δημιουργικής σκέψης των μαθητών.

Η έρευνα αυτή πραγματοποιήθηκε το ακαδημαϊκό έτος 2020- 2021. Ο κύκλος εξέλιξης αυτού του τεστ χωρίστηκε σε τέσσερις φάσεις:

- i. ορισμός
- ii. σχεδιασμός
- iii. ανάπτυξη
- iv. διαμοιρασμός

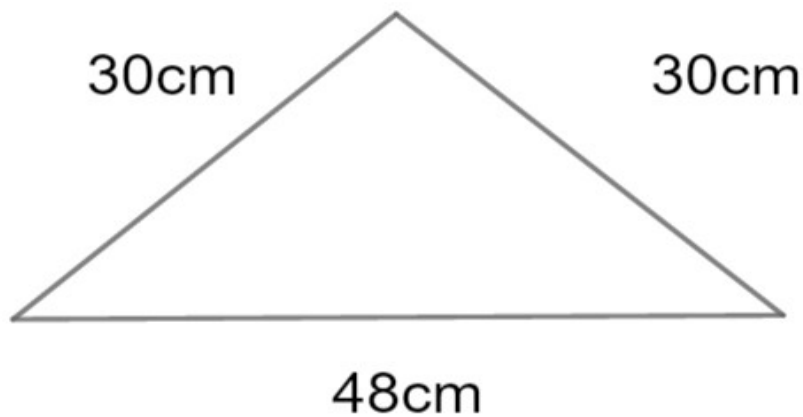
Οι πτυχές της δημιουργικής σκέψης που εμπλέκονται είναι η ευχέρεια, η πρωτοτυπία, η ευελιξία και η επεξεργασία. Υπάρχουν πέντε ταξινομήσεις ικανοτήτων δημιουργικής σκέψης που αποτελούνται από τα επίπεδα 0, 1, 2, 3 και 4, όπως φαίνεται και στον παρακάτω πίνακα. Το επίπεδο 4 είναι το υψηλότερο και το επίπεδο 0 είναι το χαμηλότερο επίπεδο δημιουργικής σκέψης. Κάθε επίπεδο δημιουργικής σκέψης έχει τα δικά του χαρακτηριστικά που πρέπει να αξιολογηθούν και να αναφέρονται στο επίπεδο δημιουργικής σκέψης των μαθητών. Τα κριτήρια φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

Επίπεδο δημιουργικής σκέψης	Κριτήρια
Επίπεδο 4 (πολύ δημιουργικός)	Ο μαθητής επιτυγχάνει όλες τις πτυχές της δημιουργικής σκέψης. Ο μαθητής μπορεί να απαντήσει εύκολα σε ένα πρόβλημα με περισσότερες από τρεις πιθανές λύσεις (ευχέρεια), να ανακαλύψει νέες ή μοναδικές λύσεις (πρωτοτυπία), να βρει πολλούς τρόπους επίλυσης ενός προβλήματος (ευελιξία), να απαντήσει συστηματικά και λεπτομερώς (επεξεργασία).
Επίπεδο 3 (Δημιουργικός)	Ο μαθητής επιτυγχάνει τρεις ή όλες τις πτυχές της δημιουργικής σκέψης και βρίσκει τρεις μοναδικές πιθανές απαντήσεις (πρωτοτυπία) με διαφορετικούς τρόπους (ευελιξία) εύκολα (ευφράδεια).
Επίπεδο 2 (Αρκετά δημιουργικός)	Ο μαθητής επιτυγχάνει δύο πτυχές της δημιουργικής σκέψης και δίνει δύο πιθανές απαντήσεις με ευελιξία και ευχέρεια.
Επίπεδο 1 (Σχεδόν καθόλου δημιουργικός)	Ο μαθητής επιτυγχάνει μια πτυχή της δημιουργικής σκέψης, βγάζει μια απάντηση και ερμηνεύει την απάντησή του με ευχέρεια (ευφράδεια)
Επίπεδο 0 (Όχι δημιουργικός)	Ο μαθητής δεν επιτυγχάνει καμία από τις πτυχές της δημιουργικής σκέψης. Δε δίνει καμία πιθανή απάντηση.

Ακολουθεί τεστ γεωμετρίας με χρήση τανγκραμ

Άσκηση

- 1) Φτιάξτε όσα περισσότερα σχήματα μπορείτε όπως τετράγωνα, ορθογώνια, τρίγωνα, ευθείες διατεταγμένα χρησιμοποιώντας κομμάτια του τανγκραμ.
- 2) Η Έλεν βλέπει τον Τσαρις να παίζει τανγκραμ. Η Έλεν θέλει να φτιάξει ένα τανγκραμ με ένα τριγωνικό πλαίσιο που αποτελείται από επίπεδα σχήματα από πολύχρομο χαρτί. Δώσε το μέγεθος του κάθε σχήματος και υπολόγισε το εμβαδόν του κάθε χρωματισμένου χαρτιού που χρησιμοποιήθηκε.



Προφίλ της δημιουργικής ικανότητας των μαθητών

Το δοκιμαστικό τεστ έγινε σε μαθητές της 7^{ης} τάξης οι οποίοι επιλέχθηκαν μετά το τεστ του Van Hiele. Τα δεδομένα συλλέχθηκαν με τη χρήση γραπτών τεστ και συνεντεύξεων.

Στη συνέχεια τα δεδομένα αναλύθηκαν ποιοτικά με την παρατήρηση των αποτελεσμάτων του τεστ και στη συνέχεια έγινε επιβεβαίωση των αποτελεσμάτων μέσω συνέντευξης στους συμμετέχοντες για την επιβεβαίωση της εγκυρότητας των αποτελεσμάτων.

Οι απαντήσεις των μαθητών αξιολογήθηκαν ανάλογα με τις οδηγίες αξιολόγησης και στη συνέχεια υπολογίστηκαν οι βαθμολογίες των μαθητών.

Μετά τη λήψη των βαθμολογιών, το επίπεδό τους προσδιορίστηκε με τον ακόλουθο τύπο:

$$NP = \frac{R}{SM} * 100$$

Όπου NP είναι η ποσοστιαία τιμή της βαθμολογίας ικανότητας δημιουργικής σκέψης του μαθητή που λαμβάνεται από την καθαρή βαθμολογία η οποία στη συνέχεια διαιρείται με τη μέγιστη βαθμολογία του συνόλου των ερωτήσεων SM.

Οι βαθμολογίες ταξινομούνται όπως φαίνεται παρακάτω:

NP	Κατηγορία επιπέδου δημιουργικής σκέψης
80<NP≤100	Πολύ δημιουργικό
60<NP≤80	Δημιουργικό
40<NP≤60	Αρκετά δημιουργικό
20<NP≤40	Σχεδόν καθόλου δημιουργικό
0<NP≤20	Όχι δημιουργικό

Στη συνέχεια, οι ερωτήσεις του γραπτού τεστ αναλύθηκαν για να ελεγχθεί η ορθότητα των απαντήσεων και να διαπιστωθεί ποιες πτυχές της δημιουργικότητας αναπτύχθηκαν.

Η θεωρία του Van Hiele

Οι σύγχρονες έρευνες στο χώρο της διδακτικής της γεωμετρίας χρησιμοποιούν ως εργαλείο ανάλυσης των παρατηρήσεών τους τη θεωρία των γεωμετρικών επιπέδων σκέψης του Van Hiele. Ο Van Hiele κατατάσσει τους μαθητές σε πέντε επίπεδα, ανάλογα με τις γνώσεις τους στη Γεωμετρία.

Τα πέντε επίπεδα γεωμετρικής σκέψης, όπως τα περιγράφει ο Van Hiele στο βιβλίο του «Structures and insight» (1986) είναι τα εξής:

- **Πρώτο Επίπεδο (1) (ή βασικό επίπεδο): Αναγνώριση (Visualization).** Αρχικά, οι μαθητές αναγνωρίζουν τα σχήματα και τις άλλες γεωμετρικές διαμορφώσεις, σύμφωνα με την εμφάνισή τους. Αναγνωρίζουν τα σχήματα ως οπτικές μορφές και γνωστικά είναι σε θέση να τα παρομοιάσουν με οπτικές εικόνες. Αναλυτικότερα, στον προσδιορισμό των σχημάτων συχνά χρησιμοποιούν οπτικά πρότυπα όπως: «το σχήμα είναι ορθογώνιο γιατί μοιάζει με πόρτα». Ωστόσο, δεν γνωρίζουν τα γεωμετρικά στοιχεία ή τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα της κατηγορίας του σχήματος στο οποίο αναφέρονται. Δηλαδή, αν και τα σχήματα καθορίζονται από τα στοιχεία τους, οι μαθητές αυτού του επιπέδου δεν έχουν γνώση των στοιχείων. Τα παιδιά σε αυτό το επίπεδο λειτουργούν με βάση τις αισθήσεις. Για παράδειγμα, μπορεί να διαχωρίζουν ένα σχήμα από ένα άλλο, χωρίς να είναι σε θέση να ονομάσουν έστω ένα στοιχείο σε ένα από τα δύο σχήματα, ή να κρίνουν ότι δύο σχήματα είναι ίδια, απλά γιατί μοιάζουν. Κατά τη διάρκεια της μετάβασης των παιδιών από το πρώτο στο δεύτερο επίπεδο, οι κατηγορίες των οπτικών αντικειμένων/σχημάτων αρχίζουν να συνδέονται με τα στοιχεία και τα χαρακτηριστικά τους γνωρίσματα (Clements & Battista, 1992, p. 427)
- **Δεύτερο Επίπεδο (2): Περιγραφική/ Ανάλυση:** Από τη στιγμή που τα παιδιά αρχίζουν να αναγνωρίζουν και να χαρακτηρίζουν τα γεωμετρικά σχήματα με βάση τα στοιχεία τους, βρίσκονται στο δεύτερο επίπεδο. Οι μαθητές βλέπουν τα σχήματα σαν ολότητες, αλλά τώρα πια σαν μια ολότητα που εμπεριέχει μια συλλογή στοιχείων και όχι σαν οπτικές μορφές. Τα στοιχεία των σχημάτων αρχίζουν να εδραιώνονται με την παρατήρηση, τη μέτρηση, το σχεδιασμό και τη διαμόρφωση. Ανακαλύπτουν ότι μερικοί συνδυασμοί στοιχείων προσδιορίζουν μια κατηγορία σχημάτων, ενώ μερικοί άλλοι όχι. Ωστόσο, τα παιδιά που βρίσκονται σε αυτό το επίπεδο δεν είναι σε θέση να αντιληφθούν τις σχέσεις μεταξύ των κατηγοριών και των σχημάτων.

- Τρίτο Επίπεδο (3): Άτυπη αφαίρεση ή Διάταξη – Ταξινόμηση. Οι μαθητές που έχουν φτάσει σε αυτό το επίπεδο, μπορούν να διαμορφώσουν αφηρημένους ορισμούς, να κάνουν διαχωρισμό ανάμεσα στο σύνολο των απαραίτητων και των ικανοποιητικών συνθηκών για μια έννοια, να κατανοήσουν και μερικές φορές, ακόμη και να προβάλλουν λογικά επιχειρήματα που αφορούν σε μία γεωμετρική ενότητα. Επίσης, μπορούν να ταξινομήσουν τα σχήματα ιεραρχικά (ανάλογα με τα στοιχεία τους) και να δώσουν άτυπα επιχειρήματα για να δικαιολογήσουν τις ταξινομήσεις τους.
- Τέταρτο πεδίο (4): Τυπική Αφαίρεση (Γενίκευση- Επαγωγή). Όταν οι μαθητές φτάσουν σε αυτό το στάδιο καθιερώνουν τα θεωρήματα μέσα σε ένα αξιωματικό σύστημα. Είναι πια σε θέση να αναγνωρίσουν τις διαφορές ανάμεσα σε απροσδιόριστους όρους, ορισμούς, αξιώματα και θεωρήματα (Clements&Barttista, 1992, p.428).
- Πέμπτο Επίπεδο (5): Αυστηρότητα. Στο τελευταίο επίπεδο οι μαθητές κατανοούν τη σπουδαιότητα της ακρίβειας στη διατύπωση Γεωμετρικών θεωριών και είναι σε θέση να αναλύσουν επαγωγικά συστήματα.

Χαρακτηριστικά του μοντέλου van Hiele

- **Η διαδοχικότητα των επιπέδων.** Τα επίπεδα είναι διαδοχικά και οι μαθητές θα πρέπει να κινηθούν μέσα σε αυτά ακολουθώντας τη σειρά με την οποία περιγράφονται. Αυτό σημαίνει ότι αν ένας μαθητής έχει κατακτήσει το ένα επίπεδο, τότε μόνο είναι δυνατό να προχωρήσει στο επόμενο
- **Η πρόοδος από το ένα επίπεδο στο άλλο εξαρτάται περισσότερο από τη διδασκαλία και λιγότερο από την ηλικία του μαθητή.** Η εμπειρία και οι κατάλληλες δραστηριότητες επιτρέπουν στους μαθητές να προχωρήσουν σε υψηλότερα επίπεδα.
- **Για την κατάκτηση των υψηλότερων επιπέδων Γεωμετρικής σκέψης απαιτούνται πολλές ευκαιρίες για ενασχόληση** με δραστηριότητες που αποκαλύπτουν το περιεχόμενο και τις σχέσεις ενός συγκεκριμένου επιπέδου, για συζήτηση των ιδεών που αναπαριστούν οι δραστηριότητες, για επίλυση προβλημάτων και για ολοκληρωμένες αντιλήψεις μέσω της αναθεώρησης και της περίληψης των πληροφοριών.
- **Η μάθηση δεν είναι δυνατόν να επιτευχθεί ,όταν δεν υπάρχει ποιοτικός συνδυασμός του επιπέδου καθοδήγησης και του επιπέδου ανάπτυξης του μαθητή.**

2.6.5 Αξιολόγηση των Kim, Cho και Ahn

Με στόχο να αξιολογήσουν τη μαθηματική δημιουργική ικανότητα των χαρισματικών μαθητών στα Μαθηματικά οι παραπάνω ερευνητές σχεδίασαν δοκιμασία αρχικών και τελικών μετρήσεων Mathematical Creative Problem Solving Ability (MCPSA).

Ως μαθηματική δημιουργικότητας όρισαν την ικανότητα να παράγουν νέες λύσεις με βάση την προϋπάρχουσα γνώση, τις αρχές, τις έννοιες, τις διάφορες στρατηγικές σκέψης που έχουν διδαχθεί και χρησιμοποιούν.

Στη δοκιμασία αυτή υπάρχουν δραστηριότητες τόσο της συγκλίνουσας όσο και της αποκλίνουσας σκέψης και αποτελείται από δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος δίνονται προβλήματα ανοιχτού τύπου και στο δεύτερο προβλήματα κλειστού τύπου, παράλληλα το κάθε μέρος έχει δραστηριότητες τεσσάρων επιπέδων (διαβαθμισμένης δυσκολίας).

ΠΡΑΚΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

Καινοτόμες εφαρμογές ανάπτυξης Μαθηματικής Δημιουργικότητας στο σχολείο

Τα κύρια συστατικά της Μαθηματικής Δημιουργικότητας υπάρχουν σε αυτές τις δραστηριότητες που στοχεύουν όχι στο «δημιουργικό μάθημα» αλλά στη διδασκαλία «με στόχο την καλλιέργεια της δημιουργικότητας των μαθητών».

Συγκεκριμένα μέσω των δραστηριοτήτων αυτών αξιολογούνται οι εξής γνωστικές δημιουργικές διεργασίες:

Ευχέρεια (ποσότητα ιδεών)

- παροτρύνεται η ελεύθερη έκφραση και ανταλλαγή απόψεων και ιδεών
- παρακινείται η χρήση φαντασίας
- ενθαρρύνεται η διενέργεια συγκρίσεων για τον εντοπισμό διαφορών και ομοιοτήτων
- βοηθείται ο εντοπισμός και η οικοδόμηση σχέσεων ανάμεσα στις μαθηματικές έννοιες από τους μαθητές.
- παρακινούνται οι μαθητές να αιτιολογούν τις απαντήσεις που δίνουν
- χρησιμοποιούνται διαφορετικές μορφές αναπαραστάσεων: λεκτικές, εικονικές, λεκτικές, συμβολικές.
- χρησιμοποιούνται διάφορες διδακτικές τεχνικές, προσεγγίσεις και μέθοδοι
- παρουσιάζονται διαφορετικά είδη ασκήσεων και δραστηριοτήτων

Ευελιξία (διαφορετικά είδη ιδεών)

- προωθείται η σύνδεση και συσχέτιση των μαθηματικών με άλλους τομείς μελέτης, άλλα θέματα και μαθήματα και με την καθημερινή ζωή.
- λαμβάνεται υπόψη η εφαρμογή της γνώσης
- ενθαρρύνεται η ανακάλυψη
- χρησιμοποιούνται προβλήματα ανοικτού τύπου
- προωθείται ο επαγωγικός και αναλογικός συλλογισμός

Πρωτοτυπία (σπανιότητα ιδεών)

- ενεργοποιείται η χρήση πρωτοποριακών μέσω και υλικών
- επιτρέπεται η δημιουργική χρήση του περιβάλλοντος των μαθητών
- προτείνονται ρεαλιστικά, ενδιαφέροντα και πρωτότυπα έργα και δραστηριότητες
- αναγνωρίζονται και γίνονται αποδεκτές οι ασυνήθιστες και μη αναμενόμενες απαντήσεις των μαθητών.

Μέθοδος αξιολόγησης της μαθηματικής δημιουργικότητας μέσω των παρακάτω δραστηριοτήτων

Μέσα από τις παρακάτω προτεινόμενες δραστηριότητες μπορούμε να αξιολογήσουμε τη μαθηματική δημιουργικότητα των μαθητών, καθώς επίσης και να καλλιεργήσουμε τις πτυχές της δημιουργικότητας: ευχέρεια, ευελιξία και πρωτοτυπία.

Στα προβλήματα πολλαπλών λύσεων, για να αξιολογήσουμε τη μαθηματική δημιουργικότητα των μαθητών, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το μοντέλο που προτάθηκε από τη Leikin (2009). Η ευχέρεια αναφέρεται στον αριθμό των λύσεων που παράγει ο λύτης. Για να υπολογίσουμε την ευχέρεια ενός μαθητή υπολογίζουμε τον αριθμό των ορθών λύσεων. Με βάση τη θεωρία των χώρων της Roza Leikin (2006), από τις απαντήσεις των μαθητών δημιουργούνται οι ομαδικοί χώροι λύσεων. Χρησιμοποιώντας τους χώρους λύσεων και το μοντέλο υπολογισμού της ευελιξίας λύσεων της Leikin (2009), μπορούμε να υπολογίσουμε την ευελιξία των μαθητών και στη συνέχεια βασιζόμενοι σε αυτό το μοντέλο, την πρωτοτυπία και τη δημιουργικότητα.

Στις δραστηριότητες που οι μαθητές καλούνται να θέσουν τα δικά τους προβλήματα, η ευχέρεια καθορίζεται από τον αριθμό των προβλημάτων που έχουν τεθεί. Για κάθε απάντηση, αποφασίζουμε αν μπορεί να κληθεί ή όχι μαθηματικό πρόβλημα. Τα κακώς δομημένα προβλήματα καθώς και τα προβλήματα που δεν επιδέχονται λύσης εξαιρούνται της ανάλυσης.

Η ευελιξία μπορεί να αξιολογηθεί με δύο τρόπους. Πρώτον, με βάση τον αριθμό των τύπων προβλημάτων και δεύτερον με βάση τον αριθμό των στρατηγικών που ακολουθήθηκαν για την προβληματοθεσία.

Η πρωτοτυπία είναι το πιο απαιτητικό κριτήριο για την ποιοτική αξιολόγηση. Ένα πρόβλημα μπορεί να θεωρηθεί πρωτότυπο όταν εισάγει ένα νέο τύπο δεδομένων.

Στις δραστηριότητες οι οποίες περιλαμβάνουν ερωτήματα προς τους μαθητές, σχετικά με δημιουργία σχημάτων και ονομασία σχημάτων, για την αξιολόγηση της δημιουργικότητας μπορεί να χρησιμοποιηθούν τα κριτήρια βαθμολόγησης του Torrance (1992) τα οποία ακολουθούν στον παρακάτω πίνακα:

	Ικανότητα	Πώς βαθμολογείται
ευχέρεια	Δημιουργία μεγάλου αριθμού σχημάτων που μοιάζουν με αντικείμενα, σχήματα ή ζώα από τον κόσμο.	«1» βαθμός για σχήμα ουσιαστικό τίτλο που σχετίζεται με κάποιο ερέθισμα. «0» αν δεν γίνεται κατανοητό από τον βαθμολογητή ή όνομα χωρίς νόημα.
πρωτοτυπία	Δημιουργία σχήματος που είναι λιγότερο αναμενόμενο – ασυνήθιστο- μοναδικό	«1» βαθμός για κάτι που είναι μοναδικό ή ασυνήθιστο «0» αν είναι κάτι λογικό-πρακτικό- συνηθισμένο
Επεξεργασία	Ανάπτυξη και λεπτομέρειες για αυτό που κατασκευάστηκε. Οι λεπτομέρειες μπορεί να είναι μικρότερα υποαντικείμενα που αποτελούν το κύριο αντικείμενο.	«1» βαθμός για 1-5 λεπτομέρειες. «2» βαθμοί για 6-12 λεπτομέρειες. «3» βαθμοί για 13-19 λεπτομέρειες.
Αφηρημένος τίτλος	Παραγωγή καλού τίτλου που περιλαμβάνει διαδικασίες σύνθεσης και οργάνωσης. Ένας τέτοιος τίτλος δίνει τη δυνατότητα στο θεατή να δει την	«1» βαθμός για κάτι ασυνήθιστο. «0» για κάτι συνηθισμένο.

	εικόνα πιο βαθιά και πλούσια.	
Όχι πρόωρο κλείσιμο	Ανοιχτό μυαλό και διαθέσιμες πληροφορίες με προοπτική.	«0» κανονικό-λογικό σχήμα. «1» για ιδιαίτερο και μοναδικό αντικείμενο. «2» αν ανιχνεύονται άλλα αντικείμενα.

Προτεινόμενες δραστηριότητες

Προκειμένου να καλλιεργηθεί η μαθηματική δημιουργικότητα στους μαθητές είναι σημαντικό να προσφέρονται ευκαιρίες τόσο για διατύπωση ερωτημάτων – υποθέσεων σχετικά με θέματα που τους ενδιαφέρουν όσο και για επίλυσή τους.

Η ενθάρρυνση των μαθητών να δουλεύουν με αυτόν τον τρόπο αποτελεί σημαντικό εργαλείο προς την καλλιέργεια της δημιουργικότητας στα Μαθηματικά, καθώς σε αυτήν ακριβώς τη διαδικασία στοχασμού, διατύπωσης ερωτημάτων, προσπάθειας για επίλυση, αναδιατύπωσης και οριστικής επίλυσης του προβλήματος γίνεται φανερή η δημιουργική δραστηριότητα.

Αξίζει να σημειωθεί ότι:

- η καλλιέργεια ενός σχολικού κλίματος διαρκούς προβληματισμού και επικοινωνίας θα διευκολύνει τους μαθητές να αναπτύξουν τη διαίσθηση, τη διορατικότητα και τη νοητική ευελιξία και να επινοήσουν δικές τους εικασίες και αποδείξεις.
- οι μαθητές όχι μόνο θέτουν ερωτήματα και προβλήματα αλλά εξετάζουν αν ισχύουν στα μαθηματικά. Έτσι ασκούνται στην αιτιολόγηση και την απόδειξη των λύσεων που προτείνουν.
- οι συγκεκριμένες δραστηριότητες προβληματοθεσίας και λύσης προβλημάτων συμβάλλουν τα μέγιστα στην ανάπτυξη της πρωτοβουλίας και της αυτενέργειας των μαθητών τονώνοντας εντυπωσιακά τα μαθησιακά τους κίνητρα.
- η δημιουργικότητα δεν αφορά μόνο τους λίγους προικισμένους μαθητές. Αφορά στο σύνολο του μαθητικού πληθυσμού χωρίς αποκλεισμούς ή διακρίσεις. Όλοι οι μαθητές διαθέτουν μία θολή δημιουργική τάση και για να την αναδείξουν χρειάζονται ευκαιρίες, προσπάθεια, ενθάρρυνση και μελετημένα προγράμματα.

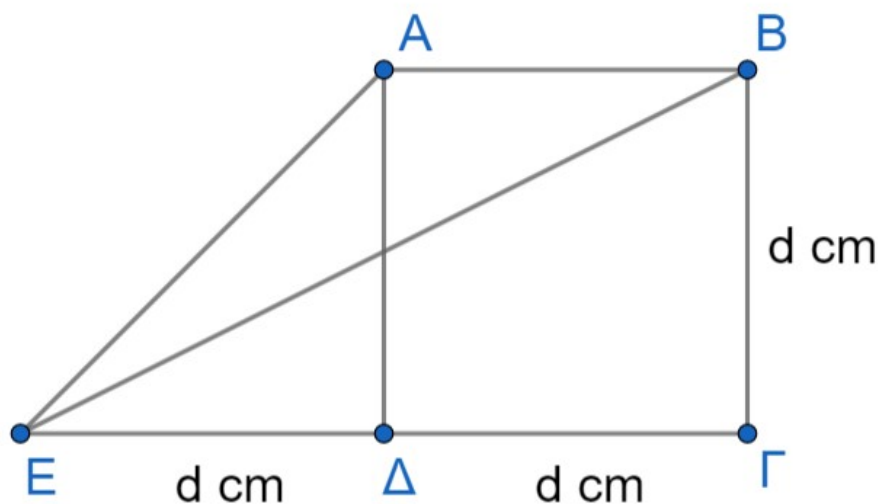
Ακολουθούν κάποια παραδείγματα δραστηριοτήτων που καλλιεργούν τη μαθηματική δημιουργικότητα. Οι ασκήσεις αυτές αφορούν στο Β μέρος των Μαθηματικών της Β Γυμνασίου και συγκεκριμένα στο 1^ο κεφάλαιο (Εμβαδά επίπεδων σχημάτων- Πυθαγόρειο Θεώρημα) και το 3^ο κεφάλαιο (Μέτρηση κύκλου). Μέσα από την ένταξη τέτοιου είδους δραστηριοτήτων στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών, οι μαθητές θα αναπτύξουν πτυχές της μαθηματικής δημιουργικότητας κάτι το οποίο θα τους ωφελήσει στην επίδοσή τους και την κατανόηση μαθηματικών εννοιών.

Οι δραστηριότητες που ακολουθούν είναι **ενδεικτικές** και ο εκπαιδευτικός της τάξης μπορεί να τροποποιήσει τα δεδομένα, συναρτήσει του επιπέδου των μαθητών του.

Δραστηριότητα 1

Δίνεται το παρακάτω σχήμα, όπου d ένας αριθμός. Προσπαθήστε να βρείτε το εμβαδόν του παρακάτω σχήματος με όσους περισσότερους τρόπους μπορείτε.

Προσπαθήστε να φτιάξετε όσο το δυνατόν περισσότερα σχήματα που να έχουν το ίδιο εμβαδόν. Να είστε πρωτότυποι. Σκεφτείτε κάτι που δε θα σκεφτεί ο διπλανός σας.

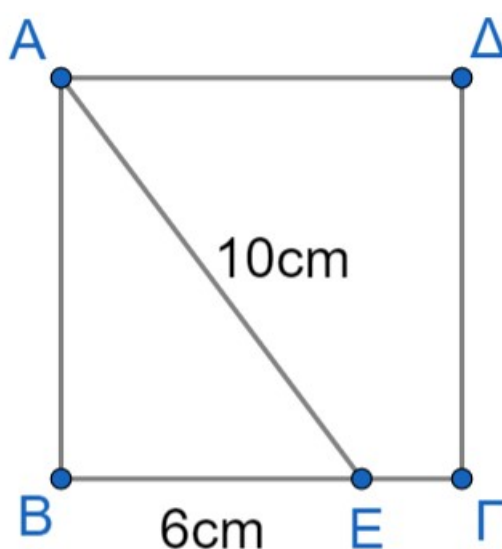


Με την παραπάνω δραστηριότητα, ο μαθητής μπαίνει στη διαδικασία να σκεφτεί όσους περισσότερους τρόπους μπορεί ώστε να βρει το εμβαδόν σε μια απλή άσκηση κάτι το οποίο τον βοηθά να βελτιώσει τόσο την ευχέρεια όσο και την πρωτοτυπία. Με την σκέψη ότι μπορεί να φέρει κι άλλα ευθύγραμμα τμήματα, και ότι μπορεί να ακολουθήσει νέες στρατηγικές θα αναπτύξουν την ευελιξία του. Τέλος, μέσα από τα σχήματα που καλείται να δημιουργήσει, τα οποία δε θα μπορέσουν να σκεφτούν οι συμμαθητές του, γίνεται πιο πρωτότυπος.

Δραστηριότητα 2

Στην πλευρά ΒΓ του τετραγώνου ΑΒΓΔ παίρνουμε σημείο Ε ώστε ΓΕ=6 cm και ΑΕ= 10cm.

- i. Διατυπώστε όσο το δυνατόν περισσότερα ερωτήματα για να απαντηθούν από τους συμμαθητές σας.
Προσπαθήστε να βρείτε πρωτότυπα ερωτήματα που δε θα σκεφτούν άλλοι.
- ii. Στη συνέχεια, φτιάξτε τέσσερα σχήματα που προκύπτουν από το δοσμένο και φτιάξτε ένα νέο σχήμα που φαντάζεστε το οποίο να σημαίνει κάτι (ονομάστε το).

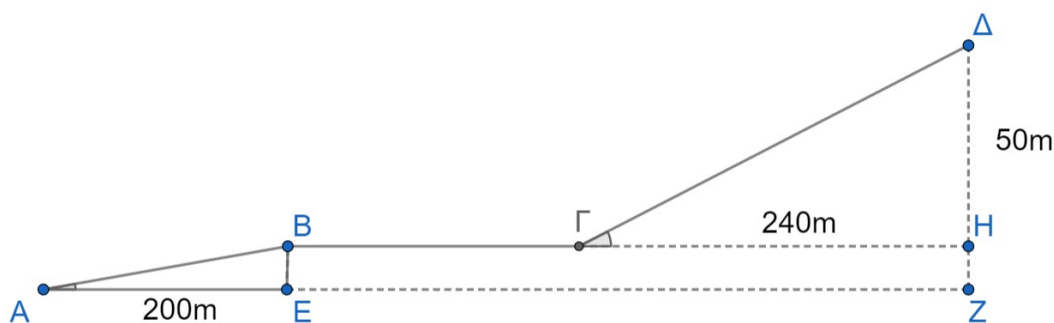


Η δραστηριότητα αυτή βάζει στη διαδικασία τους μαθητές να θέσουν τα δικά τους προβλήματα καθώς επίσης, προσπαθούν να σκεφτούν τις πιθανές λύσεις των προβλημάτων που έθεσαν με στόχο να διερευνήσουν αν όντως τα ερωτήματα που έθεσαν είναι μαθηματικά προβλήματα. Έτσι λοιπόν, καλλιεργείται η ευχέρεια. Η ευελιξία καλλιεργείται με την προσπάθεια των μαθητών να βρουν προβλήματα τα οποία λύνονται με διαφορετικές στρατηγικές. Τέλος, η πρωτοτυπία καλλιεργείται μέσα από τη δημιουργία σχήματος και την ονοματοθεσία, αφού προσπαθούν να δημιουργήσουν κάτι πρωτότυπο που δεν έχει παρουσιαστεί ξανά από τους συμμαθητές τους.

Δραστηριότητα 3

Η κλίση του ανηφορικού δρόμου AB είναι 10%. Δίνεται επίσης ότι $AE = 200m$, $ΓH = 240m$ και $\Delta Z = 50m$.

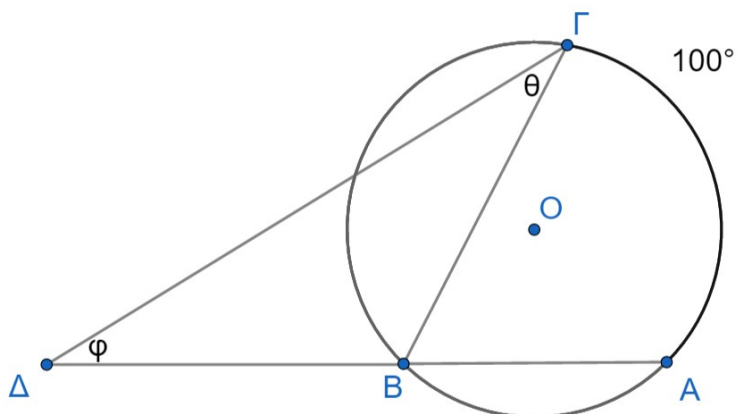
- Με βάση τα δεδομένα αυτά ποια ερωτήματα μπορούν να προκύψουν; Να δημιουργήσετε όσα περισσότερα προβλήματα μπορείτε. Προσπαθήστε να θέσετε προβλήματα που δε θα θέσουν οι συμμαθητές σας. Μπορείτε να προσθέσετε νέα δεδομένα εάν το επιθυμείτε.
- Συμπλήρωσε αυτό το σχήμα, φτιάχνοντας ό,τι σου αρέσει. Προσπάθησε να είσαι πρωτότυπος.



Στη δραστηριότητα 3, ο μαθητής θέτει προβλήματα τα οποία λύνει και αιτιολογεί. Αυτή η διαδικασία καλλιεργεί την αποκλίνουσα σκέψη του και την ευχέρειά του. Η ευελιξία καλλιεργείται με την προσπάθειά του να θέσει προβλήματα τα οποία εμπλέκουν διαφορετικές στρατηγικές λύσης. Επίσης, καλλιεργείται η πρωτοτυπία διότι μπαίνει στη διαδικασία να σκεφτεί προβλήματα που δε θα σκεφτούν οι συμμαθητές του καθώς και η ευχέρεια διότι καλείται να διατυπώσει όσα περισσότερα προβλήματα μπορεί. Αντίστοιχα, το τρίτο ερώτημα καλλιεργεί την πρωτοτυπία του μαθητή καθώς καλείται να δημιουργήσει ένα νέο σχήμα με τις προσθήκες που θα κάνει το οποίο θα πρέπει να είναι πρωτότυπο, δηλαδή να μην έχουν κάνει την ίδια σκέψη οι συμμαθητές του.

Δραστηριότητα 4

Το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές και το τόξο $A\Gamma$ είναι 100° .



- i. Διατυπώστε όσο πιο πολλά ερωτήματα μπορείτε με βάση το παραπάνω σχήμα.
- ii. Προσπαθήστε να σκεφτείτε ένα πρόβλημα, το οποίο να έχει τουλάχιστον δύο διαφορετικούς τρόπους λύσης.
- iii. Στη συνέχεια, με βάση τα στοιχεία του παραπάνω προβλήματος, κατασκευάστε ένα νέο πρωτότυπο σχήμα που να σας θυμίζει κάτι.

Μέσα από αυτήν τη δραστηριότητα, ο μαθητής καλείται να θέσει ερωτήματα με βάση το δοθέν σχήμα. Με αυτόν τον τρόπο, καλείται να διατυπώσει όσα περισσότερα ερωτήματα μπορεί κάτι το οποίο καλλιεργεί την ευχέρειά του. Η ευελιξία του καλλιεργείται μέσα από τη διαδικασία διατύπωσης προβλήματος το οποίο επιδέχεται δύο διαφορετικούς τρόπους λύσης. Τέλος, η πρωτοτυπία του καλλιεργείται από την κατασκευή πρωτότυπου σχήματος.

Δραστηριότητα 5

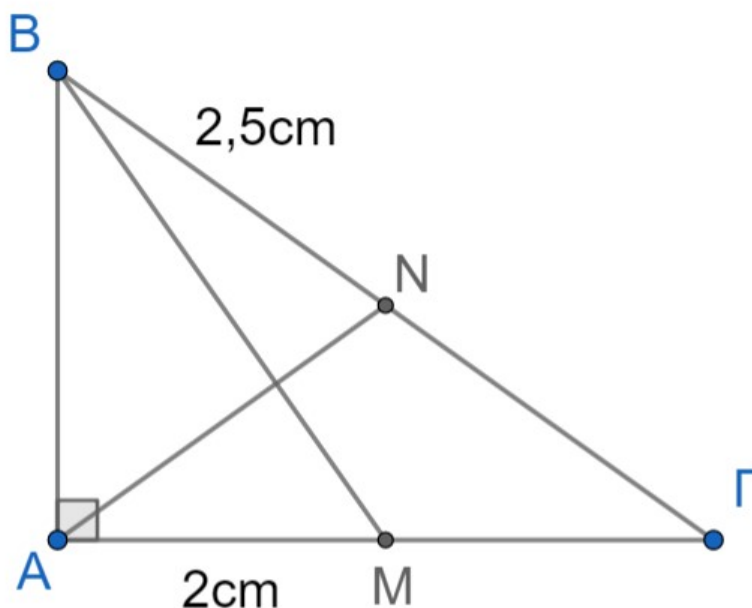
Ένας κύκλος έχει μήκος 5m. Να υπολογίσετε την ακτίνα του.

Να βρείτε όσους περισσότερους πρωτότυπους αντίστοιχους κύκλους που συναντάτε στην καθημερινότητα και να θέσετε όσα περισσότερα δικά σας προβλήματα μπορείτε. Προσπαθήστε να σκεφτείτε προβλήματα που δε θα σκεφτούν οι συμμαθητές σας.

Στη δραστηριότητα 5 ο μαθητής αρχικά απαντά σε ένα απλό ερώτημα το οποίο απαιτεί τη χρήση μαθηματικού τύπου. Στη συνέχεια, προσπαθεί να σκεφτεί κύκλους από την καθημερινότητα και να θέσει όσο πιο πολλά προβλήματα μπορεί. Τα παραπάνω τον οδηγούν στην καλλιέργεια της ευχέρειας, επειδή καλείται να διατυπώσει όσα περισσότερα προβλήματα μπορεί. Επιπλέον, πρέπει να είναι και πρωτότυπος διότι μπαίνει στη διαδικασία να σκεφτεί προβλήματα διαφορετικά από τους συμμαθητές του.

Δραστηριότητα 6

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται $BN = 2,5\text{cm}$, $AM = 2\text{cm}$ και M, N τα μέσα των $ΑΓ$ και $ΒΓ$ αντίστοιχα.



- i. Διατυπώστε όσα περισσότερα ερωτήματα μπορείτε με βάση το παραπάνω σχήμα. Μπορείτε αν θέλετε να προσθέσετε κάποια δεδομένα. Επίσης, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μαθηματικές έννοιες από άλλες ενότητες για τη λύση των ερωτημάτων σας. Προσπαθήστε να είστε πρωτότυποι. Στη συνέχεια να δώσετε τις απαντήσεις στα ερωτήματα που θέσατε.
- ii. Διατυπώστε ένα πρόβλημα της καθημερινότητας το οποίο θα μπορούσες να λύσεις με βάση αυτό το σχήμα. Χρησιμοποίησε όσο πιο πολλά δεδομένα μπορείς (π.χ σχήμα, γωνίες, αποστάσεις κτλ.)

Στη συγκεκριμένη δραστηριότητα, καλλιεργείται η πρωτοτυπία και στα δύο ερωτήματα διότι αρχικά καλείται να διατυπώσει προβλήματα που δεν έχουν διατυπώσει οι συμμαθητές του και επιπρόσθετα, καλείται να διατυπώσει προβλήματα της καθημερινότητας με αφορμή το σχήμα που δίνεται.

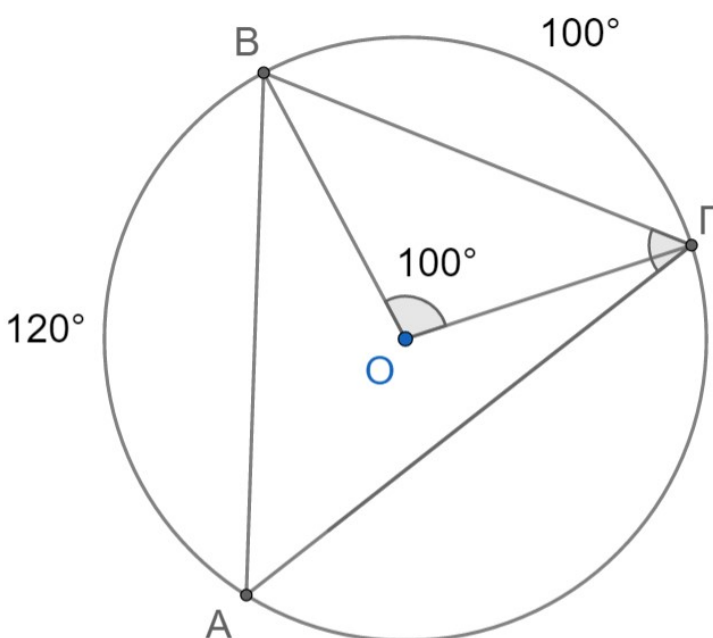
Η ευχέρεια καλλιεργείται μέσα από τη διαδικασία της προβληματοθεσίας, αφού ο μαθητής προσπαθεί να διατυπώσει όσα περισσότερα ερωτήματα μπορεί.

Η ευελιξία καλλιεργείται μέσα από την αναζήτηση προβλημάτων μέσω διαφορετικών στρατηγικών.

Δραστηριότητα 7

Σε έναν κύκλο (O,R) θεωρούμε 3 σημεία A,B,Γ έτσι ώστε το τόξο AB να είναι 120° και το τόξο $B\Gamma$ να είναι 100° .

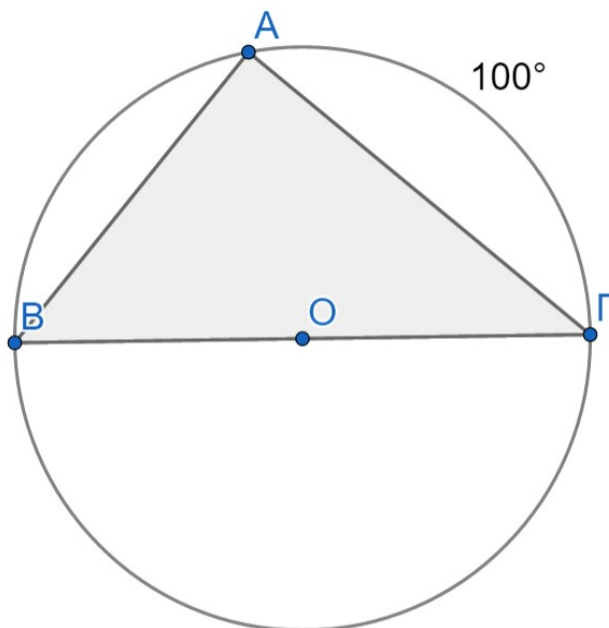
Προσπαθήστε να διατυπώσετε όσα περισσότερα προβλήματα μπορείτε με το παρακάτω σχήμα. Μπορείτε επίσης, να αλλάξετε τα δεδομένα του προβλήματος ή ακόμα να κάνετε και προσθήκες στο σχήμα. Προσπαθήστε να διατυπώσετε προβλήματα που να λύνονται με τουλάχιστον δύο διαφορετικούς τρόπους από διαφορετικά σημεία της ύλης που έχετε διδαχθεί. Σκεφτείτε προβλήματα και λύσεις που δε θα σκεφτούν οι συμμαθητές σας.



Με την παραπάνω δραστηριότητα, οι μαθητές μπαίνουν στη διαδικασία να διατυπώσουν όσα περισσότερα προβλήματα μπορούν. Αυτό τους βοηθά να καλλιεργήσουν την ευχέρεια. Επιπλέον, ζητείται από τους μαθητές να διατυπώσουν προβλήματα των οποίων οι λύσεις προσεγγίζονται με διαφορετικές στρατηγικές κάτι το οποίο καλλιεργεί την ευελιξία. Τέλος, η πρωτοτυπία καλλιεργείται μέσα από την αναζήτηση προβλημάτων που δε θα σκεφτούν οι υπόλοιποι συμμαθητές.

Δραστηριότητα 8

Στο παρακάτω σχήμα η $B\Gamma$ είναι διάμετρος του κύκλου και δίνεται ότι $AB = 6\text{cm}$, $A\Gamma = 8\text{cm}$ και το τόξο $A\Gamma$ είναι 100° .



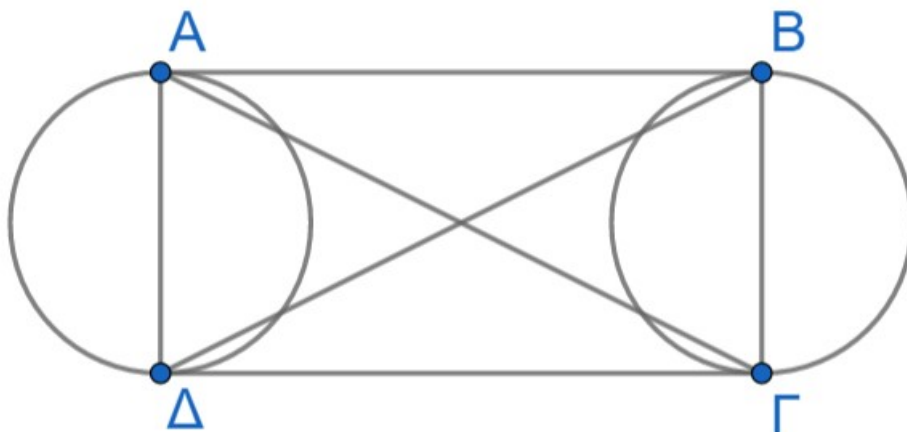
- i. Αξιοποιώντας τα παραπάνω δεδομένα, διατυπώστε όσα περισσότερα δικά σας προβλήματα μπορείτε και δώστε λύσεις σε αυτά.
- ii. Διατυπώστε προβλήματα των οποίων οι λύσεις να περιλαμβάνουν τη χρήση του Πυθαγορείου Θεωρήματος, του ημιτόνου και του συνημίτονου. Μπορείτε να προσθέσετε δεδομένα στο δοθέν πρόβλημα αν το κρίνετε απαραίτητο.
- iii. Υπολογίστε το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου και στη συνέχεια, βρείτε ένα πρωτότυπο σχήμα το οποίο να έχει το ίδιο εμβαδόν.

Στη συγκεκριμένη δραστηριότητα, καλλιεργείται η ευχέρεια μέσα από τη διατύπωση όσο περισσότερων προβλημάτων μπορεί ο μαθητής. Επιπλέον, μπαίνει στη διαδικασία να τα λύσει που σημαίνει ότι αντιλαμβάνεται ότι πρέπει τα προβλήματα που θέτει, να ελεγχθούν αν έχουν λύση. Μέσα από το δεύτερο ερώτημα, όπου ο μαθητής προσπαθεί να διατυπώσει προβλήματα προσθέτοντας και άλλα δεδομένα καθώς και να συμπεριλάβει και άλλα κεφάλαια της ύλης, καλλιεργείται η ευελιξία του. Τέλος με το τρίτο ερώτημα, καλλιεργείται η πρωτοτυπία μέσα από την αναζήτηση και κατασκευή πρωτότυπου σχήματος.

Δραστηριότητα 9

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με $A\Delta = 15\text{cm}$ και $B\Delta = 25\text{cm}$. Με διαμέτρους στις πλευρές $A\Delta$ και $B\Gamma$ έχουν σχεδιαστεί εσωτερικά του ορθογωνίου δύο κύκλοι.

- i. Ποια είναι τα ερωτήματα που μπορούν να προκύψουν;
- ii. Με βάση το παραπάνω σχήμα, να φτιάξετε ένα δικό σας πρωτότυπο σχήμα.

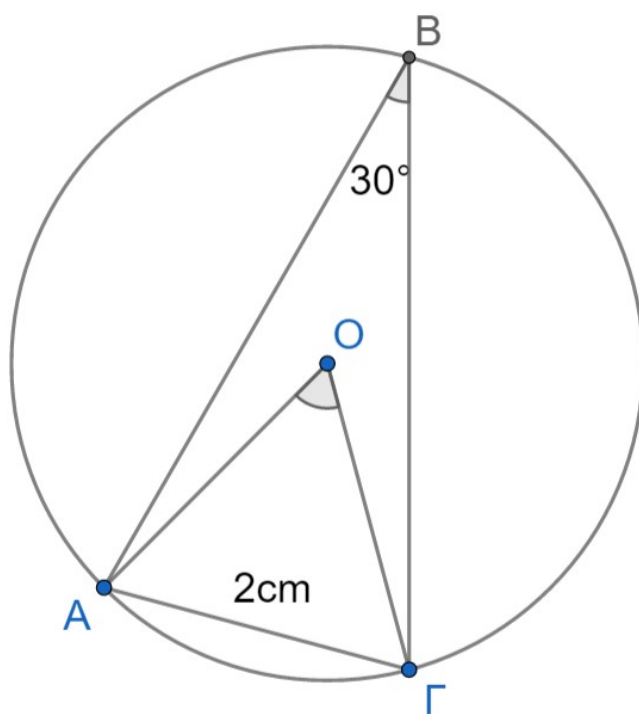


Στη δραστηριότητα αυτή, καλλιεργούνται η ευχέρεια, μέσα από τη δημιουργία ερωτημάτων καθώς και η πρωτοτυπία, αφού οι μαθητές καλούνται να φτιάξουν σχήμα που δε θα φτιάξουν οι συμμαθητές τους.

Δραστηριότητα 10

Δίνεται το παρακάτω σχήμα. Προσθέστε δεδομένα στο παρακάτω σχήμα και διατυπώστε τα δικά σας πρωτότυπα ερωτήματα.

Στη συνέχεια, κατασκευάστε σχήμα το οποίο να αποτελείται από στοιχεία του παρακάτω σχήματος και δώστε του μια ονομασία.



Συμπεράσματα

Η μαθηματική δημιουργικότητα αναδείχτηκε σχετικά πρόσφατα τόσο στο διεθνές όσο και τον ελληνικό χώρο και φαίνεται να συνδέεται συχνά με την καινοτομία, τη φαντασία, τον μη αλγοριθμικό τρόπο σκέψης, την αποκλίνουσα σκέψη, καθώς και με την ικανότητα να βρίσκει κανείς πολλές λύσεις σε ανοικτά προβλήματα.

Για να καλλιεργηθεί η μαθηματική δημιουργικότητα των μαθητών είναι σημαντικό να προσφέρονται **ευκαιρίες** σε αυτούς, ώστε να διατυπώνουν οι ίδιοι ερωτήματα- υποθέσεις- εικασίες σχετικά με τα θέματα που τους ενδιαφέρουν και να προσπαθούν να τα επιλύουν.

Σημαντικό εργαλείο για την καλλιέργεια της δημιουργικότητας των μαθητών είναι η **ενθάρρυνσή** τους να εργάζονται με αυτόν τον τρόπο, να εργάζονται «όπως οι μαθηματικοί». Με αυτήν τη διαδικασία στοχασμού, διατύπωσης ερωτημάτων, προσπάθειας για επίλυση του προβλήματος γίνεται φανερό η δημιουργική δραστηριότητα.

Αυτή η παροχή ευκαιριών για δημιουργική σκέψη στο ελληνικό σχολείο είναι απαραίτητη τόσο εντός όσο και εκτός των αναλυτικών προγραμμάτων.

Η ενθάρρυνση των μαθητών να δουλεύουν με αυτόν τον τρόπο αποτελεί σημαντικό εργαλείο για την καλλιέργεια της δημιουργικότητας στα μαθηματικά, καθώς σε αυτήν ακριβώς τη διαδικασία στοχασμού, διατύπωσης ερωτημάτων, προσπάθειας για επίλυση, αναδιατύπωσης και οριστικής επίλυσης του προβλήματος γίνεται φανερό η δημιουργική δραστηριότητα.

Η καλλιέργεια ενός σχολικού κλίματος διαρκούς προβληματισμού και επικοινωνίας θα διευκολύνει τους μαθητές να αναπτύξουν τη διαίσθηση, τη διορατικότητα, την πρωτοβουλία, την αυτενέργεια και τη νοητική ευελιξία. Δε θέτουν απλά ερωτήματα και προβλήματα οι ίδιοι, αλλά εξετάζουν αν ισχύουν στα μαθηματικά, ασκούνται στην αιτιολόγηση και την απόδειξη των λύσεων που προτείνουν. Δημιουργικός μαθητής είναι αυτός που αναζητά νέες ιδέες, θέτει υψηλούς στόχους, αμφισβητεί κάθε παλιό, επινοεί, πειραματίζεται και εφαρμόζει ό,τι θεωρεί καινοτόμο.

Παράλληλα, είναι αναγκαία η **επιμόρφωση των εκπαιδευτικών** σε θέματα που αφορούν τη δημιουργικότητα, την αξιολόγηση και την καλλιέργειά της εκ μέρους των μαθητών. Είναι πασιφανές ότι οι εκπαιδευτικοί ενδεχομένως θα έχουν τη δυνατότητα να διαχειριστούν και να καλλιεργήσουν τη δημιουργικότητα στους μαθητές τους στα μαθηματικά, όταν πρώτα οι ίδιοι

κατανοήσουν τόσο τη δημιουργικότητα όσο και τους παράγοντες που την επηρεάζουν. Είναι απαραίτητη, λοιπόν, η απόκτηση περισσότερης γνώσης και εμπειρίας στην αναγνώριση και την αξιολόγηση της δημιουργικότητας και, ενδεχομένως, στην προώθηση της εντός της εκπαιδευτικής πράξης.

Η οργάνωση και η υλοποίηση επιμορφωτικών προγραμμάτων σχετικά με τη δημιουργικότητα στα μαθηματικά και προγραμμάτων προσανατολισμένων σε διδακτικές πρακτικές και εφαρμογές στη σχολική τάξη θα πρέπει να είναι οι άμεσες προτεραιότητες του Υπουργείου Παιδείας.

Στόχος του εκπαιδευτικού θα πρέπει να είναι:

- Η απόκτηση πλούσιου μαθηματικού υποβάθρου που όχι μόνο χαρίζει αυτοπεποίθηση αλλά και δίνει περισσότερες ευκαιρίες στους μαθητές για έκφραση της μαθηματικής δημιουργικότητας.
- Η αναγνώριση περισσότερων χαρακτηριστικών δημιουργικότητας στα μαθηματικά προβλήματα (ανοιχτά προβλήματα, ύπαρξη πολλών λύσεων και διαφορετικών στρατηγικών επίλυσης, αποκλίνουσα σκέψη, μη τυποποιημένα προβλήματα, μη αλγοριθμική σκέψη).
- Η ενθάρρυνση των μαθητών στη διατύπωση υποθέσεων και η επίλυση προβλημάτων της καθημερινότητάς τους.
- Η χρήση σύγχρονων τρόπων διδασκαλίας
- Η υιοθέτηση μεθόδων που προάγουν τη δημιουργικότητα και δίνουν τη δυνατότητα στους μαθητές να αναπτύξουν τη δημιουργική τους σκέψη.

Βιβλιογραφία

Abraham, A. (2013). *Creative thinking as orchestrated by semantic processing vs. cognitive control brain networks. Frontiers in human neuroscience*, 8, 95-95.

Abraham, A., & Windmann, S. (2007). *Creative cognition: The diverse operations and the prospect of applying a cognitive neuroscience perspective. Methods*, 42(1), 38-48.

Anat Levav- Waynberg & Roza Leikin. *Multiple solutions for a problem: a tool for evaluation of mathematical thinking in geometry.*

Anderson, L. W., Krathwohl, D.R, & Bloom, B. S. (2001). *A taxonomy for learning, teaching, and assessing: A revision of Bloom's taxonomy of educational objectives: Allyn & Bacon.*

Baer, J., Kaufman, J.C, & Gentile, C.A. (2004). *Extension of the Consensual Assessment Technique to Nonparallel Creative Products. Creativity Research Journal.*

Balka, D.S. (1974). *Creative Ability in Mathematics. Arithmetic Teacher*, 21(7), 633-636.

Becker, J.P., & Shimada, S. (1997). *The open- Ended Approach: A New Proposal for Teaching Mathematics: ERIC.*

Beghetto, R.A, & Kaufmann, J.C. (2009). *Do we all have multicreative potential? ZDM*, 41(1-2), 39-44.

Bendow, C.P., & Arjmand, O. (1990). *Predictors of high academic achievement in mathematics and science by mathematically talented students: A longitudinal study*. Journal of Educational Psychology, 82(3), 430.

Brown, S.I., & Walter, M.I. (2005). *The art of problem posing*: Psychology Press.

Cahyanita (2021). *The development of tangram- based geometry test to measure the creative thinking ability of junior high school students in solving two dimensional figure problems*. Journal of Physics.

Campbell, C., & Collins, V.L. (2007). *Identifying essential topics in general and special education introductory assessment textbooks*. Educational Measurement: Issues and Practice, 26(1), 9-18.

Ching, T. (1997). *An experiment to discover mathematical talent in a primary school in Kampong Air*. ZDM, 29(3), 94-96.

Claxton, A.F, Pannells, T.C, & Rhoads, P.A. (2005). *Developmental Trends in the Creativity of School- Age Children*. Creativity Research Journal.

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). *Geometry and spatial reasoning*. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420–464). New York, NY: Macmillan.

Cropley, A.J.(1999). *Creativity and cognition: Producing effective novelty*. Roeper review, 21(4), 253-260.

Csikszentmihalyi, M.(1999). *16 Implications of a Systems Perspective for the Study of Creativity*. Handbook of creativity, 313.

Davinson, J. E. (1995). *The suddenness of insight*. In R. J. Sternberg, Davinson, J.E. (Ed.), *The Nature of Insight* (pp. 125-155). MIT Press, Cambridge, MA.

Davis, P.J, & Hersh, R. (1998). *The mathematical experience*: Houghton Mifflin Harcourt.

Elliott, J.(2003). *Dynamic assessment in educational settings: Realising potential*. Educational Review, 55(1), 15-32.

Ernest, P.(2005). *Agency and Creativity in the Semiotics of Learning Mathematics*. In M.G. Hoffmann, J. Lenhard & F. Seeger (Eds.), *Activity and Sign* (pp. 23-34): Springer US.

Ervynck, G.(1991). *Mathematical creativity Advanced mathematical thinking* (pp. 42-53): Springer.

Feuerstein, R., Klein, P.S.,& Tannenbaum, A.J. (1991). *Mediated learning experience (MLE): Theoretical, psychosocial and learning implications*: Freund Publishing House Ltdl.

Gridos P., Gagatsis A. Iliada Elia & Deliyianni Eleni (2019). *Mathematical creativity and geometry: The influence of geometrical figure apprehension on the production of multiple solutions.*

Grigoremko, E.L. (2009). *Dynamic Assessment and Response to Intervention Two Sides of One Coin.* Journal of Learning Disabilities, 42(2), 111-132.

Guilford, J.P. (1956). *The structure of intellect.* Psychological Bulletin, 53(4), 267.

Haylock, D. W.(1997). *Recognising mathematical creativity in schoolchildren.* ZDM, 29(3), 68-74.

Haywood, H. C., & Lidz, C.S. (2006). *Dynamix approaches to psychoeducational assessment.* School Psychology Review.

Haywood, H.C., & Tzuriel, D. (2002). *Applications and challenges in dynamic assessment.* Peabody Journal of Education, 77(2), 40-63.

Hemmings, B., Grootenboer, P., & Kay, R. R. (2011). *Predicting Mathematics Achievement: The influence of prior achievement and attitudes.* International Journal of Science and Mathematics Education, 9(3), 691-705.

Hennessey, B. A., & Amabile, T.M. (1999). *Consensual Assessment Vol.1. M. A. R. S. R. Pritzker (Ed.) Encyclopedia of Creativity* (pp 347).

Hersh, R. (1997). *What is mathematics, really?* : Oxford University Press.

Karsenty, R. (2014). *Mathematical Ability Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 372-375): Springer.

Kattou, M., Kontoyianni, K., Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2013). *Connecting mathematical creativity to mathematical ability*. ZDM, 45(2), 167-181.

Kaufmann, J.C., Kaufman, S.B., Beghetto, R.A., Burgess, S.A., & Persson, R.S. (2009). *Creative giftedness: Beginnings, developments, and future promises International handbook on giftedness* (pp. 585-598): Springer.

Kaufmann J.C, & Sternberg, R.J. (2006). *The international handbook of creativity*: Cambridge University Press.

Kim, H., Cho, S., & Ahn, D. (2004). *Development of mathematical creative problem solving ability test for identification of the gifted in mats*. Gifted Education International, 18(2), 164-174.

Kim, K. H. (2006). *Can we trust creativity tests? A review of the Torrance Test of Creative Thinking (TTCT)*. Creativity Research Journal, 18(1), 3-14.

Koestner, R., Walker, M., & Fichman, L. (1999). *Childhood parenting experiences and adult creativity*. Journal of Research in Personality, 33(1), 92-107.

Koshy, V., Ernest, P., & Casey, R. (2009). *Mathematically gifted and talented learners: theory and practice*. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 40(2), 213-228.

Krathwohl, D.R. (2002). *A revision of Bloom's taxonomy: An overview*. Theory into practice, 41(4), 212-218.

Krutetskii, V.(1977). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*. The University of Chicago Press.

Kwon, O.N., Park, J.H., & Park, J.S.(2006). *Cultivating divergent thinking in mathematics through an open-ended approach*. Asia Pasific Education Review, 7(1), 51-61.

Lavy, I., & Shriki, A.(2010). *Engaging in problem posing activities in a dynamic geometry setting and the development of prospective teachers' mathematical knowledge*. The journal of Mathematical Behavior, 29(1), 11-24.

Leikin, R. (2009). *Bridging research and theory in mathematics education with research and theory in creativity and giftedness. Creativity in mathematics and the education of gifted students*, 383-409.

Leikin, R. (2009). *Exploring mathematical creativity using solution tasks. Creativity in mathematics and the education of gifted students*, 129-145.

Leikin, R.(2009). *Multiple proof tasks: Teacher practice and teacher education. ICME Study*, 19(2), 31-36.

Leikin, R. (2009). *Multiple proof tasks: The interplay between multiplicity and insight. Psychological Test and Assessment Modeling*, 55(4), 385-400.

Leikin, R., & Lev, M. (2007). *Multiple tasks as a magnifying glass for observation of mathematical creativity*. Paper presented at the Proceedings of the 31st international conference for the psychology of mathematics education.

Leikin, R., Berman, A. & Koichu, B. (2009). *Creativity in mathematics and the education of gifted students. AMC*, 10,12.

Leikin, R., & Pitta- Pantazi, D. (2013). *Creativity and mathematics education: the state of the art. ZDM*, 45(2), 159-166.

Leikin R & Yona Kloss (2011). *Mathematical creativity of 8th and 10th Grade Students*.

Leikin, R. & Levav-Waynberg, A. (2009). *Development of teachers' conceptions through learning and teaching: Meaning and potential of multiple-solution tasks*. Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 9(4), 203–223

Liljedahl, P., & Allan, D. (2013). *Mathematical discovery Encyclopedia of Creativity, Invention, Innovation and Entrepreneurship* (pp. 1228-1233): Springer.

Liljedahl, P., & Sriraman, B. (2006). *Musings on mathematical creativity*. For the learning of mathematics, 17-19.

Lubart, T., & Guignard, J.-H. (2004). *The Generality- Specificity of Creativity: A Multivariate Approach*. In R. J. Sternberg, E. L. Grigorenko & J. L. Singer (Eds.),

Creativity: From potential to realization (pp. 43-56). Washington , DC, US: American Psychological Association.

Lubart, T., Zenasni, F., & Barbot, B. (2013). *Creative potential and its measurement*. Int. J. Talent Dev. Creat, 1, 41-51.

Mann, E. L. (2005). *Mathematical creativity and school mathematics: Indicators of mathematical creativity in middle school students*. University of Connecticut.

Mann, E. L. (2006). *Creativity: The essence of mathematics*. Journal for the Education of the Gifted, 30(2), 236-260.

Marriott, P.(2009). *Students' evaluation of the use of online summative assessment on an undergraduate financial accounting module*. British Journal of Educational Technology, 40 (2), 237-254.

Mason, J. (1991). *Mathematical problem solving: Open, closed and exploratory in the UK*. International Reviews on Mathematical Education, 23(1), 14-19.

Meijer, J., &Riemersma, F. (2002). *Teaching and testing mathematical problem solving by offering optional assistance*. Instructional Science, 30(3), 187-220.

Nohda, N. (2000). *Teaching by Open- Approach Method in Japanesse Mathematics Classroom. Proceeding of the 24th conference of the international Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1- 39- 53, 23- 27.

Nusbaum, E. C., & Silvia, P. J.(2011). *Are intelligence and creativity really so different?: Fluid intelligence, executive processes, and strategy use in divergent thinking*. Intelligence, 39 (1), 36-45.

Pehkonen, E. (1997b). *The state- of- art in mathematical creativity*. ZDM, 29(3), 63-67.

Pehkonen, E., Naveri, L., & Laine, A. (2013). *On teaching problem solving in school mathematics*. CEPS Journal: Center for Educational Policy Studies Journal, 3(4), 9.

Pluncker, J. A., & Beghetto, R. A. (2004). *Why creativity Is Domain General, Why It Looks Domain Specific, and Why the Distinction Does Not Matter*.

Plucker, J. A., & Renzulli, J.S. (1999). *Psychometric approaches to the study of human creativities?* ZDM, 41(1-2), 5-11.

Poehner, M. E. (2008). *Dynamic assessment: A Vygotskian approach to understanding and promoting L2 development* (Vol. 9): Springer Science & Business Media.

Poehner, M. E., & Lantolf, J. (2005). *Dynamic assessment in the language classroom*. *Language Teaching Research*, 9(3), 233-265.

Poincare, H. (1952). *Science and Method*.

Polya, G. (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning: A Guide to the Art of Plausible Reasoning. Induction and Analogy in Mathematic*: Princeton University Press.

Resing, W. (2013). *Dynamic Testing and Individualized Instruction: Helpful in Cognitive Education?* *Journal of Cognitive Education and Psychology*, 12(1), 81-95.

Rhodes, M. (1961). *An analysis of creativity*. *Phi Delta Kappan*, 305-310.

Runco, M. A. (2004). *Creativity*. *Annu, Rev. Psycho*, 55, 657-687.

Runco, M. A., & Jaeger, G.J. (2012). *The standard definition of creativity*. Creativity Research Journal, 24(1), 92-96.

Sarrazy, B., & Novotna, J.(2013). *Didactical contract and responsiveness to didactical contract: a theoretical framework for enquiry into students' creativity in mathematics*. ZDM, 45(2), 281-293.

Shriki, A. (2010). *Working like real mathematicians: developing prospective teachers' awareness of mathematical creativity through generating new concepts*. Educational Studies in Mathematics, 73(2), 159-179.

Silver, E.A.(1997). *Fostering creativity through instruction ricj in mathematical problem solving and problem posing*. ZDM, 29(3), 75-80.

Silver, E.A. (2013). *Problem- posing research in mathematics education: Looking back, looking around, and looking ahead*. Educational Studies, 83(1), 157-162.

Somonton, D. K. (2000). *Creativity: Cognitive, personal, developmental, and social aspects*. American psychologist, 55(1), 151.

Singer, F. M., Pelczer, I., &Voica, C.(2011). *Problem posing and modification as a criterion of mathematical creativity*. Paper presented at the Proceedings of the 7th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 7) University of Rzeszow, Poland.

Singh, K., Granville, M., & Dika, S. (2002). *Mathematics and science achievement: Effects of motivation, interest, and academic engagement*. The Journal of Educational Research, 95(6), 323-332.

Smith, S.M., Ward, T. B., Finke, R. A. (1995). *The Creative Cognition Approach*.

Spinath, B., Spinath, F. M., Harlaar, N., & Plomin, R. (2006). *Predicting school achievement from general cognitive ability, self-perceived ability, and intrinsic value*. Intelligence, 34(4), 363- 374.

Sriraman, B. (2004a). *The characteristics of mathematical creativity*. The Mathematics Educator, 14(1).

Sriraman, B. (2004b). *The influence of Platonism on mathematics research and theological beliefs*. Theology and Science, 2(1), 131-147.

Sriraman, B.(2008). *Creativity, giftedness, and talent development in mathematics* (Vol.4): IAP.

Sriraman, B.(2009a). *The characteristics of mathematical creativity*. ZDM, 41(1-2), 13-27.

Sriraman, B.(2009b). *Mathematical paradoxes as pathways into benefits and polymathy: An experimental inquiry*. ZDM, 41(1-2), 29-38.

Sriraman, B., Haavold, P., & Lee, K. (2013). *Mathematical creativity and giftedness: a commentary on and review of there, new operational views, and ways forward*. ZDM, 45(2), 215-225.

Sriraman, B., Yaftian, N., & Lee, K. (2011). *Mathematical Creativity and Mathematics Education*. In B. Sriraman& K. Lee (Eds.), *The Elements of Creativity and Giftedness in Mathematics* (Vol. 1, pp. 119-130): SensePublishers

Sternberg, R.J. (2006). *The Nature of Creativity*. Creativity Reserch Journal, 18(1), 87-98.

Sternberg, R.J. (2012). *The Assessment of Creativity: An Investment-Based Approach*. Creativity Research Journal ,24(1), 3-12.

Sternberg, R.J., & Grigorenko, E.L. (2002). *Dynamic testing: The nature and measurement of learning potential*: Cambridge university press.

Sternberg, R. J.,Kaufman, J. C., Pretz, J. E. (2002). *The creativity conundrum: A propulsion model of kinds of creative contributions*: Psycholody Press.

Sternberg, R. J., & Lubart, T. (1999). *The concept of creativity: Prospects and paradigms*. *Handbook of creativity*, 1, 3-15.

Tabach, M., Friendlander, A. (2013). *School mathematics and creativity at the elementary and middle-grade levels: how are they related?* *ZDM*, 45(2), 227-238.

Torrance, E.P. (1965). *Rewarding Creative Behavior; Experiments in Classroom Creativity*. *Engelwood Cliffs*, NJ: Prentice Hall.

Torrance, E.P., Ball, O.E, & Safter, H. T (1992). *Torrance Tests of creative thinking: Streamline scoring guide figural A and B*. Bensenville, IL: Scholastic Testing Service, Inc.

Tzuriel, D. (2001). *Dynamic assessment of young children*. New York Springer Science + Business Media.

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and Insight. A Theory of Mathematics Education*. London: Academic Press.

Vilkomir, T., & O' Donoghue, J. (2009). *Using components of mathematical for initial development and identification of mathematically promising students*. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 40(2), 183-199.

Voica, C., & Singer, F. (2013). *Problem modification as a tool for detecting cognitive flexibility in school children*. *ZDM*, 45(2), 267-279.

Vygotsky, L. (1978). *Interaction between learning and development. Readings on the development of children*, 23(3), 34-41.

Vygotsky, L., & Wollock, J. (1997). *The Collected Works of L.S. Vygotsky: Problems of the theory and history of psychology* (Vol. 3): Springer Science & Business Media.

Wang, T.-H. (2011a). *Developing Web-based assessment strategies for facilitating junior high school students to perform self-regulated learning in an e-Learning environment*. *Computers & Education*, 57(2), 1801-1812.

Wang, T.-H. (2011b). *Implementation of Web-based dynamic assessment in facilitating junior high school students to learn mathematics*. *Computers & Education*, 55(4), 1062-1071.

Wang, Y. (2008). *On cognitive foundations of creativity and the cognitive process of creation. Paper presented at the Cognitive Informatics, 2008. ICCI 2008. 7th IEEE International Conference on*.

Ward, T.B., Smith, S., & Finke, R. (1999). *Creative cognition. In. Sternberg, RJ (Ed.), Handbook of creativity (pp. 189- 212): Cambridge University Press*.

Weisberg, R. W. (2006). *Creativity: Understanding Innovation in Problem Solving. Science, Invention, and the Arts*.

Williams, G., & Huang, H.-M. (2014). New research directions in learning and cognition. ZDM. 46(3), 335-347.

Γρίδος Παναγιώτης (2018), *Ανάπτυξη μαθηματικής δημιουργικότητας διαμέσου προβλημάτων πολλαπλών λύσεων στη γεωμετρία*: Διπλωματική εργασία.

Κουνάδης Φώτης (2018), *Μαθηματικά Β Γυμνασίου, Κριτήρια Αξιολόγησης*. Αθήνα: Πατάκη.

Σκουμπουρδή Χρυσάνθη (2005), *Η φύση των μαθηματικών, η μαθηματική ικανότητα και η διδασκαλία: τρεις αιτίες που ίσως προκαλούν αρνητική στάση για τα μαθηματικά*, Research gate.