

ΧΑΡΟΚΟΠΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ, ΓΕΩΓΡΑΦΙΑΣ & ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΓΕΩΓΡΑΦΙΑΣ

Ανάλυση Δημογραφικών Δεδομένων Θνησιμότητας με χρήση Πιθανοθεωρητικών κατανομών & Χαρτογραφικών απεικονίσεων

Διδακτορική Διατριβή

Παναγιώτης Ανδρεόπουλος, MSc

Μαθηματικός - Στατιστικός

Αθήνα, 2021



ΧΑΡΟΚΟΠΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ, ΓΕΩΓΡΑΦΙΑΣ & ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΓΕΩΓΡΑΦΙΑΣ

Η Διδακτορική Διατριβή εξετάστηκε από την κάτωθι Επταμελή Επιτροπή:

Αλεξάνδρα Τραγάκη (Επιβλέπουσα)
Καθηγήτρια, Αναπληρωτής Πρόεδρος του Τμήματος, Οικονομική Δημογραφία, Τμήμα Γεωγραφίας, Χαροκόπειο Πανεπιστήμιο

Αντώνης Ροβολής
Καθηγητής, Οικονομική του Χώρου με έμφαση στην Οικονομική των Αστικών Κέντρων, Τμήμα Οικονομικής & Περιφερειακής Ανάπτυξης,
Πάντειο Πανεπιστήμιο

Δημήτριος Μπάλλας
Καθηγητής, Οικονομική Γεωγραφία, Τμήμα Οικονομικής Γεωγραφίας στη σχολή Χωρικών Επιστημών,
Πανεπιστήμιο Groningen

Κωνσταντίνος Ζαφείρης
Αναπληρωτής Καθηγητής, Δημογραφία, Τμήμα Ιστορίας και Εθνολογίας, Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης

Χρήστος Μπάγκαβος
Καθηγητής, Δημογραφία με έμφαση στην Κοινωνική και Συγκριτική Δημογραφία, Τμήμα Κοινωνικής Πολιτικής, Πάντειο Πανεπιστήμιο

Μαρί-Νοέλ Ντυκέν
Καθηγήτρια, Στατιστικές και Οικονομετρικές Μέθοδοι Χωρικής Ανάλυσης, Τμήμα Μηχανικών Χωροταξίας, Πολεοδομίας και Περιφερειακής Ανάπτυξης, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Χρίστος Χαλκιάς
Καθηγητής, Αντιπρύτανης Έρευνας, Ανάπτυξης και Δια-βίου Εκπαίδευσης, Συστήματα Γεωγραφικών Πληροφοριών και Εφαρμοσμένη Γεωγραφία, Τμήμα Γεωγραφίας, Χαροκόπειο Πανεπιστήμιο

Η έγκριση της διδακτορικής διατριβής από το τμήμα Γεωγραφίας του Χαροκοπείου Πανεπιστημίου δεν υποδηλώνει και αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα.

Για την εκπόνηση της παρούσας Διατριβής διατέθηκε χρηματοδότηση από το τμήμα Γεωγραφίας του Χαροκοπείου Πανεπιστημίου για τη συμμετοχή σε 2 διεθνή συνέδρια (Τουρκία, Καππαδοκία, EMR IBS 2015 & Μάλτα, Βαλέττα, SMTDA 2016).

Ο Παναγιώτης Ανδρεόπουλος δηλώνω υπεύθυνα ότι:

1) Είμαι ο κάτοχος των πνευματικών δικαιωμάτων της πρωτότυπης αυτής εργασίας και από όσο γνωρίζω η εργασία μου δε συκοφαντεί πρόσωπα, ούτε προσβάλει τα πνευματικά δικαιώματα τρίτων.

2) Αποδέχομαι ότι η ΒΚΠ μπορεί, χωρίς να αλλάξει το περιεχόμενο της εργασίας μου, να τη διαθέσει σε ηλεκτρονική μορφή μέσα από τη ψηφιακή Βιβλιοθήκη της, να την αντιγράψει σε οποιοδήποτε μέσο ή/και σε οποιοδήποτε μορφότυπο καθώς και να κρατά περισσότερα από ένα αντίγραφα για λόγους συντήρησης και ασφάλειας.

Δημογραφία είναι…

…το επιστημονικό πεδίο που βρίσκεται στο σημείο τομής
των κοινωνικών επιστημών και της βιολογίας,
θεμελιωμένη από τα ***Μαθηματικά*** και τη ***Στατιστική***
και συνδεδεμένη με την Πολιτική!

(J.W. Vaupel, 2001,

Κατά τη βράβευσή του με το Irene Taeuber Award)

Ευχαριστίες

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω την επιβλέπουσα της διατριβής μου, Αλεξάνδρα Τραγάκη, καθηγήτρια του Τμήματος Γεωγραφίας του Χαροκοπείου Πανεπιστημίου, για την ανάθεση του θέματος αλλά και για την πολύτιμη καθοδήγησή της καθ' όλη τη διάρκεια πραγματοποίησης της διατριβής. Την ευχαριστώ τόσο για την επιστημονική της καθοδήγηση, όσο και για τον χρόνο που αφιέρωσε, και τις ευκαιρίες που μου έδωσε να αποκτήσω διδακτική και ερευνητική εμπειρία όλα αυτά τα χρόνια.

Ιδιαιτέρως θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Καθηγητή του Τμήματος Οικονομικής και Περιφερειακής Ανάπτυξης του Παντείου Πανεπιστημίου Αντώνη Ροβολή, συνεπιβλέποντα της διδακτορικής μου διατριβής. Η επιστημονική του καθοδήγηση στην προσπάθεια εκπόνησης της διατριβής ήταν καθοριστική. Με τις επιστημονικές του γνώσεις βοήθησε στην αρτιότητα αυτής.

Ένα μεγάλο ευχαριστώ οφείλω και στον Καθηγητή Δημήτριο Μπάλλα του Τμήματος Χωρικών επιστημών του Πανεπιστημίου Groningen, που ως μέλος της τριμελούς επιτροπής συνέβαλε στην ολοκλήρωσή της διατριβής μου, παρόλο που το μεγαλύτερο χρονικό διάστημα βρίσκεται στο εξωτερικό. Επίσης, τους κ. Ζωγράφο Κωνσταντίνο (καθηγητής, τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων) και κ. Μπουρνέτα Απόστολο (καθηγητής, τμήμα Μαθηματικών, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών) θα ήθελα να τους ευχαριστήσω για τις βάσεις που μου έδωσαν στα Μαθηματικά και μετέπειτα στον τομέα Στατιστικής και Επιχειρησιακής Έρευνας στις προπτυχιακές και στις μεταπτυχιακές μου σπουδές, αντίστοιχα. Χωρίς αυτές τις βάσεις, η ολοκλήρωση της συγκεκριμένης διδακτορικής διατριβής θα ήταν πιο επίπονη.

Θέλω, επίσης, να ευχαριστήσω τον φίλο και συνεργάτη διδάκτορα του Χαροκοπείου Πανεπιστημίου Φραγκίσκο Μπερσίμη για την αδιάκοπη συνεργασία που είχαμε και συνεχίζουμε να έχουμε και τον συνάδελφο και φίλο Γεώργιο Αντωνόπουλο για τη βοήθεια που μου παρείχε κατά την πραγματοποίηση της διατριβής. Ευχαριστώ τον Χρήστο Πολυκρέτη, διδάκτορα του Χαροκοπείου Πανεπιστημίου για την πολύτιμη βοήθεια του σε τεχνικές δυσκολίες που αντιμετώπισα κατά τη συγγραφή της διατριβής σε επίπεδο κατασκευής χαρτών. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον υπ. διδάκτορα του Χαροκοπείου Πανεπιστημίου Ευάγγελο Παπαδιά, για την υποστήριξη που μου παρείχε στην ιστοσελίδα που κατασκευάστηκε στα πλαίσια της διδακτορικής διατριβής, αλλά και σε τεχνικές συμβουλές γενικότερα. Καθώς επίσης και την Δέσποινα Σακέλλη για την γλωσσική επιμέλεια κειμένου που πραγματοποίησε στην διατριβή.

Τέλος, ένα μεγάλο ευχαριστώ θα ήθελα να εκφράσω στην οικογένειά μου και ιδιαίτερα στη σύζυγό μου, Μαριάννα Καραθανάση, για τον σεβασμό που έδειξε στις επιλογές μου αλλά και την αδιάκοπη υποστήριξη της όλα τα χρόνια των σπουδών μου.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Περίληψη. 12
Abstract. 14
Κατάλογος Εικόνων. 16
Κατάλογος Πινάκων 17
Κατάλογος Σχημάτων 18
Κατάλογος Γραφημάτων. 19
Συντομογραφίες. 21
Εισαγωγή. 22
1. Ορισμοί και Βιβλιογραφική Ανασκόπηση. 25
1.1.1 Δημογραφία 29
1.1.2 Μαθηματική Δημογραφία και Στατιστική 32
1.2 Ανάλυση Επιβίωσης. 35
1.2.1 Πίνακες θνησιμότητας (Mortality tables) 35
1.2.2$_\alpha$ Εξομάλυνση Πινάκων Θνησιμότητας. 37
1.2.2$_\beta$ Επιλογή Μεθόδου Εξομάλυνσης. 38
1.2.3 Συνάρτηση Επιβίωσης (Survival function) 40
1.2.4 Συνάρτηση Κινδύνου (Hazard function) 41
Συνοψίζοντας. 43
2. Μελετώντας το φαινόμενο της Θνησιμότητας. 44
2.1 Νόμοι και μοντέλα θνησιμότητας. 44
2.2 Η χρονολογική εξέλιξη της Θνησιμότητας. 49
2.3 Στατιστική ανάλυση Θνησιμότητας μέσω του λογισμικού R. 51
2.4 Τα βασικά προβλήματα στη μοντελοποίηση Θνησιμότητας. 52
2.5 Χαρτογράφηση Θνησιμότητας. 54
2.5.1 Χαρτογραφία & Ανάλυση Θνησιμότητας 57
Συνοψίζοντας. 60
3. Οι Πιθανοθεωρητικές κατανομές στα μοντέλα Θνησιμότητας. 61
3.1 Βήτα κατανομή (*Beta distribution*) 63
3.2 Γενικευμένη Βήτα κατανομή (*Generalized Beta distribution*) 65
3.3 Μίξεις Βήτα κατανομής με μοντέλα Θνησιμότητας. 66
3.4 Beta Gompertz Generalized Makeham κατανομή. 68
3.4.1 Στατιστική προσέγγιση των παραμέτρων της BGGM κατανομής. 70
3.4.2 Δημογραφική ερμηνεία των παραμέτρων της BGGM κατανομής. 73

Συνοψίζοντας. 78
4. Στατιστικές ιδιότητες της προτεινόμενης BGGM κατανομής. 80
4.1 Η BGGM ως συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας. 80
4.2 Στατιστικές Ιδιότητες. 82
4.3 Μέθοδος εκτίμησης των παραμέτρων της BGGM κατανομής. 98
4.4 Στατιστικά κριτήρια επιλογής του κατάλληλου μοντέλου. 101
Συνοψίζοντας. 104
5. Εφαρμογή σε Ελληνικά δεδομένα. 105
5.1 Εφαρμογή της BGGM στη Βόρεια & Νότια Ελλάδα. 105
5.2 Εφαρμογή της BGGM σε δεδομένα θνησιμότητας 13 ετών: 2001 - 13. 118
5.3 Προσαρμογή των παραμέτρων της BGGM στα ελληνικά δεδομένα. 128
Συνοψίζοντας. 136
6. Εφαρμογή σε Ευρωπαϊκά δεδομένα. 137
6.1 Εφαρμογή της BGGM σε 22 χώρες της Ευρώπης 138
6.2 Χωροχρονική ανάλυση των παραμέτρων της BGGM. 159
6.3 Αποτύπωση Δημογραφικών τάσεων & προβολή στο μέλλον.
Περίοδος ανάλυσης: 2020 - 2045. 176
6.4 Χωρική Ομαδοποίηση ανά παράμετρο –
Μία διαφορετική προσέγγιση. 203
Συνοψίζοντας. 215
7. Ερευνητικά συμπεράσματα. 216
Ελληνική Βιβλιογραφία. 250
Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία. 251
Παράρτημα Α’. 262
Παράρτημα Β’. 312
Παράρτημα Γ’. 318

Περίληψη

Μόλις στο τέλος του Β΄ Παγκοσμίου πολέμου συνέτρεξαν οι απαραίτητες προϋποθέσεις ώστε η Δημογραφία να αναδειχθεί από ερευνητικό πεδίο σε αυτόνομη επιστήμη. Στις δεκαετίες που μεσολάβησαν η επιστήμη εμπλουτίζεται με νέες θεωρητικές και μεθοδολογικές προσεγγίσεις και η Δημογραφία αποκτά επιμέρους εξειδικεύσεις. Η σχέση μεταξύ οικονομίας και δημογραφίας αποτελεί ένα ανοικτό ζήτημα έρευνας και μελέτης παρά το πλήθος των αναφορών που έχουν γραφτεί σχετικά. Ο ρόλος των δημογραφικών εξελίξεων στη διαμόρφωση του κοινωνικού τοπίου μιας χώρας αλλά και στη διαμόρφωση των διεθνών σχέσεων και ισορροπιών έρχεται εμφατικά στην επικαιρότητα. Παράλληλα τα τελευταία χρόνια αναβιώνει το ενδιαφέρον στη μαθηματική δημογραφία και τη μοντελοποίηση των δημογραφικών φαινομένων λαμβάνοντας υπόψιν τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ περιβαλλοντικών και κοινωνικών μεταβολών στη δημογραφική συμπεριφορά.

Το αντικείμενο της διδακτορικής διατριβής τοποθετείται στην τομή της Δημογραφίας και της Στατιστικής. Σκοπός είναι η μαθηματική μοντελοποίηση της θνησιμότητας και η περαιτέρω εφαρμογή της σε επίπεδο γεωγραφικής ανάλυσης προκειμένου να αποτελέσει ένα κατάλληλο επιστημονικό εργαλείο ερμηνείας της ανθρώπινης θνησιμότητας και φιλοδοξώντας να γίνει «πιλότος έρευνας» στη σωστή διαχείριση των δημογραφικών προκλήσεων του 21ου αιώνα. Η ανάλυση των δημογραφικών δεδομένων θνησιμότητας με χρήση πιθανοθεωρητικών κατανομών, δύναται να συμβάλει στην «ανάγνωση» των πληθυσμιακών μελλοντικών προβολών δίνοντας τις κατάλληλες δημογραφικές προγνώσεις σχετικά με τη μελλοντική ανάπτυξη του πληθυσμού μιας περιοχής κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες εξέλιξης της δημογραφικής συνιστώσας, όπως αυτής της θνησιμότητας.

Η διδακτορική διατριβή αποτελείται από 3 μεγάλες θεματικές ενότητες. Στην πρώτη ενότητα, γίνεται αναφορά στους όρους της μαθηματικής Δημογραφίας, της στατιστικής, των πινάκων και των νόμων Θνησιμότητας από το παρελθόν έως σήμερα και διατυπώνεται η μοντελοποίηση της θνησιμότητας από τα αντίστοιχα μαθηματικά μοντέλα με τις αντίστοιχες μεθόδους εξομάλυνσης. Στη δεύτερη θεματική ενότητα, η οποία αποτελεί το κεντρικό μέρος της έρευνας, εισάγονται έννοιες πιθανοθεωρητικών κατανομών που συνέβαλαν στη διαμόρφωση του προτεινόμενου μοντέλου Θνησιμότητας. Συγκεκριμένα, στη ενότητα αυτή παρουσιάζεται η Beta Gompertz Generalized Makeham κατανομή (Andreopoulos et al., 2019) με τις αντίστοιχες 6 παραμέτρους της. Σε κάθε μία από τις έξι παραμέτρους, αποδίδεται και μια συγκεκριμένη

δημογραφική ερμηνεία, η οποία με τη σειρά της παρέχει μια χρήσιμη προοπτική για την κατανόηση της επίδρασης της ηλικίας και του χρόνου στην ανθρώπινη θνησιμότητα (Andreopoulos et al., 2019). Παράλληλα μελετώνται και οι στατιστικές ιδιότητες της νέας κατανομής. Η τρίτη θεματική ενότητα περιλαμβάνει την εφαρμογή της κατανομής *BGGM* σε δεδομένα από διαφορετικές ευρωπαϊκές χώρες και σε διαφορετικές χρονικές στιγμές με μικρότερο (1993 – 2013) και μεγαλύτερο (1960 – 2045) εύρος, προκειμένου να αξιολογηθεί ο τρόπος με τον οποίο οι τιμές των παραμέτρων ποικίλλουν ανά γεωγραφική περιοχή και χρονική περίοδο. Η χρονολογική ανάλυση εφαρμόζεται από το 1960 έως το 2013 (παρελθόν), από το 2010 έως το 2017 (παρόν – εκτίμηση παραμέτρων) και από το 2017 έως το 2045 (μελλοντική πρόβλεψη). Τα δεδομένα θνησιμότητας που χρησιμοποιήθηκαν, αντλήθηκαν από την Human Mortality Database (http://www.mortality.org/) για όλα τα έτη.

Έγινε επίσης, προσπάθεια να μελετηθεί η τάση ή (και) η πορεία που ακολουθεί η θνησιμότητα, ακολουθώντας τις τρέχουσες κοινωνικοπολιτικές εξελίξεις (αντίστοιχος παραλληλισμός των αποτελεσμάτων του μοντέλου με την πανδημία COVID-19). Ελήφθησαν υπόψη και δεδομένα ασθενειών, σύμφωνα πάντα με όσα μπορούν να καταγραφούν σε επίσημο επίπεδο (ΕΛ.ΣΤΑΤ. & Eurostat). Παράλληλα το σύνολο των δεδομένων θνησιμότητας με τις αντίστοιχες εκτιμήσεις των παραμέτρων είναι διαθέσιμα στην ιστοσελίδα https://veegee.shinyapps.io/panagiotis_phd/ η οποία δημιουργήθηκε για την άμεση οπτικοποίηση των αποτελεσμάτων τα οποία συνεχώς ανανεώνονται και επικαιροποιούνται.

Λέξεις κλειδιά: Δημογραφία, Μοντελοποίηση θνησιμότητας, BGGM κατανομή, Προβολές θνησιμότητας, Πιθανοθεωρητικά μοντέλα

Abstract

Only at the end of World War II all the necessary conditions were present for Demography to emerge from a research field into an autonomous science. In the intervening decades, science is enriched with new theoretical and methodological approaches and Demography acquires individual specializations. The relationship between economics and demography constitutes an open issue of research and study despite the number of reports that have been written about it. The role of demographic developments in configuring the social landscape of a country but also in shaping international relations and balances is emphatically seasonableness. At the same time in recent years the interest in mathematical demography and the modeling of demographic phenomena is reviving taking into account the interactions between environmental and social changes in demographic behavior.

The subject of this doctoral dissertation is placed in the section Demography and Statistics. The aim is the mathematical modeling of mortality and its further application at the level of geographical analysis in order to be an appropriate scientific tool for interpreting human mortality and aspiring to become a "research pilot" in the proper management of the demographic challenges of the 21st century. The analysis of demographic data on mortality using probabilistic distributions can contribute to the "reading" of future population projections by giving the appropriate demographic forecasts for the future development of the population of an area under specific conditions of evolution of the demographic component, such as mortality.

The doctoral dissertation consists of 3 main thematic sections. In the first section, a reference to the terms of mathematical demography, statistics, tables and laws of mortality from the past to the present and defines the modeling of mortality by the corresponding mathematical models with the corresponding methods of smoothing. In the second thematic unit, which is the central part of the research, concepts of probabilistic distributions that contributed to the formation of the proposed Mortality model are introduced. Specifically, this section presents the Beta Gompertz Generalized Makeham distribution (Andreopoulos et al., 2019) with its respective 6 parameters. For each of the six parameters a specific demographic interpretation is given, which provides a useful perspective for understanding the effect of age and time on human mortality (Andreopoulos et al., 2019). At the same time, the statistical properties of the new distribution are studied. The third section includes the application of BGGM distribution to data from different European countries and at different times with smaller (1993 - 2013) and larger

range (1960 - 2045), in order to evaluate the way in which the parameters of the parameters vary spatially. and time. The chronological analysis is applied from 1960 to 2013 (past), from 2013 to 2020 (present – parameters estimation) and from 2020 to 2045 (parameters prediction). The mortality data used is provided by the human mortality database (http://www.mortality.org/) for all years.

An attempt was also made to study the trend and the course of mortality following the current socio-political developments (corresponding parallel of the model results with the COVID-19 pandemic). Disease data were also taken into account, always according to what can be recorded at an official level (EL.STAT. & Eurostat). At the same time, all the mortality data with the corresponding parameter estimates are available on the website https://veegee.shinyapps.io/panagiotis_phd/ which was created for the immediate visualization of the results which are constantly updated and validated.

Keywords: Demography, Mortality modeling, BGGM distribution, mortality projections, Probabilistic models

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΕΙΚΟΝΩΝ

Εικ. 1: Χάρτης διοικητικής διαίρεσης της Ελλάδας. . . . . σ. 56
Εικ. 2: Χαρτογραφικά επίπεδα. . . . . σ. 58
Εικ. 3: Χαρτογραφικές απεικονίσεις των εκτιμήσεων των παραμέτρων για τα δεδομένα θνησιμότητας της Ελλάδας, για άνδρες και για γυναίκες (2001, 2008 & 2013). . . . . σ. 135
Εικ. 4: Χαρτογραφικές απεικονίσεις των εκτιμήσεων των παραμέτρων για τα δεδομένα θνησιμότητας των 22 χωρών της Ε.Ε., για άνδρες και για γυναίκες (1993, 2003 & 2013). .σ. 157
Εικ. 5: Γράφημα Pareto για άνδρες, όπου απεικονίζεται η κατανομή των χωρών σε φθίνουσα σειρά συχνότητας ως προς τον συντελεστή Alpha για την κάθε παράμετρο. . . . . σ. 183
Εικ. 6: Γράφημα Pareto για γυναίκες, όπου απεικονίζεται η κατανομή των χωρών σε φθίνουσα σειρά συχνότητας ως προς τον συντελεστή Alpha για την κάθε παράμετρο. . . . . σ. 184
Εικ. 7: Γραφική απεικόνιση των δεικτών σφάλματος MASE και SMAPE για την κάθε παράμετρο στους άνδρες. Απεικόνιση των 22 χωρών που συμμετέχουν στην ανάλυση. . . . . σ. 187
Εικ. 8: Γραφική απεικόνιση των δεικτών σφάλματος MASE και SMAPE για την κάθε παράμετρο στις γυναίκες. Απεικόνιση των 22 χωρών που συμμετέχουν στην ανάλυση. . . . . .σ. 188
Εικ. 9: Γραφική απεικόνιση των δεικτών σφάλματος MAE και MSE για την κάθε παράμετρο στους άνδρες. Απεικόνιση των 22 χωρών που συμμετέχουν στην ανάλυση. . . . . σ. 189
Εικ. 10: Γραφική απεικόνιση των δεικτών σφάλματος MAE και MSE για την κάθε παράμετρο στις γυναίκες. Απεικόνιση των 22 χωρών που συμμετέχουν στην ανάλυση. . . . . .σ. 190
Εικ. 11: Οι σχετικές θέσεις των χωρών για την παράμετρο ϑ (θετική = πράσινο ή αρνητική = κόκκινο) . . . . . .σ. 193
Εικ. 12: Οι σχετικές θέσεις των χωρών για την παράμετρο $\boldsymbol{\xi}$ (θετική = πράσινο ή αρνητική = κόκκινο) . . . . . .σ. 195
Εικ. 13: Οι σχετικές θέσεις των χωρών για την παράμετρο $\boldsymbol{\kappa}$ (θετική = πράσινο ή αρνητική = κόκκινο) . . . . . .σ. 198
Εικ. 14: Οι σχετικές θέσεις των χωρών για την παράμετρο $\boldsymbol{\lambda}$(θετική = πράσινο ή αρνητική = κόκκινο) . . . . . .σ. 202
Εικ. 15: Γράφημα Pareto για άνδρες & γυναίκες, όπου απεικονίζεται η κατανομή των χωρών σε φθίνουσα σειρά συχνότητας ως προς την παράμετρο ϑ. . . . . σ. 204
Εικ. 16: Γράφημα Pareto για άνδρες & γυναίκες, όπου απεικονίζεται η κατανομή των χωρών σε φθίνουσα σειρά συχνότητας ως προς την παράμετρο ξ. . . . . σ. 205
Εικ. 17: Γράφημα Pareto για άνδρες & γυναίκες, όπου απεικονίζεται η κατανομή των χωρών σε φθίνουσα σειρά συχνότητας ως προς την παράμετρο κ. . . . . σ. 206
Εικ. 18: Γράφημα Pareto για άνδρες & γυναίκες, όπου απεικονίζεται η κατανομή των χωρών σε φθίνουσα σειρά συχνότητας ως προς την παράμετρο λ. . . . . σ. 209

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Πίν. 1: Πίνακας συνάρτησης Gompertz κατανομών των pdf, cdf & hazard. . . . . σ. 47
Πίν. 2: Εκτιμήσεις των παραμέτρων για τα έτη 2001, 2011 και 2012 (GR - Males). . . . . σ. 75
Πίν. 3: Εκτιμήσεις των παραμέτρων για τα έτη 2001, 2011 και 2012 (GR - Females). . . . . σ. 76
Πίν. 4: Αριθμητική ανάλυση της BGGM κατανομής. . . . . σ. 93
Πίν. 5: Στατιστικά κριτήρια καλής προσαρμογής. Άνδρες, Βόρεια Ελλάδα. . . . . .σ. 115
Πίν. 6: Στατιστικά κριτήρια καλής προσαρμογής. Άνδρες, Νότια Ελλάδα. . . . . .σ. 115
Πίν. 7: Στατιστικά κριτήρια καλής προσαρμογής. Γυναίκες, Βόρεια Ελλάδα . . . . . .σ. 115
Πίν. 8: Στατιστικά κριτήρια καλής προσαρμογής. Γυναίκες, Νότια Ελλάδα. . . . . .σ. 115
Πίν. 9: Τα κριτήρια AIC, BIC, log – likelihood και R^2_{pseudo} των BGGM και GM (2001 – 2013, Males Greece) . . . . . σ. 120
Πίν. 10: Τα κριτήρια AIC, BIC, log – likelihood και R^2_{pseudo} των BGGM και GM (2001 – 2013, Females Greece) . . . . . σ. 121
Πίν. 11: Εκτιμήσεις των 4 παραμέτρων της BGGM κατανομής, από τον αλγόριθμο που υλοποιήθηκε στην R. Αφορά θνησιμότητα ανδρών για τα έτη 2001 ως 2013, Ελλάδα . . . σ. 128
Πίν. 12: Εκτιμήσεις των 4 παραμέτρων της BGGM κατανομής, από τον αλγόριθμο που υλοποιήθηκε στην R. Αφορά θνησιμότητα γυναικών για τα έτη 2001 ως 2013, Ελλάδα . . σ. 130
Πίν. 13: Οι εκτιμήσεις των 4 παραμέτρων για τις 22 χώρες της ανάλυσης (Males 1993 – 2013) . . . . . σ. 306
Πίν. 14: Οι μέσες τιμές των 22 χωρών για τους δείκτες σφάλματος MASE & SMAPE για τις 4 παραμέτρους. . . . . .σ. 186
Πίν. 15: Οι μέσες τιμές των 22 χωρών για τους δείκτες σφάλματος MAE & MSE για τις 4 παραμέτρους. . . . . .σ. 189
Πίν. 16: Ομαδοποίηση των 22 χωρών, σύμφωνα με την γεωγραφική τους θέση. . . . . σ. 191
Πίν. 17: Χαρακτηρισμός της παραμέτρου ϑ ως προς την έκβασή της. . . . . .σ. 192
Πίν. 18: Χαρακτηρισμός της παραμέτρου ξ ως προς την έκβασή της. . . . . .σ. 196
Πίν. 19: Χαρακτηρισμός της παραμέτρου κ ως προς την έκβασή της. . . . . .σ. 197
Πίν. 20: Χαρακτηρισμός της παραμέτρου λ ως προς την έκβασή της. . . . . .σ. 200
Πίν. 21: Άμεση σύγκριση της *Beta Gompertz Generalized Makeham* κατανομής με τους πιο γνωστούς νόμους θνησιμότητας, από το 1725 έως το 1992. . . . . .σ. 238
Πίν. 22: Εκτιμήσεις της παραμέτρου ϑ (βρεφική θνησιμότητα) για επιλεγμένα έτη, τόσο για άνδρες όσο και για γυναίκες. . . . . σ. 240
Πίν. 23: Εκτιμήσεις της παραμέτρου ξ (πορεία γήρανσης) για επιλεγμένα έτη, τόσο για άνδρες όσο και για γυναίκες. . . . . σ. 241
Πίν. 24: Εκτιμήσεις της παραμέτρου κ (ατομική θνησιμότητα) για επιλεγμένα έτη, τόσο για άνδρες όσο και για γυναίκες. . . . . σ. 242
Πίν. 25: Εκτιμήσεις της παραμέτρου λ (συλλογική θνησιμότητα) για επιλεγμένα έτη, τόσο για άνδρες όσο και για γυναίκες. . . . . σ. 243
Πίν. 26: Χρονική αποτύπωση των γεγονότων που μπορεί να επηρέασαν την κάθε χώρα από το 1960 έως το 2020. . . . . .σ. 249

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Σχ. 1: Τα πεδία της Δημογραφικής ανάλυσης. . . . . σ. 31

Σχ. 2: Οι τιμές της παραμέτρου ϑ, όπως διαμορφώνονται από σχετικές αλλαγές. . . . . .σ. 218

Σχ. 3: Οι τιμές της παραμέτρου ξ, όπως διαμορφώνονται από σχετικές αλλαγές. . . . . .σ. 218

Σχ. 4: Οι τιμές της παραμέτρου κ, όπως διαμορφώνονται από σχετικές αλλαγές. . . . . .σ. 219

Σχ. 5: Οι τιμές της παραμέτρου λ, όπως διαμορφώνονται από σχετικές αλλαγές. . . . . .σ. 219

Σχ. 6: Οι τιμές της παραμέτρου α, όπως διαμορφώνονται από σχετικές αλλαγές. . . . . .σ. 220

Σχ. 7: Οι τιμές της παραμέτρου β, όπως διαμορφώνονται από σχετικές αλλαγές. . . . . .σ. 220

Σχ. 8: Η θέση των παραμέτρων θ, ξ, κ, λ στην καμπύλη θνησιμότητας. . . . . .σ. 239

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Γράφ. 1a: Η ανθρώπινη θνησιμότητα, στη Γαλλία και στη Σουηδία το 2000. . . . . σ. 26
Γράφ. 1b: Σε λογαριθμική κλίμακα η θνησιμότητα, σε Γαλλία & Σουηδία το 2000. . . . . .σ. 28
Γράφ. 2: Η πορεία που ακολουθεί η συνάρτηση κινδύνου (Hazard function). . . . . .σ. 42
Γράφ. 3: Νόμος Θνησιμότητας του Gompertz (Greece 2011 – males). σ.48
Γράφ. 4: Το «φαινόμενο της συμπίεσης της Θνησιμότητας». . . . . σ. 50
Γράφ. 5: Γραφική απεικόνιση ενός συστήματος θνησιμότητας. . . . . .σ. 53
Γράφ. 6: Χαρτογράφηση στην Broad Street, το 1854. . . . . .σ. 61
Γράφ. 7, 8, & 9: Η δυναμική της πυκνότητας πιθανότητας της συνάρτησης Βήτα. . . . . σ. 64
Γράφ. 10: Η προτεινόμενη Beta Gompertz Generalized Makeham κατανομή. . . . . σ. 69
Γράφ. 11: Οι διαφορετικές επιδράσεις των παραμέτρων, στην νέα συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (BGGM). . . . . .σ. 72
Γράφ. 12: Η πιθανότητα θανάτου της BGGM (GR - Males & Females). . . . . σ. 78
Γράφ. 13*:* Η γραφική παράσταση της σ.π.π. της *BGGM* κατανομής, κατ΄αντιστοιχία με την *f(x)* και την αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F(x)$. . . . . σ. 84
Γράφ. 14: Η σ.π.π της κατανομής BGGM με χρήση επιλεγμένων τιμών παραμέτρων. . . . . σ. 86
Γράφ. 15: Η συνάρτηση Κινδύνου της BGGM κατανομής με χρήση επιλεγμένων τιμών. . . σ. 88
Γράφ. 16: Όρια της BGGM συνάρτησης. . . . . .σ. 90
Γράφ. 17: Η κόκκινη γραμμή παρουσιάζει τα αθροίσματα της δυναμοσειράς. . . . . .σ. 92
Γράφ. 18: Στατιστικοί υπολογισμοί της BGGM κατανομής. . . . . σ. 93
Γράφ. 19a: Ειδική ηλικιακή απεικόνιση με το προφίλ των καταλοίπων (G). . . . . .σ. 99
Γράφ. 19b: Συσχετίσεις μεταξύ των καταλοίπων του μοντέλου Gompertz. . . . . σ. 99
Γράφ. 19c: Ειδική ηλικιακή απεικόνιση με το προφίλ των καταλοίπων (BGGM). . . . . .σ. 100
Γράφ. 20: Αρχικές εκτιμήσεις με εξομαλυμένες τιμές-μέθοδο Splines. . . . . .σ. 110
Γράφ. 21$^{\alpha}$: Η BGGM για άνδρες 2011 (Βόρεια Ελλάδα). . . . . .σ. 114
Γράφ. 21$^{\beta}$: Η BGGM για άνδρες 2011 (Νότια Ελλάδα). . . . . σ. 114
Γράφ. 22$^{\alpha}$: Η BGGM για γυναίκες 2011 (Βόρεια Ελλάδα). . . . . .σ. 114
Γράφ. 22$^{\beta}$: Η BGGM για γυναίκες 2011 (Νότια Ελλάδα). . . . . .σ. 114
Γράφ. 23: Η BGGM κατανομή σε σύγκριση με την GompertzMakeham κατανομή για τα έτη 2001 ως και το 2013. . . . . .σ. 126
Γράφ. 24: Γραφικές απεικονίσεις των εκτιμήσεων των παραμέτρων για τα δεδομένα θνησιμότητας της Ελλάδας, για άνδρες και για γυναίκες. . . . . .σ. 133
Γράφ. 25α: Οι τιμές της εκτιμώμενης παραμέτρου $\boldsymbol{\theta}$, για τον ανδρικό πληθυσμό για τις 22 χώρες. . . . . σ. 164
Γράφ. 25b: Οι τιμές της εκτιμώμενης παραμέτρου $\boldsymbol{\theta}$, για τον γυναικείο πληθυσμό για τις 22 χώρες. . . . . σ. 165
Γράφ. 26α: Οι τιμές της εκτιμώμενης παραμέτρου $\boldsymbol{\xi}$, για τον ανδρικό πληθυσμό για τις 22 χώρες. . . . . σ. 167
Γράφ. 26b: Οι τιμές της εκτιμώμενης παραμέτρου $\boldsymbol{\xi}$, για τον γυναικείο πληθυσμό για τις 22 χώρες. . . . . σ. 168

Γράφ. 27α: Οι τιμές της εκτιμώμενης παραμέτρου $\boldsymbol{\kappa}$, για τον ανδρικό πληθυσμό για τις 22 χώρες. . . . . σ. 170
Γράφ. 27b: Οι τιμές της εκτιμώμενης παραμέτρου $\boldsymbol{\kappa}$, για τον γυναικείο πληθυσμό για τις 22 χώρες. . . . . σ. 171
Γράφ. 28α: Οι τιμές της εκτιμώμενης παραμέτρου $\boldsymbol{\lambda}$, για τον ανδρικό πληθυσμό για τις 22 χώρες. . . . . σ. 173
Γράφ. 28b: Οι τιμές της εκτιμώμενης παραμέτρου $\boldsymbol{\lambda}$, για τον γυναικείο πληθυσμό για τις 22 χώρες. . . . . σ. 175
Γράφ. 29: Προσέγγιση της προβολής θνησιμότητας στα πραγματικά δεδομένα ενδεικτικά για 6 χώρες, για τα έτη 2010 - 17. . . . . .σ. 182
Γράφ. 30: Η χρονική εξέλιξη της βρεφικής θνησιμότητας για τις 22 χώρες της ΕΕ και για τα δύο φύλα στο παρελθόν, το παρόν και το μέλλον. . . . . σ. 222
Γράφ. 31: Η χρονική εξέλιξη του ποσοστού γήρανσης για τις 22 χώρες της ΕΕ και για τα δύο φύλα στο παρελθόν, το παρόν και το μέλλον. . . . . σ. 225
Γράφ. 32: Η χρονική εξέλιξη της ατομικής θνησιμότητας για τις 22 χώρες της ΕΕ και για τα δύο φύλα στο παρελθόν, το παρόν και το μέλλον. . . . . σ. 228
Γράφ. 33: Η χρονική εξέλιξη της συλλογικής θνησιμότητας για τις 22 χώρες της ΕΕ και για τα δύο φύλα στο παρελθόν, το παρόν και το μέλλον. . . . . .σ. 231
Γράφ. 34: Προσέγγιση της προβολής θνησιμότητας στα πραγματικά δεδομένα για τις 22 χώρες και για τα έτη 2010 - 17. . . . . .σ. 317

ΣΥΝΤΟΜΟΓΡΑΦΙΕΣ

ΕΛ/ΛΑΚ	Ελεύθερο Λογισμικό/Λογισμικό Ανοικτού Κώδικα
ΓΣΠ	Γεωγραφικά Συστήματα Πληροφοριών
GIS	Geographical Information Systems
GPS	Global Position System
ΕΛ.ΣΤΑΤ.	Ελληνική Στατιστική Αρχή
HMD	Human Mortality Database
Eurostat	European Statistical Office
σ.π.π.	Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας
pdf	Probability Density Function
α.σ.κ	Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής
cdf	Cumulative Density Function
AIC	Akaike Information Criterion
BIC	Bayesian Criterion Information
logLik	Log-likelihood (Λογαριθμική πιθανοφάνεια)
CDR	Crude Death Rate (Αδρός Δείκτης Θνησιμότητας)
LS	Least Squares (Ελαχιστοποίηση τετραγώνων)
ML	Maximum Likelihood (Μέγιστη Πιθανοφάνεια)
MLE	Maximum Likelihood Estimation (Εκτίμηση Μέγιστης Πιθανοφάνειας)
GLM	Generalized Linear Model
G	Gompertz
GM	Gompertz Makeham
GGM	Generalized Gompertz Makeham
BG	Beta Gompertz distribution
BGM	Beta Gompertz Makeham distribution
BGGM	Beta Gompertz Generalized Makeham distribution
dbeta	Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας της Βήτα κατανομής στην R
pbeta	Αθροιστική Πιθανότητας της Βήτα κατανομής στην R
rbeta	Παραγωγή «τυχαίων» αριθμών από την κατανομή Βήτα στην R

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Με τις εξελίξεις να είναι σε όλους τους τομείς ραγδαίες, ο 20ος αιώνας αποτελεί έναν από τους συναρπαστικότερους αιώνες στην ανθρώπινη ιστορία. Ένα από τα σημαντικότερα επιτεύγματα υπήρξε αναμφισβήτητα η κατακόρυφη αύξηση του προσδόκιμου ζωής. Παρά τις σημαντικές γεωγραφικές διαφοροποιήσεις, όλοι οι άνθρωποι ανεξαρτήτως φυλής ή χώρας καταγωγής είδαν την ποιότητα ζωής τους να βελτιώνεται και τη διάρκεια αυτής να επιμηκύνεται σημαντικά. Η τεράστια πρόοδος στην αντιμετώπιση των λοιμωδών νοσημάτων άλλαξε τον χάρτη των επικίνδυνων για τη ζωή ασθενειών, τροποποίησε τις κύριες αιτίες θανάτου ανά ηλικία και αύξησε τις πιθανότητες επιβίωσης σε όλα τα στάδια της ζωής για άνδρες και γυναίκες. Το δημογραφικό αποτύπωμα αυτής της πρωτοφανούς ανθρώπινης επιτυχίας ήταν η ραγδαία αύξηση του παγκόσμιου πληθυσμού και οι αλλαγή της ηλικιακής δομής του. Ήδη από τα τέλη της δεκαετίας του 1960, αργή στην αρχή αλλά σταθερά επιταχυνόμενη, εξελίσσεται η πορεία της δημογραφικής γήρανσης. Η δημογραφική γήρανση καθίσταται ένα κεντρικό ζήτημα που προκαλεί προβληματισμό ως προς τις οικονομικές συνέπειες που σχετίζονται με την ανάπτυξη της σύγχρονης κοινωνίας. Βιολογικά ως γήρανση ορίζεται: *η αναπόφευκτη προοδευτική πτώση της φυσιολογικής βιολογικής λειτουργίας με την παράλληλη αύξηση της ηλικίας που συνδέεται από μείωση της γονιμότητας και αύξηση της θνησιμότητας* (Rose, 1991, Bronikowski and Flatt, 2010).

Δημογραφικά, η γήρανση περιγράφεται από την αύξηση της ποσοστιαίας συμμετοχής των ηλικιωμένων (άνω των 65 ετών) σε έναν πληθυσμό, με παράλληλη αύξηση της πιθανότητας θανάτου και εκφράζεται μαθηματικά από πολλούς αναγνωρισμένους νόμους θνησιμότητας όπως των Gompertz, Gompertz - Makeham κλπ. Ως εκ τούτου, αρκετές μελέτες προσπαθούν να αναλύσουν τη δυναμική της θνησιμότητας, προκειμένου να κατανοήσουν τις διαδικασίες που αποτελούν τη βάση της γήρανσης του ανθρώπου (Avraam et al., 2013) και κατ΄επέκταση του φαινομένου της θνησιμότητας. Η μαθηματική περιγραφή της θνησιμότητας κατά ηλικία και φύλο αναθεωρείται και νέα μοντέλα προτείνονται για την καλύτερη προσέγγιση της πιθανότητας θανάτου στις υψηλές ηλικίες.

Κι ενώ πριν το τέλος του 20ου αιώνα, ο κόσμος πίστεψε πως ο πόλεμος κατά των επιδημιών είχε οριστικά κερδηθεί και οι επιστήμονες έστρεφαν το ενδιαφέρον τους στην αντιμετώπιση των καρδιαγγειακών νοσημάτων και νεοπλασματικών ασθενειών, κατά τον 21ο αιώνα οι συνθήκες αλλάζουν και τα δεδομένα ανατρέπονται με την εμφάνιση επιδημιών και με

κορύφωση την εξάπλωση της παγκόσμιας πανδημίας SARS-CoV-2. Επιβεβαιώνεται για άλλη μια φορά, πόσο υπεροπτική μπορεί να γίνει η στάση του ανθρώπου απέναντι στη φύση και τη ζωή. Η εξέλιξη της ανθρώπινης θνησιμότητας προκύπτει πως δεν είναι γραμμική ενώ η συνεχής παρακολούθηση και αναθεώρηση των μοντέλων με βάση νέα δεδομένα και παρατηρήσεις αποδεικνύεται αναγκαία από δημογραφικής άποψης.

Η παρούσα διατριβή φιλοδοξεί να προσφέρει ένα εναλλακτικό εργαλείο μοντελοποίησης της ανθρώπινης θνησιμότητας και να συμβάλλει στην καλύτερη κατανόηση και περιγραφή των διαφοροποιήσεων της πιθανότητας θανάτου ανά ηλικία. Επιθυμεί να συμβάλει στην «ανάγνωση» των πληθυσμιακών μελλοντικών προβολών δίνοντας τις κατάλληλες δημογραφικές προγνώσεις σχετικά με τη μελλοντική ανάπτυξη του πληθυσμού μιας περιοχής κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες εξέλιξης της δημογραφικής συνιστώσας, όπως αυτής της θνησιμότητας.

Η διάρθρωση της διατριβής αποτελείται από 3 μεγάλες θεματικές ενότητες. Στην πρώτη ενότητα, περιλαμβάνονται τα κεφάλαια 1 και 2, όπου γίνεται σχετική αναφορά στους όρους της Δημογραφίας, της στατιστικής, των πινάκων και των νόμων Θνησιμότητας από το παρελθόν έως σήμερα και ορίζεται η μοντελοποίηση της θνησιμότητας από τα αντίστοιχα μαθηματικά μοντέλα.

Η δεύτερη θεματική ενότητα περιλαμβάνει τα κεφάλαια 3 και 4 τα οποία και αποτελούν τον βασικό κορμό της διατριβής. Στο κεφάλαιο 3 γίνεται μία εισαγωγή στις επιμέρους πιθανοθεωρητικές κατανομές που χρησιμοποιήθηκαν για τη διαμόρφωση του προτεινόμενου μοντέλου Θνησιμότητας. Συγκεκριμένα, στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται η *Beta Gompertz Generalized Makeham (BGGM)* κατανομή (Andreopoulos et al., 2019) με τις αντίστοιχες 6 παραμέτρους της, παρέχοντας μια ευέλικτη και επαρκή περιγραφή του ποσοστού θνησιμότητας του ανθρώπου. Κάθε μία από τις έξι παραμέτρους έχει μια συγκεκριμένη δημογραφική ερμηνεία δίνοντας μια χρήσιμη προοπτική για την κατανόηση της επίδρασης της ηλικίας και του χρόνου στην ανθρώπινη θνησιμότητα (Andreopoulos et al., 2019). Η ανίχνευση κοινών ποσοστών θνησιμότητας μεταξύ διαφόρων χωρών, σε όρους παραμέτρων, ερμηνεύεται δημογραφικά, όπως θα παρουσιαστεί στα επόμενα κεφάλαια. Στο κεφάλαιο 4, παρουσιάζονται οι μαθηματικές – στατιστικές ιδιότητες της προτεινόμενης κατανομής καθώς και οι τρόποι υπολογισμού των εκτιμήσεων τους.

Στην τρίτη θεματική ενότητα περιλαμβάνονται τα κεφάλαια 5, 6 και 7. Στα δύο πρώτα εξ’ αυτών, παρουσιάζεται η εφαρμογή της κατανομής BGGM σε δεδομένα από διαφορετικές

ευρωπαϊκές χώρες και διαφορετικές χρονικές περιόδους, προκειμένου να αξιολογηθεί ο τρόπος με τον οποίο οι τιμές των παραμέτρων ποικίλλουν χωρικά και χρονικά. Η χρονολογική ανάλυση εφαρμόζεται από το 1960 έως το 2013 (παρελθόν), από το 2010 έως το 2017 (παρόν – εκτίμηση μελλοντικών τάσεων με τα πραγματικά δεδομένα) και από το 2020 έως το 2045 (μελλοντική πρόβλεψη). Τέλος, το 7^{ο} κεφάλαιο περιλαμβάνει τα συνολικά ερευνητικά συμπεράσματα της παραπάνω μοντελοποίησης των δημογραφικών τάσεων.

ΚΕΦ.1: Ορισμοί και Βιβλιογραφική ανασκόπηση

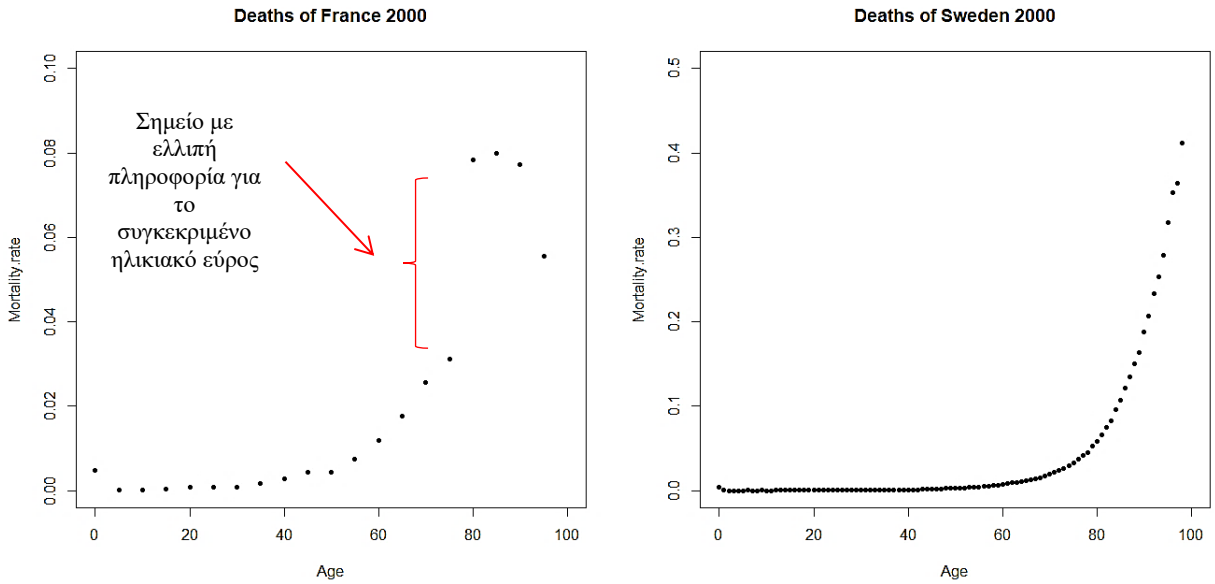
Η μελέτη της πορείας της θνησιμότητας στον κύκλο της ανθρώπινης ζωής έχει μια μακρά ιστορία, ενώ η ανάλυση της δυναμικής της ανθρώπινης θνησιμότητας κατά τη διάρκεια της πορείας της ζωής, αποτελεί στοιχείο έντονου επιστημονικού ενδιαφέροντος. Οι δημογραφικές συγκρίσεις μεταξύ των πληθυσμών ενδέχεται να αποκαλύψουν διαφορές στις αιτίες θνησιμότητας που μπορεί να σχετίζονται με ενδογενείς ή και εξωγενείς παράγοντες. Πολλοί ερευνητές μετά από τα πρωτόλεια έργα του Lexis (1878) και του Pearson (1897) θεωρούν ότι η θνησιμότητα σε διαφορετικές χρονικές περιόδους επηρεάζεται από διαφορετικούς παράγοντες, με τη γήρανση να παίζει καθοριστικό ρόλο μετά από την σεξουαλική ωρίμανση (Gompertz, 1825).

Οι πρώτες εκτιμήσεις της θνησιμότητας εξαρτώμενης από την ηλικία ήταν μάλλον φιλοσοφικές: σύμφωνα με το Lexis (1879) όλοι δύναται να ζουν το ίδιο χρονικό διάστημα - κανονικό μήκος ζωής – κάποιοι όμως πεθαίνουν νωρίτερα λόγω πιθανών ατυχημάτων. Διακρίνει έτσι τους «φυσιολογικούς» θανάτους, που συμβαίνουν λόγω βιολογικής φθοράς (γήρανση) και κατανέμονται σε ένα εύρος ηλικιών, από τους πρόωρους θανάτους των ενηλίκων και (κυρίως) των παιδιών. Η προσέγγιση του Pearson (1897) ήταν πιο επιστημονική: θεωρούσε τον θάνατο ως τυχαίο γεγονός και η στατιστική ανάλυση που έκανε στην ηλικιακή κατανομή του θανάτου στην Αγγλία (1871-1880) αποκάλυψε πέντε διαφορετικές φάσεις της ζωής (διαστήματα ηλικιών) που διαμορφώνουν την πιθανότητα θανάτου. Όμως οι λόγοι για τους οποίους η πιθανότητα θανάτου (ή η κατανομή θνησιμότητας) εξαρτάται από την ηλικία και θα πρέπει να ακολουθεί διαφορετική δυναμική σε διαφορετικά χρονικά διαστήματα αναφέρονταν μεν, αλλά δεν αναλύονταν σε βάθος.

Πρόσφατες μελέτες προσπαθούν να κατανοήσουν τους μηχανισμούς της θνησιμότητας που σχετίζονται με την ηλικία έχοντας ως βάση τις φυσιολογικές, μοριακές και γενετικές διεργασίες που συμβαίνουν στον ανθρώπινο οργανισμό. Αρκετές μελέτες επικεντρώνονται στην ανάλυση και την ορθή παρουσίαση των δεδομένων θνησιμότητας ως συνάρτηση της ηλικίας και του φύλου (Vaupel, 2005, Gavrilov και Gavrilova, 2003) εστιάζοντας στη στατιστική και στη δημογραφική ερμηνεία αυτών.

Ένα τέτοιο παράδειγμα παρουσιάζεται στο γράφημα 1a, αποτυπώνοντας την θνησιμότητα (ως αριθμός θανάτων ανά 1000 κατοίκους) για το έτος 2000, συναρτήσει της ηλικίας. Στη Γαλλία, η απεικόνιση έγινε εξετάζοντας δεδομένα που αφορούν πενταετείς ομάδες

ηλικιών. Αντίθετα στη Σουηδία για το ίδιο έτος, η απεικόνιση της θνησιμότητας έγινε εξετάζοντας μονοετείς ομάδες ηλικιών. Από τη σύγκριση αναδεικνύεται η μεγάλη σημασία που διαδραματίζει το επίπεδο της κατά ηλικία ανάλυσης στην στατιστική πληροφορία, αφού στη Γαλλία η απουσία λεπτομερούς πληροφορίας δίνει ελαφρώς παραπλανητικά αποτελέσματα. Η διαφορά με την Σουηδία δεν είναι τόσο μεγάλη όσο αφήνει να εννοηθεί το γράφημα με τις πενταετείς ομάδες ηλικιών.

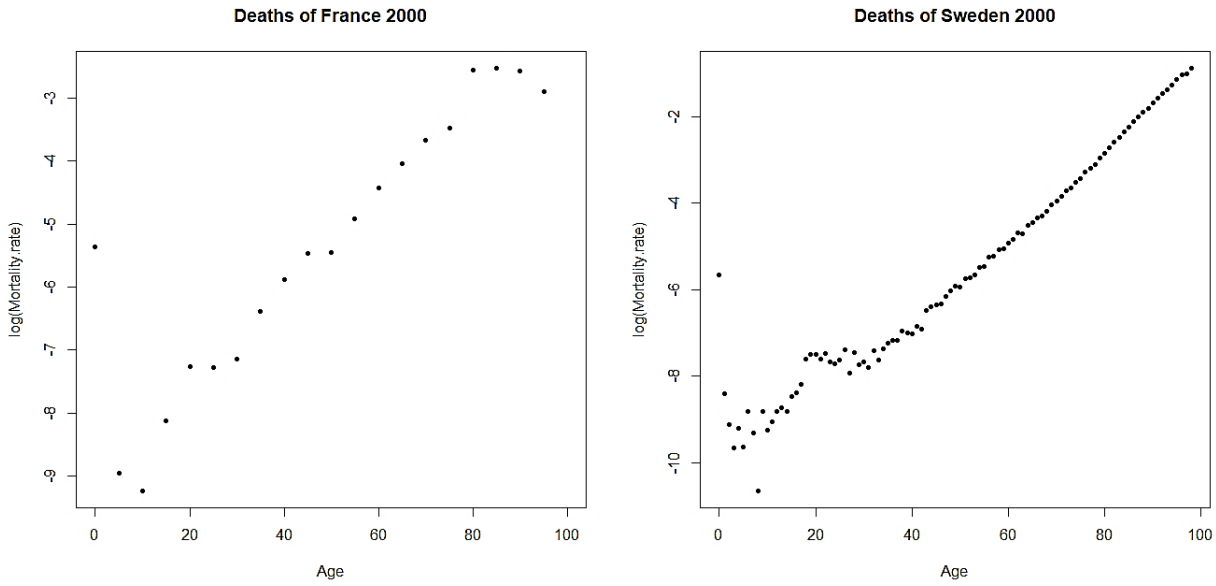


Γράφημα 1α. Η πορεία που ακολουθεί η ανθρώπινη θνησιμότητα, στη Γαλλία και στη Σουηδία το 2000. Στη Γαλλία η θνησιμότητα απεικονίζεται σε 5ετείς ομάδες ηλικιών, ενώ στη Σουηδία η θνησιμότητα απεικονίζεται σε μονοετείς ομάδες ηλικιών. Πηγή: HMD

Τα πραγματικά στοιχεία σχετικά με τη θνησιμότητα στους ανθρώπινους πληθυσμούς μπορούν να παρουσιαστούν σε διαφορετικές μορφές. Συνήθως απεικονίζονται ως λογάριθμος του ποσοστού θνησιμότητας σε σχέση με την ηλικία (βλ. γράφημα 1b), η οποία μπορεί να παρεμβληθεί με γραμμικό γράφημα εάν δίνεται από την εκθετική. Τα γραφήματα στο 1a και στο 1b, δείχνουν ότι το ποσοστό θνησιμότητας αυξάνεται με την ηλικία και αυτή η αύξηση είναι περίπου εκθετική. Οι αποκλίσεις από τον εκθετικό νόμο παρατηρούνται στις νεαρές (πριν από τα 32 έτη) και στις υψηλές (μετά από τα 95 έτη) ηλικίες.

Το ανώτατο όριο της θνησιμότητας (mortality plateau) που παρατηρείται προς το τέλος της ζωής (Wachter, 1999) είναι μία από τις ιδιαιτέρως ενδιαφέρουσες πτυχές της θνησιμότητας του ανθρώπινου πληθυσμού. Στη γεροντολογία, η επιβράδυνση της θνησιμότητας (mortality

plateau) που παρατηρείται στο τέλος της ζωής και τι είναι αυτό που την επηρεάζει και τι την διαμορφώνει, έχει προκαλέσει το ενδιαφέρον αρκετών μελετητών παρουσιάζοντας έρευνες για διαφορετικές γεωγραφικές περιοχές (Barbi et al., 2018 και Gavrilov, et al., 2019) ή ακόμα και διαμορφώνοντας νέα εξειδικευμένα παραμετρικά μοντέλα: όπως το CoDe model (de Beer et al., 2016) που εξετάζουν το φαινόμενο αυτό. Η επιβράδυνση της θνησιμότητας, ορίζεται ως το ποσοστό επικινδυνότητας το οποίο αυξάνεται μεν, αλλά με μειωμένο ρυθμό στο τέλος της ζωής αντί να αυξάνεται εκθετικά όπως συνέβαινε στις νεότερες ηλικίες σύμφωνα με τον νόμο Gompertz. Για τον λόγο αυτό συχνά στα γραφήματα θνησιμότητας παρατηρείται αυτή η «καμπή» στις ηλικίες άνω των 85 ετών. Η Wrigley-Field, E. (2014) υποστήριξε πως το φαινόμενο της επιβράδυνσης της θνησιμότητας θα πρέπει να απασχολεί τον κάθε ερευνητή που εξετάζει, αναλύει και επεξεργάζεται δεδομένα ανθρώπινης θνησιμότητας, αφού μπορεί ορισμένες φορές, να υποεκτιμηθεί το αποτέλεσμα ενός μαθηματικού μοντέλου δίνοντας λανθασμένο χρονοδιάγραμμα επιβράδυνσης της θνησιμότητας. Ωστόσο, μια πρόσφατη μελέτη, των Gavrilov & Gavrilova (2011), καταλήγει στο συμπέρασμα ότι η επιβράδυνση της θνησιμότητας είναι αμελητέα έως την ηλικία των 106 ετών (πέρα από αυτό το σημείο, δεν ήταν διαθέσιμα αξιόπιστα δεδομένα) και ότι ο νόμος Gompertz είναι τελικά ο κατάλληλος. Πίσω από το φαινόμενο της «καμπής» στις ηλικίες άνω των 85 ετών, ίσως βρίσκονται τα αλλοιωμένα δεδομένα και τα μεθοδολογικά προβλήματα που προκύπτουν κατά τη μελέτη τόσο μεγάλων ηλικιών. Μία άλλη εξίσου ενδιαφέρουσα έρευνα του Ledberg το 2020 σε δεδομένα της Σουηδίας του 1905 και του 1885, έρχεται να υποστηρίξει πως η εκθετική αύξηση θνησιμότητας με την ηλικία προσομοιώνεται από μία γενίκευση στοχαστικών μοντέλων. Με τον θάνατο να παρουσιάζεται ως φυσικό αποτέλεσμα από την «συσσώρευση ζημιών» σε όλη τη διάρκεια ζωής του ανθρώπου (Ledberg, 2020). Στη βιβλιογραφία, έχει αναπτυχθεί ένας αριθμός μαθηματικών μοντέλων ο οποίος χρησιμοποιείται για την ανάλυση των παρατηρήσεων σχετικά με τη δυναμική της θνησιμότητας σε ανθρώπινους πληθυσμούς καθώς και σε εργαστηριακούς πληθυσμούς (Yashin et al., 2000, Vaupel, 2010).



Γράφημα 1b. Η πορεία που ακολουθεί η ανθρώπινη Θνησιμότητα, στη Γαλλία και στη Σουηδία το 2000. Στη Γαλλία το Mortality rate είναι ως προς 5ετείς ομάδες ηλικιών, ενώ στη Σουηδία το Mortality rate είναι ως προς μονοετείς ομάδες ηλικιών. Η απεικόνιση γίνεται πλέον σε λογαριθμική κλίμακα. Πηγή: HMD

Στόχος της διατριβής, είναι η κατασκευή ενός μοντέλου θνησιμότητας το οποίο θα μελετά όλη τη διάρκεια ζωής του ανθρώπου και δε θα «διαμερίζεται» σε επιμέρους αναλύσεις, υποθέτοντας πάντα ότι ο ρυθμός θνησιμότητας μεταβάλλεται ανάλογα με την ηλικία σύμφωνα με το νόμο Gompertz. Αν και πολλά μοντέλα έχουν χρησιμοποιηθεί για να περιγράψουν τη δυναμική θνησιμότητας συναρτήσει της ηλικίας (Pletcher, 1999) χωρίς να προοικονομούν την εκθετική της εξέλιξη, υπάρχει ο επιστημονικός ισχυρισμός ότι οι θεμελιώδεις διαδικασίες που έγιναν στο παρελθόν και όσες γίνουν στο μέλλον γύρω από την θνησιμότητα, πρέπει να έχουν ως βάση τον εκθετικό νόμο (Yashin et al., 2000). Επομένως, η θνησιμότητα ως κύρια δημογραφική συνιστώσα, εξακολουθεί να περιγράφεται από τον νόμο Gompertz, δεδομένου ότι παραμένει σε στάδιο διερεύνησης το αν διάφορες αποκλίσεις από το νόμο Gompertz μπορούν να εξηγηθούν από άλλους παράγοντες ή παραμέτρους των πληθυσμών. Στην παρούσα έρευνα λαμβάνοντας ως υπόθεση ότι η δυναμική θνησιμότητας περιγράφεται από τον παραπάνω νόμο, γίνεται έλεγχος εάν οι αποκλίσεις από αυτόν μπορούν να εξηγηθούν από στοχαστικές επιδράσεις. Για το σκοπό αυτό, αναπτύσσεται κατάλληλο μαθηματικό μοντέλο που περιλαμβάνει τις ιδιαιτερότητες του κάθε ανθρώπινου πληθυσμού και αναλύει τα στοχαστικά αποτελέσματα των ευρημάτων.

Επιπλέον, σκοπός είναι να εξαχθούν πιθανές παράμετροι του νέου μοντέλου οι οποίες θα ταιριάζουν (*goodness of fit*) με τα δεδομένα παρατήρησης που χρησιμοποιούνται σε αυτή τη μελέτη και θα δίνουν ενδείξεις και μελλοντικές κατευθύνσεις για άλλα επιστημονικά πεδία. Κατά την υλοποίηση της προσπάθειας αυτής χρησιμοποιήθηκαν οι έννοιες της Προσομοίωσης – Μοντελοποίησης και Geovisualization, οι ορισμοί των οποίων αναφέρονται επιγραμματικά παρακατώ:

Προσομοίωση και Μοντελοποίηση: Τα χωρικά μοντέλα αλληλεπίδρασης και κατ΄επέκταση τα μαθηματικά μοντέλα που αφορούν πληθυσμό, παρουσιάζονται (μοντελοποιούνται) από πάνω προς τα κάτω (εικόνα 2): καθορίζεται με αυτό τον τρόπο μία συνολική σχέση που διέπει τη ροή ανάμεσα στα επίπεδα που δημιουργούνται. Αυτό είναι και ένα χαρακτηριστικό για τα κοινά αστικά μοντέλα, όπως εκείνα που βασίζονται στον μαθηματικό προγραμματισμό. Η εικόνα 2 στη σελίδα 58 της διατριβής, παρουσιάζει την οπτική αντίληψη που έχει ο στατιστικός ερευνητής (ανώτερο επίπεδο με σημεία) προκειμένου να μοντελοποιήσει νέες καταστάσεις.

Geovisualization (GVis): Συνδυάζει την επιστημονική οπτικοποίηση, με ψηφιακές χαρτογραφήσεις για την υποστήριξη της έρευνας και της ανάλυσης των γεωγραφικών δεδομένων και πληροφοριών, συμπεριλαμβανομένων των αποτελεσμάτων της μαθηματικής μοντελοποίησης και προσομοίωσης. Σε αντίθεση με τις παραδοσιακές μορφές χαρτογραφίας, το GVis έχει συνήθως τρείς ή τέσσερις διαστάσεις (διαδραστικός χάρτης).

1.1.1 Δημογραφία

Η μελέτη των πληθυσμών, ως επιστήμη, εκτιμάται ότι πρωτοαναφέρθηκε στο Λονδίνο στα μέσα του 17^{ου} αιώνα, ονοματίστηκε ως «Δημογραφία» περίπου 200 χρόνια αργότερα και αναγνωρίστηκε επίσημα ως επιστήμη στο δεύτερο μισό του 20^{ου} αιώνα (Τραγάκη et al., 2015). Αν και ως αυτόνομη επιστήμη η δημογραφία είναι πρόσφατη, το ενδιαφέρον γύρω από θέματα που αφορούν στο μέγεθος, τη σύνθεση, τη δομή και τη δυναμική του πληθυσμού δεν είναι πρόσφατο. Από τα αρχαία χρόνια, υπάρχουν αναφορές που σχετίζουν τον προβληματισμό των τοπικών αρχών σχετικά με τις συνέπειες της πληθυσμιακής εξέλιξης και πώς αυτές διαμορφώνονται στο πέρασμα του χρόνου.

Από τα μέσα του 17^{ου} έως και ολόκληρο τον 18^{ο} αιώνα διάφοροι γνωστοί μαθηματικοί, όπως ο Euler και ο Bernoulli, καθώς και αναλογιστές, όπως ο Williem Kersseboom και ο Nicolas

Struyck, ασχολήθηκαν με τη στατιστική επεξεργασία στοιχείων που προέκυπταν από την καταγραφή γάμων, γεννήσεων, αλλά και θανάτων. Δημιούργησαν με αυτό τον τρόπο τους πρώτους κατά ηλικία και φύλο δείκτες γαμηλιότητας, γονιμότητας και θνησιμότητας, εισήγαγαν τη χρήση των πιθανοτήτων και κατασκεύασαν τους πρώτους πίνακες επιβίωσης.

Εκείνη την χρονική περίοδο, το ενδιαφέρον γύρω από το ερευνητικό πεδίο της «πολιτικής αριθμητικής» - όπως αναφερόταν, ήταν ιδιαίτερα διαδεδομένο σε χώρες όπως η Αγγλία, η Γαλλία, η Γερμανία, η Ολλανδία, η Ελβετία και η Σουηδία. Ερευνητές που ασχολούνταν με το συγκεκριμένο επιστημονικό πεδίο, αντάλλαζαν απόψεις με την υπόλοιπη επιστημονική κοινότητα, ενώ ταυτόχρονα δημοσίευαν το έργο τους σε περιοδικά. Με τον τρόπο αυτό θεμελιώθηκε σταδιακά η **Μαθηματική Δημογραφία**, ετέθησαν οι βάσεις για τις πρώτες δημογραφικές αναλύσεις και προήχθη ο προβληματισμός που οδήγησε αργότερα στην ανάπτυξη των βασικών δημογραφικών θεωριών.

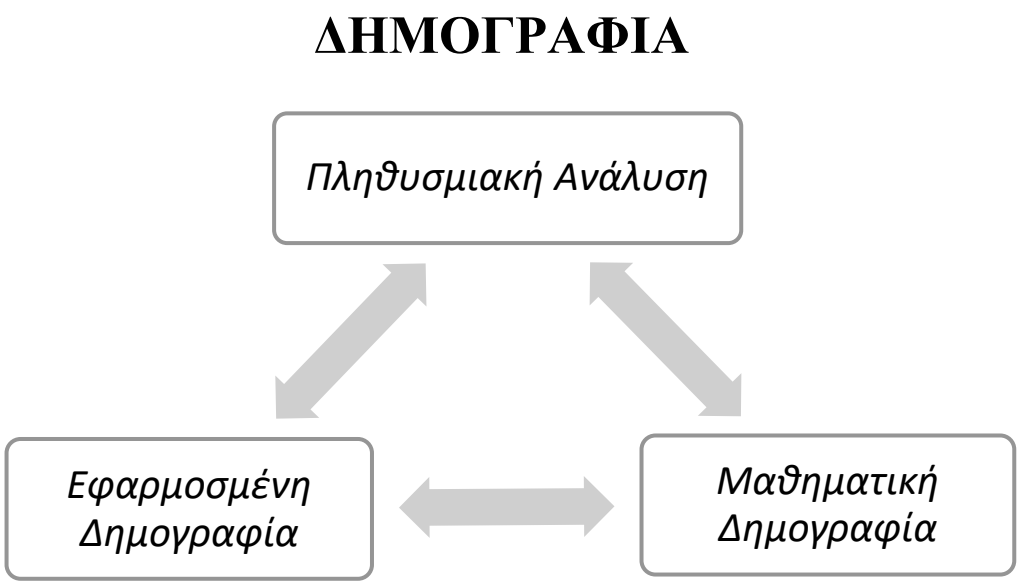
Αρχικά ως **Δημογραφία**, ορίζεται: *«Ο κλάδος των κοινωνικών επιστημών που μελετά τους ανθρώπινους πληθυσμούς, τη δομή και τη σύνθεσή τους και διερευνά τη σχέση τους με τις φυσικές, κοινωνικές και οικονομικές μεταβολές»* (Τραγάκη et al., 2015). Εντάσσεται στις κοινωνικές επιστήμες, καθώς έχει ως επίκεντρο τον άνθρωπο και την εξέλιξη του. Οι τεχνικές και οι μέθοδοι δημογραφικής ανάλυσης, απαιτούν σημαντικές γνώσεις μαθηματικών και στατιστικής.

Το κέντρο ενδιαφέροντος της δημογραφίας είναι ο *πληθυσμός,* σε αντίθεση με τη Στατιστική όπου ως πληθυσμός περιγράφεται ένα σύνολο στοιχείων, στη δημογραφία ο όρος «πληθυσμός» χρησιμοποιείται για να περιγράψει ένα σύνολο ανθρώπων. Με τη δημογραφική του έννοια, ο πληθυσμός αναφέρεται στους ανθρώπους οι οποίοι ζουν σε συγκεκριμένη γεωγραφική περιοχή, σε μια δεδομένη χρονική στιγμή ή σε μια χρονική περίοδο. Ο όρος **πληθυσμός** χρησιμοποιείται επίσης για την περιγραφή ενός υποσυνόλου του οποίου το μέγεθος και η δομή μεταβάλλονται ανάλογα με τα άτομα που εισέρχονται (π.χ. γεννήσεις, μετανάστευση-εισροές) σ’ αυτό ή εξέρχονται (π.χ. θάνατοι, μετανάστευση-εκροές) από αυτό. Οι τρεις παράγοντες που διαμορφώνουν το μέγεθος και τη σύνθεση του πληθυσμού είναι η θνησιμότητα, η γονιμότητα και οι μεταναστευτικές κινήσεις, οι οποίοι αποτελούν τα κύρια δημογραφικά φαινόμενα που μελετούν οι δημογράφοι.

Η **δημογραφική ανάλυση** διακρίνεται σε τρία πεδία (σχήμα 1), ανάλογα με το αντικείμενο μελέτης και τον τρόπο προσέγγισης του προβλήματος που καλείται να μελετήσει:

- Μαθηματική Δημογραφία
- Πληθυσμιακή Ανάλυση και
- Εφαρμοσμένη Δημογραφία

Στην παρούσα διατριβή το προς μελέτη αντικείμενο προσεγγίζεται με τη χρήση της Μαθηματικής Δημογραφίας.



Σχήμα 1. Τα πεδία της Δημογραφικής ανάλυσης.

1.1.2 Μαθηματική Δημογραφία και Στατιστική

Μαθηματική Δημογραφία

Η Μαθηματική Δημογραφία (Formal Demography ή Mathematical Demography) τοποθετείται στο επίκεντρο της επιστήμης και ασχολείται με την ανάπτυξη των τεχνικών και των μεθόδων ανάλυσης της. Αξιολογεί την ποιότητα των πρωτογενών δεδομένων, καταρτίζει κατάλληλους δείκτες και αναπτύσσει τις τεχνικές και τις μεθόδους πάνω στις οποίες θεμελιώνεται η θεωρία της επιστήμης της Δημογραφίας. Το συγκεκριμένο πεδίο της δημογραφίας εστιάζει στο μέγεθος, την κατά ηλικία και φύλο σύνθεση ενός πληθυσμού και μελετά τη φυσική του κίνηση με στατιστικές και μαθηματικές μεθόδους (Keyfitz και Caswell, 2005). Στα διαφορετικά αντικείμενα της μαθηματικής δημογραφίας περιλαμβάνονται, μεταξύ άλλων:

1. Η αναζήτηση (στατιστικών) τεχνικών προκειμένου να αντιμετωπιστεί η απουσία επαρκών για τη δημογραφική ανάλυση πρωτογενών δεδομένων, είτε λόγω ελλιπούς καταγραφής, είτε λόγω περιορισμένης αξιοπιστίας.
2. Η κατάρτιση και επεξεργασία δημογραφικών δεικτών και η δημιουργία τεχνικών προσομοίωσης (simulation) των δημογραφικών μεταβολών.
3. Η ανάπτυξη μεθόδων προσέγγισης και επίλυσης θεωρητικών ερωτημάτων.
4. Η δημιουργία θεωρητικών και πιθανοθεωρητικών μοντέλων για τη μελέτη των πληθυσμών.
5. Η δημιουργία και εξαγωγή πληθυσμιακών προβολών για την εκτίμηση της εξέλιξης του πληθυσμού είτε σε παγκόσμιο είτε σε τοπικό επίπεδο.

Μαθηματική Στατιστική

Η Μαθηματική Στατιστική συνδέεται άμεσα με τη Δημογραφία τόσο ως προς τις μεταβλητές που διερευνά όσο και ως προς τα στατιστικά ερωτήματα που προσπαθεί να απαντήσει. Ουσιαστικά έχοντας διαθέσιμες από την Δημογραφία τις πληροφορίες σχετικά με το μέγεθος και την ένταση των δημογραφικών μεταβολών, η Στατιστική επιχειρεί να δώσει την καθαρά μαθηματική ερμηνεία στην εξέλιξη του πληθυσμού ως προς το χώρο και τον χρόνο.

Σύμφωνα με τον Unwin (1981), Χ**ωρική Ανάλυση ή Χωρική Στατιστική** είναι η μελέτη της κατανομής των σημείων, γραμμών, περιοχών και επιφανειών ενός χάρτη (Johnston et al. 2000) δηλαδή είναι η επιστήμη που αναλύει και εξάγει κατάλληλα συμπεράσματα για τα χωρικά

στοιχεία ενός Συστήματος Γεωγραφικών Πληροφοριών. Η χωρική στατιστική, περιλαμβάνει στατιστικές τεχνικές που μελετούν οντότητες οι οποίες περιγράφουν τοπολογικές, γεωμετρικές ή γεωγραφικές ιδιότητες. Ουσιαστικά, η ανάλυση Χωρικών δεδομένων μελετά τις καταστάσεις στις οποίες είναι διαθέσιμα δεδομένα παρατήρησης για κάποιο φαινόμενο που συμβαίνει στο γεωγραφικό χώρο. Η φράση αυτή αναφέρεται σε μία ποικιλία από στατιστικές τεχνικές, οι οποίες εφαρμόζονται σε διάφορους επιστημονικούς τομείς, όπως είναι η δημογραφία (spatial demography) και ο τομέας υγείας (spatial health). Παραδείγματα εφαρμογών στη χωρική δημογραφία είναι η μελέτη μεταναστευτικών ροών που παρουσιάστηκαν σε αντίστοιχη έρευνα το 2003 (Kalogirou, 2003) και οι χωρικές ανισότητες του προσδόκιμου ζωής (Tsimbos et al., 2014) και στον τομέα υγείας: η μελέτη παιδικής παχυσαρκίας στην Αθήνα (Chalkias et al., 2013). Άλλοι τομείς όπου έχει συμβάλει η χωρική στατιστική είναι στην οικονομετρία (όταν γίνεται αναφορά στην αγοραστική δύναμη ενός πληθυσμού σε συγκεκριμένες περιοχές), στο γεωγραφικό σύστημα πληροφοριών (GIS) και στην επιστήμη των υπολογιστών μέσα από τη μελέτη των αλγορίθμων – όπως είναι η υπολογιστική γεωμετρία.

Συχνά, στη χωρική στατιστική προκύπτουν σφάλματα, που οφείλονται είτε στα μαθηματικά του χώρου, - ενίοτε δε και λόγω των ιδιαίτερων δεδομένων που λαμβάνουν χώρα στη χωροταξία – είτε στα διαθέσιμα εργαλεία. Για παράδειγμα, έστω ότι χρειάζεται να γνωρίζουμε ακριβώς το μήκος μιας ακτογραμμής σε ένα νησί, όπου απαιτεί ακριβείς μετρήσεις του μήκους του. Παρότι κάποιες δεκαετίες πριν η επίλυση αυτού του προβλήματος θα ήταν αδύνατη, στις μέρες μας, ο υπολογισμός της ακτογραμμής είναι εφικτός χάρη σε ένα κατάλληλο λογισμικό στον υπολογιστή, όπου τοποθετούνται οι ευθείες γραμμές στην καμπύλη της ακτογραμμής και εν συνεχεία υπολογίζονται τα μήκη των γραμμών που καθορίστηκαν. Ωστόσο, αυτές οι ευθείες γραμμές δεν μπορούν να έχουν καμία ρεαλιστική έννοια στον πραγματικό κόσμο. Το πρόβλημα αυτό δεν ήταν φανταστικό αλλά πραγματικό και αποτέλεσε ένα από τα πρώτα παραδείγματα / προβλήματα της Χωρικής Ανάλυσης. Συγκεκριμένα, η μελέτη αυτή αφορούσε την ακτογραμμή της Μεγάλης Βρετανίας και τέθηκε από τον Benoit Mandelbrot το 1967.

Αξίζει στο σημείο αυτό να γίνει μία σύντομη περιγραφή του προβλήματος της **Χωρικής εξάρτησης** που μπορεί να προκύψει στη μελέτη και ανάλυση καθ’ όλη τη διαδικασία της έρευνας. Συγκεκριμένα, μερικές ιδιότητες στο γεωγραφικό χώρο, φαίνεται να σχετίζονται, είτε θετικά είτε αρνητικά. Η χωρική εξάρτηση λοιπόν, οδηγεί στη *χωρική αυτοσυσχέτιση* γεγονός που στατιστικά μπορεί και να «ενοχλεί». Συγκεκριμένα, δημιουργεί δυσκολίες στην μαθηματική

μοντελοποίηση και στην ανάλυση των χωρικών δεδομένων. Για παράδειγμα, οι αναλύσεις παλινδρόμησης που δεν αντισταθμίζουν τη χωρική εξάρτηση μπορεί να δώσουν «λανθασμένες» εκτιμήσεις των παραμέτρων οι οποίες με τη σειρά τους θα δώσουν αναξιόπιστες ερμηνείες. Θα μπορούσε δηλαδή το αποτέλεσμα σε μία χρονοσειρά να κατανέμεται ομοιόμορφα σε όλο το εύρος της ανάλυσης, ενώ στην πραγματικότητα μία σωστή στάθμιση της παραμέτρου θα «έδινε» την ερμηνεία σε μικρότερο εύρος. Είναι σκόπιμο επομένως να επεξηγούνται τα παραπάνω προβλήματα με κατάλληλα χωρικά μοντέλα παλινδρόμησης, τα οποία θα μοντελοποιήσουν αυτές τις αδυναμίες και θα δώσουν πιο ορθά και κατάλληλα ερμηνευμένα αποτελέσματα.

Είναι σαφές πως η Μαθηματική Στατιστική εξετάζοντας δεδομένα από τον χώρο και τον χρόνο, αποτελεί ένα γοργά εξελισσόμενο τομέα της ποσοτικής γεωγραφίας που οδηγείται από τις εξελίξεις στην πληροφορική και στο διαδίκτυο, από τη συλλογή μεγάλων βάσεων δεδομένων από δημόσιους φορείς και ιδιωτικές επιχειρήσεις και από εθελοντικές πληροφορίες χρηστών των κοινωνικών δικτύων. Αρωγός στην επιστήμη της Δημογραφίας αποτελεί η ενσωμάτωση τεχνικών Χωρικής Ανάλυσης σε εμπορικά και ανοιχτά λογισμικά Συστημάτων Γεωγραφικών Πληροφοριών ευρείας χρήσης καθώς και η δημιουργία κατάλληλων εργαλείων για επεκτάσιμες πλατφόρμες, όπως πακέτα για τη γλώσσα προγραμματισμού $\boldsymbol{R}$.

Οι παραπάνω έννοιες και ορισμοί γύρω από την Χωρική Ανάλυση, αποτέλεσαν απαραίτητη επιστημονική γνώση για την επεξεργασία των δεδομένων και δεν αναλύθηκαν ως αυτόνομες πληροφορίες στη μαθηματική μοντελοποίηση της ανθρώπινης θνησιμότητας μέσω του αντίστοιχου λογισμικού. Αρκετές πληροφορίες και τεχνικές χωρικής ανάλυσης είναι μέρος κατάλληλων πακέτων στο λογισμικό της R - οι οποίες όμως συνέβαλαν στην κατανόηση και στην ερμηνεία των αποτελεσμάτων που εξήχθησαν στις χωρικές περιοχές που έλαβαν μέρος στην έρευνα.

1.2 Ανάλυση Επιβίωσης (Survival Analysis)

Η Ανάλυση Επιβίωσης (Survival Analysis) αναφέρεται στην ανάλυση δεδομένων που αφορούν το χρόνο που μεσολαβεί μέχρι κάποιο συγκεκριμένο συμβάν. Το συμβάν αυτό συνήθως είναι ο θάνατος. Μπορεί όμως να είναι και η ανάρρωση ή η εμφάνιση κάποιου συμπτώματος. Ο χρόνος όμως μέχρι το συμβάν είναι συνήθως «λογοκριμένος» με την έννοια ότι δε γίνεται γνωστή η πραγματική του τιμή για κάποιους ασθενείς. Το μόνο που μπορούμε να πούμε για τους λογοκριμένους χρόνους είναι ότι οι χρόνοι αυτοί είναι μεγαλύτεροι από την τιμή που έχει καταγραφεί. Στα πλαίσια των παρακάτω ενοτήτων θα παρουσιασθούν οι βασικές στατιστικές τεχνικές που χρησιμοποιούνται στην ανάλυση επιβίωσης.

1.2.1 Πίνακες Θνησιμότητας (Mortality tables)

Ένα από τα βασικά θέματα της Δημογραφίας είναι η κατασκευή μοντέλων θνησιμότητας (ή επιβίωσης) τα οποία περιγράφουν το πραγματικό πρότυπο θνησιμότητας κάποιου πληθυσμού και πάνω σε αυτά στηρίζεται ο υπολογισμός διάφορων φυσικών δημογραφικών συμβάντων/ποσοτήτων όπως ο αριθμός (ή η ένταση) των γεννήσεων, των θανάτων, των γάμων αλλά και η διαδικασία της γήρανσης. Χρησιμοποιώντας αναλυτικά στοιχεία σχετικά με την κατανομή των θανάτων ανά ηλικία και φύλο υπολογίζονται η πιθανότητα θανάτου και κατά συνέπεια επιβίωσης, καθώς και το προσδόκιμο ζωής ανά ηλικία και φύλο. Με βάση τα στοιχεία αυτά κατασκευάζονται πίνακες που ονομάζονται πίνακες θνησιμότητας οι οποίοι είναι ιδιαίτερα χρήσιμοι στην αναλογιστική επιστήμη. Στη βιβλιογραφία (Congdon, 2007) περιγράφεται η χρήση αυτών των πινάκων και μεταξύ άλλων τονίζεται η ύπαρξη δύο ειδών τέτοιων πινάκων ανάλογα με την πηγή προέλευσής τους. Η πρώτη περίπτωση αφορά δεδομένα θνησιμότητας από ένα πληθυσμό για μία συγκεκριμένη χρονική περίοδο (περίπτωση με την οποία και ασχοληθήκαμε στην παρούσα έρευνα μας) και η δεύτερη περίπτωση αφορά δεδομένα θνησιμότητας από έναν πληθυσμό για μία συγκεκριμένη ασθένεια και για μία συγκεκριμένη κλινική μελέτη.

Ορίζεται ως **Πίνακας θνησιμότητας** (mortality table) μια σειρά από ετήσιες συνήθως πιθανότητες θανάτου από μια ελάχιστη ηλικία α και μετά, δηλαδή

$$q_{\alpha}, q_{\alpha+1}, \dots, q_{\omega-1}$$

όπου με ω συμβολίζεται η οριακή ηλικία και είναι η ηλικία πέρα από την οποία κανένα άτομο δεν επιζεί. Επίσης, q_x είναι η πιθανότητα ένα άτομο ηλικίας x, να πεθάνει στο διάστημα $[x, x+1)$ για $x = a, a+1, \dots, \omega - 1$. Οι συμπληρωματικές πιθανότητες είναι οι

$$p_\alpha, p_{\alpha+1}, \cdots, p_{\omega-1}$$

που δηλώνουν την πιθανότητα ένα άτομο ηλικίας x να επιβιώσει μέχρι την ηλικία $x+1$. Ενώ μεταξύ των πιθανοτήτων θανάτου και επιβίωσης ισχύει η σχέση $p_x + q_x = 1,\ x = \alpha, \alpha + 1, \dots, \omega - 1$.

Οι πίνακες θνησιμότητας έχουν αρκετές πρακτικές εφαρμογές στην καθημερινότητα και αποτελούν μέρος πολλών αναλογιστικών μελετών. Χρησιμοποιούνται στην ανάλυση της θνησιμότητας του πληθυσμού στον οποίο αναφέρονται, καθώς και στην εκτίμηση της επιβίωσης του ίδιου πληθυσμού. Στη στατιστική, στη δημογραφία και την ιατρική επιστήμη χρησιμοποιούνται για την περιγραφή της κατάστασης της υγείας του πληθυσμού και των βιολογικών ορίων της ανθρώπινης ζωής, όπως γεννήσεις, θάνατοι κλπ.

Αναφέρονται κυρίως σε δύο τύπους πινάκων θνησιμότητας, τους *πλήρεις* και τους *συμπυκνωμένους*. Στην πρώτη κατηγορία πινάκων, τα δεδομένα γράφονται για κάθε ηλικία x, $x = 1,2, \dots, \omega$ ενώ στους δεύτερους η αντίστοιχη πινακοποίηση των δεδομένων γίνεται για ομάδες ηλικιών, συνήθως πενταετείς. Οι πίνακες θνησιμότητας αποτελούνται από ορισμένες βασικές συναρτήσεις (Johnson and Johnson, 1999). Αυτές είναι οι $l_x, d_x, q_x, p_x, x = 1,2, \dots, \omega$.

Με l_x συμβολίζεται το πλήθος των ατόμων που βρίσκονται στη ζωή στην ηλικία x, με q_x συμβολίζεται η δεσμευμένη πιθανότητα θανάτου στο διάστημα $[x, x+1)$, δηλαδή την πιθανότητα ένα άτομο ηλικίας x να πεθάνει σε αυτό το διάστημα και δίνεται από τη σχέση

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}.$$

Ο αριθμός των θανάτων στο διάστημα $[x, x+1)$ συμβολίζεται με d_x και ισούται με

$$d_x = l_x - l_{x+1}$$

Η δεσμευμένη πιθανότητα επιβίωσης p_x, δηλαδή η πιθανότητα ένα άτομο ηλικίας x να μην πεθάνει στο διάστημα $[x, x+1)$ δίνεται από την σχέση

$$p_x = 1 - q_x = \frac{l_{x+1}}{l_x},\ x = 0,1,2, \dots, \omega - 1.$$

Η συνάρτηση e_x συμβολίζει τον αριθμό των ετών που αναμένεται να ζήσει ένα άτομο ηλικίας x. Η αναμενόμενη τιμή της συνάρτησης δίνεται από τον τύπο

$$e_x = \frac{T_x}{l_x}.$$

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι κατασκευής πινάκων θνησιμότητας. Ο ένας χρησιμοποιεί τους πίνακες επιβίωσης ενώ ο άλλος είναι στατιστικός τρόπος και είναι γνωστός ως μέθοδος του Halley, όπου χρησιμοποιούνται στατιστικά δεδομένα για την κατανομή των θανάτων ανάλογα με την ηλικία. Ο Edmond Halley (1656-1742) ήταν ένας διάσημος αστρονόμος ο οποίος, το 1693, δημοσίευσε ένα άρθρο σχετικά με τις ετήσιες αναφορές ζωής που περιελάμβανε στην αναφορά του τον πρώτο γνωστό πίνακα θνησιμότητας και είχε σημαντική επίδραση στις στατιστικές των αναλογιστικών επιστημών και της θνησιμότητας. Στην προσέγγισή του αυτή είχε υιοθετήσει μια πολύ ισχυρή υπόθεση εργασίας ότι ο αριθμός των γεννήσεων ενός έτους είναι ίσος με τον αριθμό των θανάτων που συμβαίνουν στο ίδιο έτος (στάσιμος πληθυσμός), κάτι που στην πραγματικότητα δεν ισχύει (Ciecka, 2008).

1.2.2$_{\alpha}$ Εξομάλυνση πινάκων θνησιμότητας

Ξεκινώντας από τον τρόπο υπολογισμού των ποσοστών θνησιμότητας, στην ουσία δεν υπολογίζονται τα πραγματικά ποσοστά θνησιμότητας, αλλά τα εκτιμώμενα. Γνωρίζοντας τον αριθμό των θανάτων στην ηλικία x, έστω d_x και τον αριθμό των ατόμων που βρίσκονται σε κίνδυνο στην ίδια ηλικία x, έστω l_x το ποσοστό θνησιμότητας βρίσκεται από το πηλίκο

$$\widehat{q_x} = \frac{d_x}{l_x},\ x = 1,2,\dots,n.$$

Επειδή συνήθως ο παρονομαστής l_x είναι μεγάλος, συγκρινόμενος με τον αριθμητή d_x, μπορεί να υποτεθεί ότι το d_x ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με παραμέτρους l_x και q_x και ο εκτιμητής $\widehat{q_x}$ μπορεί να θεωρηθεί ως διωνυμικό ποσοστό. Δηλαδή $E(\widehat{q_x}) = q_x$ και $Var(\widehat{q_x}) = \frac{q_x(1-q_x)}{l_x}$, όπου q_x το πραγματικό ποσοστό θνησιμότητας. Όμως ο αριθμός των θανάτων δεν ακολουθεί ακριβώς τη διωνυμική κατανομή (London, 1985). Το συμπέρασμα αυτό επαληθεύεται και από την γραφική παράσταση των εκτιμητών του $\widehat{q_x}$, τα οποία είναι εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας, λαμβάνοντας τελικά ένα διάγραμμα με μεγάλες διακυμάνσεις, αφού κάποια από αυτά θα είναι μεγαλύτερα και κάποια μικρότερα από τα πραγματικά ποσοστά θνησιμότητας του πληθυσμού στις αντίστοιχες ηλικίες. Η λύση στο πρόβλημα αυτό είναι η αναθεώρηση των αρχικών εκτιμήσεων $\widehat{q_x}$ για να προκύψουν καλύτερες εκτιμήσεις των πραγματικών ποσοστών. Η «αναθεώρηση» αυτή ονομάζεται ***εξομάλυνση*** (graduation).

Ο Miller (1949) όρισε ως εξομάλυνση, τη διαδικασία εξαγωγής δεδομένων, από μία μη ομαλή – μη κανονική (irregular) σειρά παρατηρούμενων τιμών μιας συνεχούς μεταβλητής, σε

μια ομαλή σειρά τιμών οι οποίες είναι «συνεπείς» με τις παρατηρούμενες τιμές. Το ερώτημα που όμως τίθεται εδώ είναι αν είναι δυνατόν να γίνει «εξομάλυνση» σε οποιαδήποτε σειρά παρατηρούμενων τιμών. Η απάντηση είναι πως μόνο ορισμένοι τύποι δεδομένων είναι κατάλληλοι για εξομάλυνση, δηλαδή σε αυτούς που υπάρχει σχέση μεταξύ των στοιχείων της σειράς των δεδομένων. (London, 1985)

Τα βασικά χαρακτηριστικά της εξομάλυνσης, είναι η **ομαλότητα** (smoothness) και η **καλή προσαρμογή** (goodness of fit). Δυστυχώς, τα δύο αυτά στοιχεία είναι αντικρουόμενα και η επίτευξη του ενός απαιτεί τη θυσία του άλλου (Haberman, 1998 και Papaioannou et al., 2004).

Μετά από κάθε εξομάλυνση ποσοστών θνησιμότητας, θα πρέπει να ελέγχεται κατά πόσο οι εξομαλυμένες τιμές βρίσκονται κοντά στις αρχικές εκτιμήσεις και ικανοποιούν τους επιπλέον περιορισμούς που τίθενται (μονοτονία, κυρτότητα κ.α.) ανάλογα με τη φύση του προβλήματος. Στην δημογραφία και κατ΄επέκταση στην έρευνα μας, επιθυμία, είναι η ένταση θνησιμότητας να αναπαριστάνεται από μια μονότονη και πιο συγκεκριμένα αύξουσα συνάρτηση, δηλαδή οι τιμές στην αρχή να ξεκινάνε από χαμηλά και μετά να αυξάνονται από ηλικία σε ηλικία, καθώς επίσης και λόγω κυρτότητας να αυξάνονται πιο απότομα στις μεγάλες ηλικίες. Διατηρείται με αυτό τον τρόπο το κλασικό πρότυπο θνησιμότητας για το σύνολο των πληθυσμών που εξετάζονται, αλλά και για διαφορετικά σύνολα δεδομένων, τόσο χρονικά (έτος έρευνας), όσο και χωρικά (γεωγραφική περιοχή έρευνας: πόλη, χώρα κλπ.). Στην ανάλυση θεωρήθηκε ως μηδενική υπόθεση ελέγχου, η υπόθεση ότι τα πραγματικά ποσοστά θνησιμότητας δεν διαφέρουν σημαντικά από τα αντίστοιχα ποσοστά του πίνακα θνησιμότητας, δηλαδή
$H_0: q_x = q_{x_0}\ vs\ \ H_0: q_x \neq q_{x_0}$.

1.2.2β Επιλογή Μεθόδου Εξομάλυνσης

Οι πίνακες θνησιμότητας εξελίχθηκαν σε ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο με ποικίλες εφαρμογές σε επιστήμονες διαφορετικών ειδικοτήτων, όπως για αναλογιστές (Renshaw et al., 1996), βιολόγους, φυσικούς, δημογράφους, κατασκευαστές, ερευνητές και σε πολλά ακόμη πεδία. Για την κατασκευή του μοντέλου θνησιμότητας το οποίο θα αναπαριστά, το πραγματικό πρότυπο θνησιμότητας, υπάρχουν δυο τρόποι. Στον πρώτο κατασκευάζεται ένας πίνακας θνησιμότητας και στον δεύτερο υιοθετείται η άποψη ότι το πρότυπο θνησιμότητας περιγράφεται από μία συνάρτηση. Προκύπτουν έτσι δύο κατηγορίες μεθόδων εξομάλυνσης, οι **μη παραμετρικές** και οι **παραμετρικές** μέθοδοι (London, 1985 και Haberman, 1998).

Στην **παραμετρική** μέθοδο εξομάλυνσης, προσαρμόζεται μια μαθηματική συνάρτηση στις αρχικές εκτιμήσεις των ποσοστών θνησιμότητας $\widehat{q_x}$ ή της έντασης θνησιμότητας $\widehat{\mu_x}$ για να εκφραστεί με τον τρόπο αυτό η σχέση που υπάρχει μεταξύ των γειτονικών τιμών. Η εξομάλυνση γίνεται είτε προσαρμόζοντας μια συνάρτηση σε όλο το εύρος των ηλικιών που εξετάζεται είτε περισσότερες συναρτήσεις σε υποδιαστήματα των δεδομένων.

Η **μη παραμετρική** μέθοδος (Breslow, 1970) εφαρμόζεται σε πινακοποιημένα δεδομένα συνδυάζοντας δεδομένα από διάφορες τιμές της ηλικίας x. Στην παρούσα διατριβή δεν γίνεται καθόλου χρήση των μη παραμετρικών μεθόδων εξομάλυνσης. Αντιθέτως, ερευνάται η εξομάλυνση των πινάκων θνησιμότητας, κάνοντας χρήση γνωστών μοντέλων θνησιμότητας (π.χ. Gompertz, Gompertz - Makeham, κλπ) και των γενικευμένων γραμμικών μοντέλων (GLM), σε επίπεδο παραμετρικής μεθόδου.

Όπως αναφέρει ο London (1985), «*καμία μέθοδος εξομάλυνσης δεν μπορεί να θεωρηθεί ως η ¨καλύτερη¨ από γενικής άποψης*». Βασικός παράγοντας επιλογής είναι το εύρος και η μορφή των δεδομένων. Αν τα δεδομένα θνησιμότητας είναι ομαδοποιημένα, τότε η μέθοδος της παρεμβολής ή κάποια άλλη παραμετρική μέθοδος θα μπορούσε να εξομαλύνει τις τιμές στις ενδιάμεσες ηλικίες με επιτυχία. Επίσης, στις παραμετρικές μεθόδους, δεν υπάρχει πρόβλημα με τις παραμέτρους των μοντέλων καθώς αυτές προσδιορίζονται από τα ίδια τα δεδομένα.

1.2.3 Συνάρτηση Επιβίωσης (Survival function)

Με τον όρο ***ανάλυση επιβίωσης*** (survival analysis) γίνεται αναφορά στην ανάλυση δεδομένων που αφορούν στο χρόνο που μεσολαβεί από την έναρξη μελέτης / παρατήρησης ενός γεγονότος μέχρι τη λήξη του συγκεκριμένου συμβάντος (*Breslow, 1975*). Στην περίπτωση της μηχανολογίας η ανάλυση επιβίωσης αναφέρεται και ως ανάλυση αξιοπιστίας (reliability theory). Ο χρόνος επιβίωσης χρίζει ειδικής μεταχείρισης για το λόγο ότι έχει τον περιορισμό να παίρνει πάντα θετικές τιμές, επειδή τα δεδομένα, από τη φύση τους, περιέχουν ως παράγοντα τον χρόνο - ο οποίος είναι θετικός.

Έστω λοιπόν, ότι ο χρόνος ζωής ενός ατόμου περιγράφεται από μία μη αρνητική μεταβλητή T, η οποία μπορεί να είναι είτε συνεχής είτε διακριτή και το σύνολο των τιμών της είναι υποσύνολο του $[0, +\infty)$. Έστω επίσης, ότι ως $F(x)$ ορίζεται η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της T, η οποία δίνεται από τον τύπο

$$F(x) = P(T \leq x),\ x \geq 0.$$

Η $F(x)$ είναι αύξουσα και συνεχής από δεξιά συνάρτηση. Επιπλέον η $F(x)$ καθορίζει πλήρως την συμπεριφορά της τυχαίας μεταβλητής T.

Αν η T είναι συνεχής, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της δίνεται από τη σχέση

$$f(x) = \frac{\vartheta F(x)}{\vartheta x} = \lim_{dx \to 0^+} \frac{P(x \leq T < x + dx)}{dx},$$

ενώ αν είναι διακριτή, για τη συνάρτηση πιθανότητας της ισχύει

$$f(x) = F(x_j) - F(x_{j-1}), \qquad j = 1,2, \ldots$$

και $F(x_0) = 0$.

Η πιθανότητα επομένως, του ενδεχομένου $\{T \geq x\}$, $x \geq 0$ δηλαδή ένα άτομο να επιζήσει πέραν της ηλικίας x, καλείται ***συνάρτηση επιβίωσης*** *(survival function)* της T, συμβολίζεται με $S(x)$ και δίνεται από τη σχέση

$$S(x) = P(T \geq x) = 1 - F(x),$$
$$S(0) = 1\ \kappa\alpha\iota\ \lim_{x \to \infty} S(x) = 0$$

Η γραφική παράσταση της $S(x)$ είναι γνωστή ως καμπύλη επιβίωσης και είναι πολύ σημαντική στην ανάλυση του χρόνου επιβίωσης.

1.2.4 Συνάρτηση Κινδύνου (Hazard function)

Μία από τις βασικότερες συναρτήσεις τόσο στην ανάλυση επιβίωσης όσο και στη δημογραφία, είναι η ***συνάρτηση κινδύνου*** *(hazard function)* της συνεχούς τυχαίας μεταβλητής *T.* Δίνεται από τη σχέση

$$h(x) = \lim_{dx \to 0^+} \frac{P(x \leq T < x + dx | T \geq x)}{dx}, x \geq 0. \quad (1)$$

Η συνάρτηση κινδύνου, ορίζεται ως η στιγμιαία πιθανότητα θανάτου ενός ατόμου τη χρονική στιγμή x δεδομένου ότι αυτό έχει επιζήσει ως τη χρονική στιγμή x. Στη δημογραφία η συνάρτηση $h(x)$ ονομάζεται ***ένταση θνησιμότητας*** *(force of mortality)* και συμβολίζεται με μ_x. Η συνάρτηση κινδύνου δίνει ένα μέτρο του πόσο πιθανό είναι ένα άτομο να αποβιώσει ως συνάρτηση της ηλικίας του ατόμου, πιο απλά είναι ο κίνδυνος θανάτου αυτών που είναι ζωντανοί τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή.

Η αθροιστική συνάρτηση κινδύνου, συμβολίζεται με $H(x)$ και δίνεται ως ακολούθως

$$H(x) = \int_0^x h(u)du\ ,\ x \geq 0$$

και η οποία συνδέεται με τη συνάρτηση επιβίωσης ως εξής: $H(x) = -logS(x)$. Θεωρείται ο χρόνος x συνεχής μεταβλητή. Έτσι αν $\Delta = [x, x + dx]$ τότε θα ισχύει η προσεγγιστική σχέση $P(x \leq T < x + dx) \approx h(x)dx$, δοθέντος όμως ότι $T \geq x$, έχουμε την δεσμευμένη πιθανότητα $P(x \leq T < x + dx/T \geq x)$ για $x \geq 0$, που εκφράζει την πιθανότητα ένα ενδεχόμενο να συμβεί την αμέσως επόμενη χρονική στιγμή (Congdon, 2007).

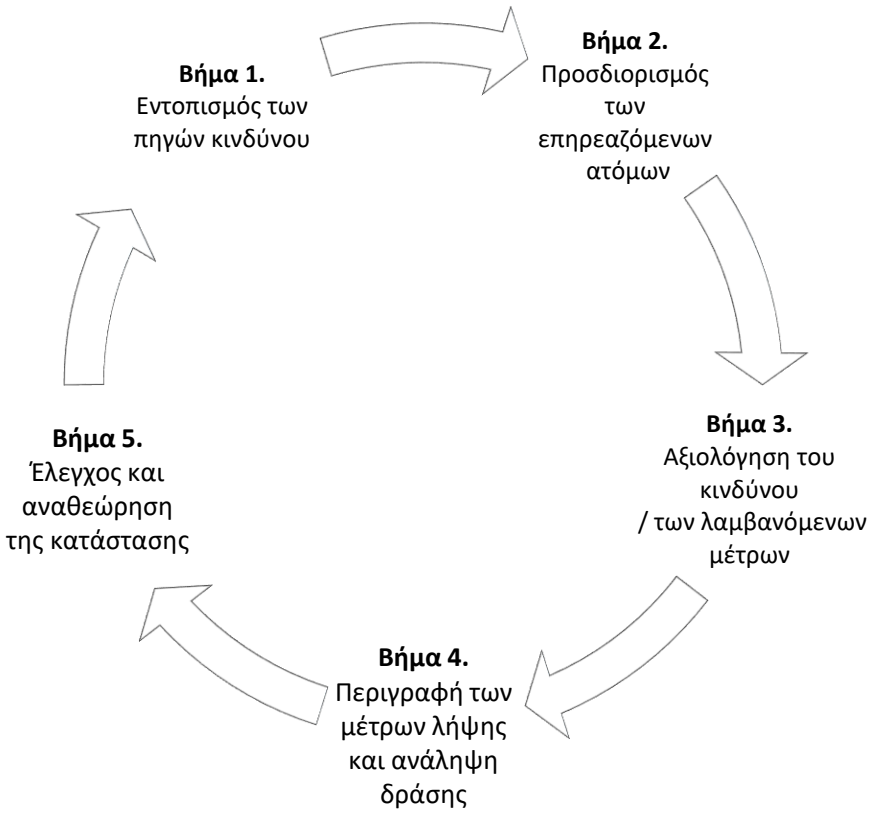
Υπάρχουν πολλοί λόγοι για τους οποίους εισάγεται η έννοια της συνάρτησης κινδύνου $h(x)$ σε μία ανάλυση, ενδεικτικά τρεις από αυτούς είναι η μελέτη, η ερμηνεία και η δράση ενός φαινομένου.

• Μελέτη: Πολλές φορές είναι χρήσιμη η σκέψη ενός πραγματικού φαινομένου στην καθημερινότητα μας και πώς θα μπορούσε να διαμορφωθεί σε συνθήκες κινδύνου. Για παράδειγμα, αν το x δηλώνει την ηλικία ενός αυτοκινήτου όταν έχει για πρώτη φορά σοβαρό πρόβλημα με τον κινητήρα, τότε μπορεί να αναμένεται ότι η αντίστοιχη συνάρτηση κινδύνου $h(x)$ θα αυξηθεί σε x μήνες. Δηλαδή, η υπό όρους πιθανότητα ενός σοβαρού προβλήματος του κινητήρα τον επόμενο μήνα, δεδομένου ότι δεν υπάρχει κανένα πρόβλημα μέχρι τώρα, θα αυξηθεί με τη ζωή του αυτοκινήτου. Αντίστοιχα, στην περίπτωση του ανθρώπινου πληθυσμού, εάν μελετηθεί η βρεφική θνησιμότητα σε μια περιοχή του κόσμου όπου υπάρχει καλή

διατροφή, προσδοκάται ότι η $h(x)$ θα μειωθεί με υψηλό ποσοστό βεβαιότητας τουλάχιστον κατά το πρώτο έτος της ζωής του νεογνού (Lawless, 2011).

• Ερμηνεία: Έστω ότι x είναι ο χρόνος από τη χειρουργική επέμβαση ενός ασθενούς μέχρι μία πιθανή υποτροπή. Στη συνέχεια, αν ο ασθενής που υποβλήθηκε στη χειρουργική επέμβαση, επισκεφτεί τον γιατρό του, θα ενδιαφερθεί περισσότερο για την «περιορισμένη χρονικά» πιθανότητα, "Ποιες είναι οι πιθανότητές μου να έχω τον επόμενο χρόνο νοσήσει πάλι;" από ό,τι με τις απεριόριστες πιθανότητες που περιγράφονται από την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της οποιαδήποτε κατανομής. Άρα ενδιαφέρει περισσότερο, ανάλογα με την φύση του προβλήματος, η συνάρτηση κινδύνου να έχει ένα περιορισμένο εύρος (για παράδειγμα η ανθρώπινη ηλικία).

• Δράση: Η πορεία που ακολουθεί η συνάρτηση κινδύνου θεωρείται ως ένας τρόπος να εκτιμηθεί ο κίνδυνος σε μία κατάσταση. Σε προβλήματα καθημερινότητας αυτό μπορεί να επιτευχθεί μέσα από 5 διαδοχικά βήματα, όπως παρουσιάζεται και στο γράφημα 2.



Γράφημα 2. Η πορεία που ακολουθεί η συνάρτηση κινδύνου (Hazard function). Τα 5 βήματα που καλείται ο ερευνητής να περάσει για να δράσει σε μία κατάσταση κινδύνου.

Συνοψίζοντας…

Στο παρόν κεφάλαιο μέσα από μια ανασκόπηση της βιβλιογραφίας παρουσιάστηκαν σημαντικές έννοιες και ορισμοί που σχετίζονται με την επιστήμη της Δημογραφίας και είναι απαραίτητες για την κατανόηση και την καλύτερη προσέγγιση του υπό μελέτη θέματος. Συγκεκριμένα, παρουσιάζονται οι έννοιες της Μαθηματικής Δημογραφίας και της Μαθηματικής Στατιστικής οι οποίες συνδέονται άμεσα μεταξύ τους, καθώς και η έννοια της Ανάλυσης Επιβίωσης. Επιπλέον, γίνεται αναφορά στις βασικές στατιστικές τεχνικές που χρησιμοποιούνται στο πλαίσιο της ανάλυσης επιβίωσης, όπως είναι: η συνάρτηση επιβίωσης και η συνάρτηση κινδύνου.

ΚΕΦ.2: Μελετώντας το φαινόμενο της θνησιμότητας

2.1 Νόμοι και μοντέλα θνησιμότητας

Τα μοντέλα θνησιμότητας αφορούν τα δημογραφικά μέτρα όπως είναι η ένταση θνησιμότητας μ_x και η πιθανότητα θανάτου q_x. Σύμφωνα με τον Hatzopoulo (1997) ένα καλό μοντέλο θα πρέπει να έχει σωστό θεωρητικό υπόβαθρο έτσι ώστε να δίνει καλές ερμηνείες. Επίσης είναι φανερό ότι ένα μοντέλο θα πρέπει να δίνει τα καλύτερα αποτελέσματα με τις ελάχιστες παραμέτρους ή κάθε παράμετρος να έχει σαφή ερμηνεία στο χρόνο και στο χώρο (Andreopoulos et al., 2018). Δηλαδή οι παράμετροι θα πρέπει να περιγράφουν τα σημαντικότερα μόνο χαρακτηριστικά που επηρεάζουν τη θνησιμότητα.

Οι νόμοι θνησιμότητας εξελίχθηκαν ερευνητικά από το πρώτο μισό του 18ου αιώνα. Ο παλαιότερος νόμος είναι του **De Moivre** (1725), όπου ήταν ο πρώτος που επιχείρησε να προτείνει ένα μοντέλο θνησιμότητας. Μοντελοποίησε την ένταση θνησιμότητας ως συνάρτηση της ηλικίας,

$$\mu_x = \frac{1}{\omega - x}, \qquad x = 1,2, \dots, n$$

όπου ω είναι η οριακή ηλικία. Όμως το μοντέλο αυτό περιέγραφε ικανοποιητικά τη θνησιμότητα μόνο στις μεγάλες ηλικίες και φυσικά δεν έχει καμία εφαρμογή σήμερα. Αντίθετα ένας νόμος με πολλές εφαρμογές σε προβλήματα αναμονής, λειτουργίας συστημάτων, φθοράς, απαξίωσης, κλπ. (όχι όμως ιδιαίτερα στη μελέτη της ανθρώπινης θνησιμότητας) είναι ο εκθετικός νόμος της γενικευμένης οικογένειας εκθετικών κατανομών, όπου η μαθηματική του έκφραση είναι η $e^{-\mu x}, x = 1,2, \dots, n$.

Η εξέλιξη του παραπάνω νόμου, (επέκταση του), διατυπώθηκε εκατό χρόνια αργότερα το 1825 από τον **Gompertz**. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (pdf) της κατανομής *Gompertz* (G) με παραμέτρους θ και ξ, όπου $\theta, \xi > 0$ είναι η

$$f_G(x) = \theta e^{\xi x} e^{-\frac{\theta}{\xi}(e^{\xi x} - 1)}, \qquad x \geq 0$$

Σύμφωνα με τον νόμο αυτό, η ένταση της θνησιμότητας μ_x αυξάνεται με γεωμετρική πρόοδο, ισχύει δηλαδή

$$\mu_x = \theta e^{\xi x}$$

όπου θ και e^{ξ} είναι θετικές παράμετροι. Η παράμετρος $\boldsymbol{e^{\xi}}$ περιγράφει την φυσιολογική φθορά της ανθρώπινης ζωής ή τον ρυθμό μεταβολής της θνησιμότητας του πληθυσμού και είναι άμεσα

εξαρτώμενη από την ηλικία (αναφέρεται αναλυτικά και ως ποσοστό των άνω των 70 ετών προς το σύνολο του πληθυσμού, συντελεστής θνησιμότητας ή κλίση Gompertz).

Η παράμετρος $\boldsymbol{x}$ περιγράφει τον χρόνο ζωής (σε έτη), ενώ η παράμετρος $\boldsymbol{\theta}$ περιγράφει τον βρεφικό ρυθμό θνησιμότητας του πληθυσμού. Μία μελέτη του 1998, έδειξε ότι η παράμετρος e^{ξ} λαμβάνει τιμές / σταθεροποιείται γύρω από το 1.009 (Lytrokapi, 1998).

Ο νόμος αυτός συχνά περιγράφει αρκετά ικανοποιητικά τα εμπειρικά δεδομένα θνησιμότητας ενός πληθυσμού τουλάχιστον για ένα διάστημα 60 – 70 ετών, κατά κανόνα όμως δεν δίνει τα επιθυμητά αποτελέσματα στις ακραίες ηλικίες, υπερεκτιμώντας την πιθανότητα θανάτου στις μεγάλες ηλικίες και υποεκτιμώντας την στις πολύ μικρές. Το βασικότερο μειονέκτημα του νόμου *Gompertz* είναι ότι λαμβάνει υπόψη του μόνον τη συστηματική «φυσιολογική φθορά» και αγνοεί την επίδραση του τυχαίου στοιχείου. Προς βελτίωση του νόμου *Gompertz,* προτάθηκε ο «1ος νόμος του Makeham» (1860) που είχε ως στόχο να μειώσει, αν όχι να εξαλείψει, τα μειονεκτήματα των προηγούμενων νόμων με στόχο την καλύτερη προσαρμογή της πραγματικότητας με τα στατιστικά αποτελέσματα των αναλύσεων. Ο **1ος νόμος του Makeham** δίνεται από την ακόλουθη μαθηματική έκφραση:

$$\mu_x = \theta e^{\xi x} + \lambda$$

όπου $\boldsymbol{\lambda}$ παράμετρος - σταθερή σε όλες τις ηλικίες - που εξετάζει την τυχαιότητα του θανάτου που μπορεί να οφείλεται σε επιδείνωση της υγείας ή τυχαίο παράγοντα και είναι ανεξάρτητο της ηλικίας, αφορά δηλαδή το σύνολο του πληθυσμού. Η εισαγωγή της τρίτης παραμέτρου (λ) καθιστά το νόμο *Makeham* πιο ευέλικτο στην απεικόνιση εμπειρικών δεδομένων. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (pdf) της κατανομής *Gompertz - Makeham* (GM) με παραμέτρους θ, ξ και λ όπου $\theta, \xi, \lambda > 0$ είναι η

$$f_{GM}(x) = \left(\theta e^{\xi x} + \lambda\right) e^{-\lambda x - \frac{\theta}{\xi}(e^{\xi x} - 1)}, \qquad x \geq 0$$

Η αντίστοιχη συνάρτηση κινδύνου (*hazard function*) είναι $h(x) = \theta e^{\xi x} + \lambda$ και η αθροιστική συνάρτηση κατανομής είναι η $F_{GM}(x) = 1 - e^{-\lambda x - \frac{\theta}{\xi}(e^{\xi x} - 1)}$, $x \geq 0$.

Στη συνέχεια, ο ίδιος ο Makeham ακολούθησε μια σειρά από τροποποιήσεις των πρωταρχικών μοντέλων θνησιμότητας με στόχο πάντα την καλύτερη προσαρμογή των στατιστικών αποτελεσμάτων στην πραγματικότητα, για να παρουσιαστεί ο «2ος νόμος του Makeham» ή «**Γενικευμένος νόμος Makeham**» ή «Generalized Gompertz Makeham»

$$\mu_x = \theta e^{\xi x} + \lambda + \kappa x$$

όπου συνδυάζεται ένα γραμμικό $(\boldsymbol{\lambda + \kappa x})$ μέρος με λ σταθερή παράμετρος που εξετάζει την τυχαιότητα του θανάτου που μπορεί να οφείλεται σε επιδείνωση της υγείας ή τυχαίο παράγοντα και $\boldsymbol{\kappa}$ άγνωστη θετική παράμετρος που εξετάζει κάθε φορά γεγονότα που ενδιαφέρουν τον ερευνητή και είναι άμεσα εξαρτώμενο της ηλικίας και ένα εκθετικό μέρος $(\boldsymbol{\theta e^{\xi x}})$.

Η κατανομή *Generalized - Gompertz Makeham* (GGM) έχει την παρακάτω συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{GGM}(x) = \left(\theta e^{\xi x} + \lambda + \kappa x\right) e^{-\frac{\kappa}{2}x^2 - \lambda x - \frac{\theta}{\xi}\left(e^{\xi x} - 1\right)}, \qquad \theta, \xi, \lambda, \kappa > 0, \qquad x \geq 0$$

και αντίστοιχη αθροιστική συνάρτηση κατανομής

$$F_{GGM}(x) = 1 - e^{-\frac{\kappa}{2}x^2 - \lambda x - \frac{\theta}{\xi}\left(e^{\xi x} - 1\right)}, \qquad \theta, \xi, \lambda, \kappa > 0, \qquad x \geq 0$$

Οι τρεις προαναφερθέντες νόμοι θνησιμότητας θεωρούνται ως οι κύριες κατανομές που περιγράφουν επαρκώς τόσο τη φυσιολογική θνησιμότητα, που προέρχεται από τη γήρανση του πληθυσμού, όσο και την πιθανότητα θανάτου που σχετίζεται με την αιτία κάποιας ασθένειας ή τυχαίου συμβάντος. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.), που υποδηλώνεται από το $f(x)$ δίνει την πιθανότητα θανάτου για ένα άτομο στην ηλικία x και η αθροιστική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, που δηλώνεται από την $F(x)$ είναι το συμπλήρωμα της συνάρτησης επιβίωσης (Horiuchi & Coale, 1990). Τόσο η πυκνότητα πιθανότητας όσο και οι αθροιστικές συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας σχετίζονται με το ποσοστό θνησιμότητας (hazard) όπως φαίνεται στην παρακάτω εξίσωση

$$\mu_x = \frac{f(x)}{1 - F(x)}$$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, η αθροιστική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και η συνάρτηση κινδύνου, για καθεμία από τις τρεις κατανομές που εξετάστηκαν εδώ - οι νόμοι Gompertz, Makeham και γενικευμένοι νόμοι της θνησιμότητας του Makeham - συνοψίζονται στον πίνακα 1.

Αξίζει να αναφερθεί πως στη βιβλιογραφία εντοπίζεται μια πληθώρα μοντέλων θνησιμότητας και ο ερευνητής καλείται ανάλογα με τις ανάγκες του, να επιλέξει και το μοντέλο που προσαρμόζεται καλύτερα στα δεδομένα του. Ενδεικτικά αναφέρονται οι νόμοι των Opperman (1870), Thiel (1872), Wittstein (1883), Steffenson (1930), Perks (1932), Harper(1936) και Weibull (1939) ενώ τα μοντέλα των Heligman και Pollard (1980) ή Rogers και Little (1994)

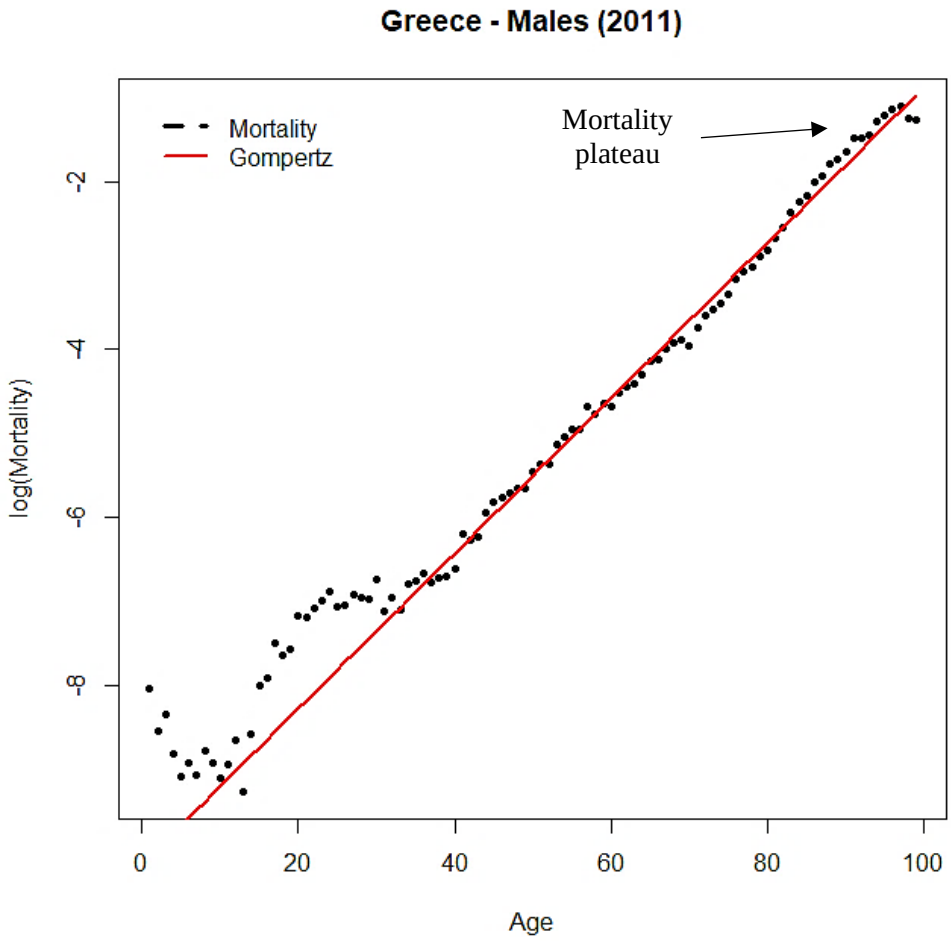
είναι τα πιο πρόσφατα. Επίσης η μορφή των παραπάνω νόμων θνησιμότητας τα καθιστούν ευέλικτα σε επίπεδο συνδυασμού / μίξης με ήδη γνωστές πιθανοθεωρητικές κατανομές, όπως είναι η Εκθετική, η Γάμμα, η Βήτα και άλλες κατανομές.

Model	Probability density	Cumulative density	Hazard
Gompertz	$\theta e^{\xi x} e^{-\frac{\theta}{\xi}(e^{\xi x}-1)}$	$1 - e^{-\frac{\theta}{\xi}(e^{\xi x}-1)}$	$\theta e^{\xi x}$
Gompertz Makeham	$\left(\theta e^{\xi x} + \lambda\right) e^{-\lambda x - \frac{\theta}{\xi}(e^{\xi x}-1)}$	$1 - e^{-\lambda x - \frac{\theta}{\xi}(e^{\xi x}-1)}$	$\theta e^{\xi x} + \lambda$
Generalized Gompertz Makeham	$\left(\theta e^{\xi x} + \lambda + \kappa x\right) e^{-\frac{\kappa}{2}x^2 - \lambda x - \frac{\theta}{\xi}(e^{\xi x}-1)}$	$1 - e^{-\frac{\kappa}{2}x^2 - \lambda x - \frac{\theta}{\xi}(e^{\xi x}-1)}$	$\theta e^{\xi x} + \lambda + \kappa x$

Πίνακας 1. Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, Αθροιστική Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας και Συνάρτηση Κινδύνου για τις κατανομές των Gompertz, Gompertz-Makeham και Generalized Gompertz Makeham.

Γραφικά, τα δεδομένα θνησιμότητας παρουσιάζονται συχνότερα σε λογαριθμική κλίμακα (λογάριθμος θνησιμότητας ως προς την ηλικία – *log(Mortality)*) και επομένως η εκθετική τους αύξηση με την ηλικία, όπως εκφράζεται από τον νόμο Gompertz (G), απεικονίζεται με ευθεία γραμμή.

Το *Γράφημα 3* δείχνει ενδεικτικά τα ποσοστά θνησιμότητας των ανδρών για τον πληθυσμό της Ελλάδας για το έτος απογραφής του 2011 και η γραμμή Gompertz (σταθερή κόκκινη γραμμή) αποτυπώνει την εκθετική τους αύξηση σε μεγάλο τμήμα της διάρκειας ζωής. Αν και η εκθετική αύξηση της θνησιμότητας κυριαρχεί σε ένα ευρύ φάσμα ηλικιών, παρατηρούνται κάποιες αποκλίσεις από αυτήν στον νεαρό πληθυσμό (πριν από τα 35 έτη) και στις εξαιρετικά μεγάλες (μετά από 90 έτη) ηλικίες. Πρόβλημα το οποίο και επισημάνθηκε παραπάνω.



Γράφημα 3. Νόμος Θνησιμότητας του Gompertz. Το ποσοστό θνησιμότητας αυξάνεται εκθετικά από τη σεξουαλική ωριμότητα έως τις εξαιρετικά υψηλές ηλικίες. Τα δεδομένα που παρουσιάζονται είναι τα ποσοστά θνησιμότητας του Ελληνικού πληθυσμού (άνδρες) της περιόδου 2011, σε λογαριθμική κλίμακα. Τα δεδομένα λαμβάνονται από τη βάση δεδομένων ανθρώπινης θνησιμότητας (http://www.mortality.org).

Αντικείμενο μελέτης (Irwin, 1939 και Manton et al., 2008), αποτέλεσε η απόκλιση από την εκθετική καμπύλη που παρουσιάζει η θνησιμότητα (Γράφημα 3) στις πολύ υψηλές ηλικίες (περίπου στα 95+ έτη). Αυτό είναι ένα φαινόμενο που ονομάζεται «επιβράδυνση της θνησιμότητας ή καθυστέρηση (παράταση) ζωής».

Η *επιβράδυνση της θνησιμότητας* περιγράφει την μείωση της έντασης της θνησιμότητας, στις υψηλές ηλικίες σε σύγκριση με την εκθετική αύξηση που παρατηρείται μετά την ενηλικίωση. Το φαινόμενο αυτό είναι γνωστό με τους αγγλικούς όρους ως «Mortality level-off» ή «Mortality plateau» (Finkelstein, 2012).

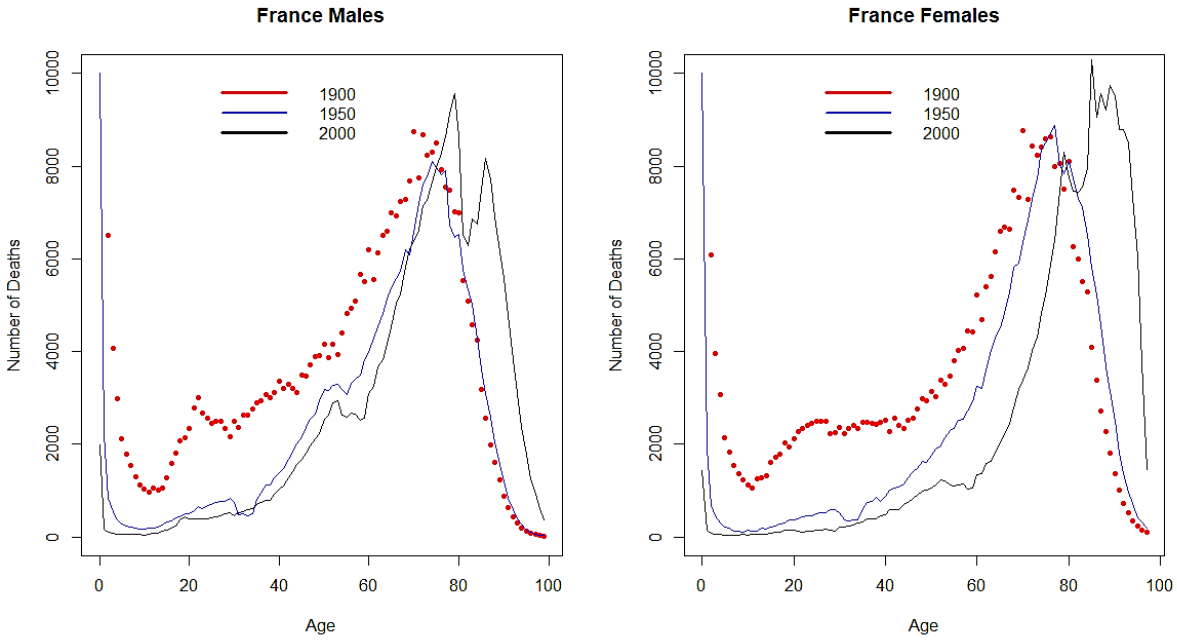
2.2 Η χρονολογική εξέλιξη της Θνησιμότητας

Μελετώντας την ιστορική διαδρομή της θνησιμότητας σε παγκόσμια κλίμακα, παρατηρείται μείωση της πιθανότητας θανάτου τόσο χρονολογικά στο πέρασμα των ετών, όσο και στα αντίστοιχα ηλικιακά διαστήματα αυτών. Το φαινόμενο αυτό είναι αποτέλεσμα συνδυασμού πολλών παραγόντων: όπως η αλματώδης πρόοδος της ιατρικής, η βελτίωση στην υγεία και την ασφάλεια των ανθρώπων, οι εξελίξεις στην υγιεινή της καθημερινότητας και πολλά άλλα. Γραφικά, η εξέλιξη αυτή αποτυπώνεται με την προς τα κάτω συμπίεση της καμπύλης θνησιμότητας (Γράφημα 4) και την αντίστοιχη ορθογώνια μορφή της καμπύλης επιβίωσης.

Στη διεθνή βιβλιογραφία (Omran, 2005, Olshansky et al., 1986, Robine, 2001) αναλύεται η εξέλιξη της θνησιμότητας, μέσω της θεωρίας της επιδημιολογικής μετάβασης. Σύμφωνα με την συγκεκριμένη θεωρία, ορισμένες φάσεις των ιστορικών αλλαγών προκάλεσαν την μετακίνηση των ποσοστών γεννήσεων και θανάτων σε διαφορετικά επίπεδα και επηρέασαν την ανάπτυξη των ανθρώπινων πληθυσμών.

Σε αυτή την ενότητα αναλύονται δύο διεθνείς παρατηρήσεις, οι οποίες σχετίζονται με την εξέλιξη της θνησιμότητας, τόσο για άνδρες όσο και για γυναίκες ιστορικά. Η πρώτη αφορά τη «**συμπίεση της θνησιμότητας**» που συνέβη στον ανθρώπινο πληθυσμό τα τελευταία 100 χρόνια. Η «συμπίεση της θνησιμότητας» αναφέρεται στη μείωση της διακύμανσης της ηλικιακής κατανομής των θανάτων με την πάροδο του χρόνου. Λόγω της μείωσης της θνησιμότητας με την πάροδο του χρόνου, ένας μεγαλύτερος αριθμός θανάτων συμβαίνει αργότερα στη διάρκεια ζωής και αυτοί οι θάνατοι συγκεντρώνονται σε ένα ορισμένο εύρος ηλικίας (μετατόπιση προς τα δεξιά στις μεγαλύτερες ηλικίες).

Το φαινόμενο της «συμπίεσης της θνησιμότητας» αποτυπώνεται στο Γράφημα 4, με βάση τα δεδομένα της Γαλλίας. Το κόκκινο, το μπλε και τα μαύρο χρώμα υποδηλώνουν τη διασπορά των θανάτων στις αντίστοιχες ηλικίες, όπως έχουν ληφθεί από τους πίνακες θνησιμότητας των περιόδων 1900, 1950 και 2000 τόσο για άνδρες όσο και για γυναίκες. Τα δεδομένα, αφορούν στον πληθυσμό της Γαλλίας και τα στοιχεία έχουν αντληθεί από την ανθρώπινη βάση δεδομένων (Human Mortality Database). Παρατηρείται ότι στο διάστημα των 100 ετών, μεταξύ 1900 – 2000, ο αριθμός των θανάτων στις ηλικίες κάτω των 65 ετών μειώνεται σημαντικά. Ακόμα και αν ληφθεί το μισό χρονικό εύρος για 50 έτη (1900 – 1950), τα συμπεράσματα παραμένουν όμοια και για τα δύο φύλα (Γράφημα 4).



Γράφημα 4. Το «φαινόμενο της συμπίεσης της Θνησιμότητας». Παρατηρείται ότι σε διάστημα 100 ετών ο αριθμός των θανάτων για ηλικίες κάτω των 65 ετών μειώνεται σημαντικά, τόσο για άνδρες όσο και για γυναίκες.
Τα δεδομένα προέρχονται από το Human Mortality Database (http://www.mortality.org).

Η δεύτερη παρατήρηση αφορά ένα από τα διαχρονικά ερευνητικά ερωτήματα στην επιστημονική κοινότητα, που σχετίζεται με την ηλικιακή εξέλιξη της πιθανότητας θανάτου, στο αν τελικά **υπάρχει ένα ανώτατο όριο στην ανθρώπινη ζωή**. Στην πραγματικότητα, η μακροζωία και το προσδόκιμο ζωής αυξάνονται με την πάροδο του χρόνου και είναι άγνωστο αν υπάρχει βιολογικά σχετιζόμενη «μέγιστη διάρκεια ζωής» (Wilmoth et al., 2000). Βιολογικά, η ύπαρξη ενός ορίου στη διάρκεια ζωής μπορεί να εξηγηθεί εν μέρει από ένα φαινόμενο γνωστό ως το «όριο Hayflick» (Hayflick, 1965), το οποίο δίνει τον αριθμό των χρόνων που πολλαπλασιάζεται ένας πληθυσμός ανθρώπινων κυττάρων μέχρι το τέλος της κυτταρικής διαίρεσης.

Συγκεκριμένα, κατά τη διάρκεια της διαδικασίας αντιγραφής του DNA που εμφανίζεται σε κάθε κυτταρική διαίρεση, μειώνεται το μήκος κάθε πολυμερούς. Όταν το πολυμερές εξαφανιστεί (ή γίνεται μικρότερο από ένα ορισμένο κρίσιμο μήκος), το κύτταρο δεν μπορεί πλέον να διαιρεθεί. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα ο ανθρώπινος οργανισμός να χάνει σταδιακά την ικανότητά του να επισκευάζει τους ιστούς του, καταλήγοντας στο θάνατο (Hayflick, 1965).

2.3 Στατιστική ανάλυση Θνησιμότητας μέσω του λογισμικού R

Η στατιστική επιστήμη έχει αναπτυχθεί ραγδαία τα τελευταία χρόνια, λόγω της ευρείας διάδοσης των υπολογιστών και της διαθεσιμότητας τους για περίπλοκους υπολογισμούς που, πριν από τη χρήση των υπολογιστών, ήταν πρακτικά αδύνατοι να υπολογιστούν. Η ανάπτυξη γλωσσών προγραμματισμού οδήγησε σταδιακά στην ανάπτυξη εργαλείων για την παρουσίαση πιο σύνθετων προγραμμάτων. Τα πρώτα στατιστικά πακέτα αφορούσαν συγκεκριμένες στατιστικές τεχνικές, όπως είναι οι πινακοποιήσεις και οι έλεγχοι υποθέσεων. Φυσικά αφορούσαν εξειδικευμένο προσωπικό και ήταν δύσκολα στο χειρισμό τους. Στη συνέχεια, τα στατιστικά πακέτα έγιναν πιο φιλικά προς τον απλό χρήστη.

Το ***R*** (ή η ***R***) (R Development Core Team, 2010) είναι ένα ολοκληρωμένο περιβάλλον εργασίας για στατιστικούς υπολογισμούς και γραφήματα. Είναι μια γλώσσα προγραμματισμού που χρησιμεύει κυρίως για ανάλυση δεδομένων και εφαρμογή διάφορων «κλασσικών» και σύγχρονων στατιστικών τεχνικών. Η ***R*** προσφέρει εξαιρετικές δυνατότητες στον ερευνητή. Χαρακτηρίζεται από εύκολη επεκτασιμότητα καθώς ο κάθε χρήστης μπορεί να δημιουργήσει τις δικές του συναρτήσεις και να τις μορφοποιήσει σε μία βιβλιοθήκη (CRAN) η οποία μπορεί να δημοσιοποιηθεί και να χρησιμοποιηθεί αργότερα από κάποιον άλλο χρήστη με τις ίδιες ανάγκες.

Είναι ένα πλήρες πακέτο για στατιστική ανάλυση που προσφέρει:

- Ποικιλία σύγχρονων στατιστικών μεθόδων.
- Σύγχρονες τεχνικές σχετικά με θέματα στατιστικής μοντελοποίησης.
- Εξαιρετική ποιότητα γραφικών και κυρίως
- Εύκολο προγραμματισμό **νέων συναρτήσεων** και μεθοδολογιών.

Σε σύγκριση με το εμπορικό λογισμικό SPSS, η ***R*** υπολείπεται ενός φιλικού παραθυρικού περιβάλλοντος χρήσης, ωστόσο η χρησιμοποίησή της για την ανάλυση βελτιώνει γρήγορα την ουσιαστική ικανότητα του ερευνητή αλλά και την βαθύτερη αντίληψη της θεωρίας καθώς ο χρήστης ελέγχει καλύτερα τον τρόπο με τον οποίο γίνεται η επεξεργασία των δεδομένων.

Η γλώσσα ***R*** είναι ελεύθερα διαθέσιμη στο διαδίκτυο (http://www.r-project.org) και η υποστήριξή της γίνεται με εθελοντική συνεισφορά. Υπάρχουν πολλά διαθέσιμα πακέτα που υποστηρίζονται από την ***R*** και τα οποία υλοποιούν πολλές κλασσικές και μοντέρνες στατιστικές μεθόδους (Forte, 2015). Είναι δυνατή η εγκατάστασή της σε διαφορετικές πλατφόρμες, όπως είναι τα Windows, Linux και Mac OS. Επίσης, αν και όλη η ανάπτυξη της ***R*** παρουσιάζεται ως μια

γλώσσα εντολών, δηλαδή ο χρήστης δεν χρησιμοποιεί παράθυρα αλλά γράφει τον δικό του κώδικα, τα τελευταία χρόνια προσφέρονται επιλογές μέσω παραθύρων για μεγαλύτερη ευκολία στο χρήστη.

Η ***R*** και κατ΄επέκταση και η ανάλυσή μας, λειτουργεί στη στατιστική ανάλυση με τη μορφή μιας σειράς βημάτων. Σε κάθε βήμα αποθηκεύει τα αποτελέσματα σε αντικείμενα για περαιτέρω ανάλυση, ενώ τα άλλα στατιστικά πακέτα, όπως το SPSS, δίνουν ένα συνολικό τελικό αποτέλεσμα στην έξοδο. Αυτή είναι και η διαφορά της από τα άλλα στατιστικά πακέτα.

2.4 Τα Βασικά προβλήματα στη μοντελοποίηση θνησιμότητας

Τα πρότυπα θνησιμότητας στους ανθρώπινους πληθυσμούς αντικατοπτρίζουν τους βιολογικούς, κοινωνικούς και ιατρικούς παράγοντες που επηρεάζουν τη ζωή μας και η μαθηματική μοντελοποίηση αποτελεί σημαντικό εργαλείο για την απεικόνιση και εν συνεχεία ανάλυση αυτών των μοτίβων.

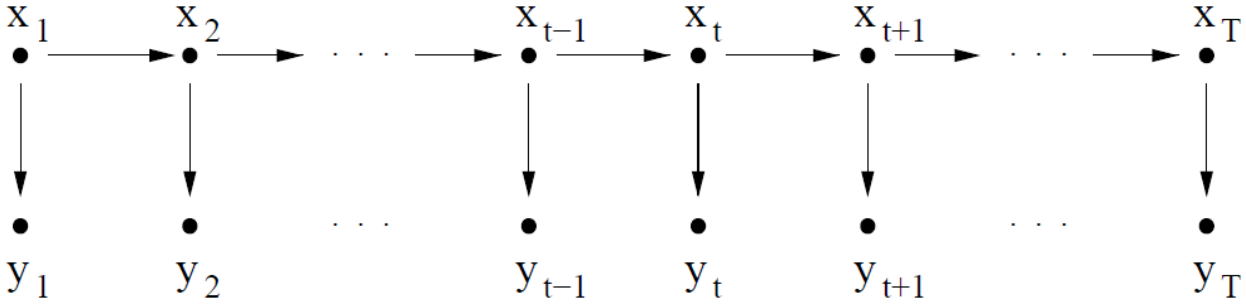
Πριν την παρουσίαση και ανάλυση του νέου μοντέλου θνησιμότητας και των αντίστοιχων εφαρμογών αυτού, θα αναφερθούν τρία βασικά προβλήματα που προκύπτουν κατά τη διαδικασία ανάπτυξης κατάλληλης στατιστικής συμπερασματολογίας με την παράλληλη βοήθεια και ανάπτυξη των κατάλληλων αλγορίθμων του μοντέλου. Πιο συγκεκριμένα, παρακάτω γίνεται αναφορά του τρόπου με τον οποίο ένα ρεαλιστικό και ίσως αφηρημένο μοτίβο της καθημερινότητας (όπως είναι η θνησιμότητα) δύναται να μοντελοποιηθεί με μαθηματικούς / στατιστικούς όρους, ακολουθώντας τα κατάλληλα μαθηματικά πρότυπα και τις αντίστοιχες στοχαστικές διαδικασίες.

Ως θνησιμότητα, θεωρείται μια διαδικασία που λαμβάνει χώρα σε μια χωρική διάσταση (χώρα, ήπειρο κλπ.) για συγκεκριμένο χρόνο/έτη (t) και η οποία ονομάζεται **σύστημα θνησιμότητας** (γράφημα 5). Το σύστημα αυτό, παρουσιάζεται ως μία στοχαστική διαδικασία $\{X_t\}$, που δεν είναι παρατηρήσιμη (είναι κρυφή), δεν είναι γνωστός ο αριθμός των θανόντων εκ των προτέρων – πριν συμβεί το γεγονός - και πολύ περισσότερο τις αιτίες που οδήγησαν σε αυτό, αλλά παράγει μία παρατηρήσιμη ακολουθία εξόδων (ποσοστό ή αριθμό θανάτων) την $\{Y_t - CDR\}$.

Πρόβλημα 1ο *(Πρόβλημα αποτίμησης)*

Σε αυτό το πρόβλημα, εκείνο που θα πρέπει να εξεταστεί και εντέλει να αντιμετωπιστεί, είναι ο υπολογισμός της πιθανότητας μιας συγκεκριμένης ακολουθίας παρατηρήσεων, έστω $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_T)$, η οποία προέρχεται από ένα συγκεκριμένο κρυμμένο μονοπάτι θνησιμότητας (γράφημα 5) και έστω ότι αυτό παράγεται από τη διανυσματική παράμετρο θ, δηλαδή της πιθανοφάνειας $f(y|\theta)$.

Εξηγώντας καλύτερα, η πιθανότητα αυτή μας δίνει ένα μέτρο του πόσο καλά ταιριάζει το μοντέλο με τις παρατηρήσεις *Y*. Κυρίως χρησιμεύει για την περίπτωση που υπάρχουν πολλά μοντέλα υποψήφια, αφού μας δείχνει ποιο ταιριάζει περισσότερο.



Γράφημα 5. Γραφική απεικόνιση μιας συγκεκριμένης ακολουθίας παρατηρήσεων, έστω $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_T)$, που προέρχεται από ένα συγκεκριμένο κρυμμένο μονοπάτι θνησιμότητας, το Σύστημα Θνησιμότητας. Ουσιαστικά οι παρατηρήσεις των Y, είναι οι Αδροί Δείκτες Θνησιμότητας (CDR).

Πρόβλημα 2ο *(Πρόβλημα αποκρυπτογράφησης)*

Στο παρόν πρόβλημα γίνεται προσπάθεια να ανακαλυφθεί το «κρυφό» κομμάτι του μοντέλου, δηλαδή το χώρο καταστάσεων της Πιθανοθεωρητικής Αλυσίδας, με δεδομένη την ύπαρξη μιας συγκεκριμένης ακολουθίας παρατηρήσεων $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_T)$. Όπως είναι γνωστό σε κάθε πρόβλημα στατιστικού περιεχομένου, δεν υπάρχει «σωστή» επιλογή, ούτε και «μοναδική», ως απάντηση στο πρόβλημα αυτό, εκτός από κάποιες εκφυλισμένες περιπτώσεις. Για την εκλογή της βέλτιστης ακολουθίας καταστάσεων, υπάρχουν αρκετά κριτήρια (π.χ. τα AIC, BIC και $logLik$) που χρησιμοποιούνται ανάλογα με την περίπτωση και τους σκοπούς μας.

Δηλαδή, έχοντας τον αριθμό θανάτων ως παρατηρήσεις (γνωστές στον ερευνητή) οι οποίες παράγονται σε διακριτό χρόνο και εξαρτώνται από διάφορες καταστάσεις (παράμετροι άγνωστες στον ερευνητή).

Πρόβλημα 3ο *(Πρόβλημα εκτίμησης)*

Στην περίπτωση αυτή, σκοπός είναι να προσδιοριστούν οι βέλτιστες παράμετροι του μοντέλου, έτσι ώστε με δεδομένη την ακολουθία των παρατηρήσεων Y, να μεγιστοποιείται η πιθανοφάνεια αν δουλεύουμε με την *Κλασσική Στατιστική* ή να προσομοιώσουμε αν δουλεύουμε με την *Μπεϋζιανή Στατιστική*. Η Μπεϋζιανή Στατιστική διαφοροποιείται από την Κλασσική Στατιστική, από το γεγονός ότι ο ερευνητής υποθέτει μία εκ των προτέρων πληροφορία για το δείγμα του (μέση τιμή, διακύμανση) και προχωράει με βάση αυτή την πληροφορία στην ανάλυση. Αντίθετα η Κλασσική Στατιστική δεν υποθέτει καμία εκ των προτέρων πληροφορία για το δείγμα. Επιλέγοντας λοιπόν το κατάλληλο μοντέλο, γίνεται προσπάθεια να βελτιστοποιηθούν οι παράμετροί του, ώστε να ανταποκρίνονται όσο το δυνατόν καλύτερα στον τρόπο με τον οποίο προέκυψε η ακολουθία Y. Συγκεκριμένα, δεν γίνεται τίποτα περισσότερο από το να προσαρμόζονται οι παράμετροι του μοντέλου που έχει επιλεγεί, ώστε να μεγιστοποιείται η $Pr(Y|\theta)$.

Είναι το πιο σημαντικό κομμάτι για σχεδόν όλες τις εφαρμογές, καθώς επιτρέπει να προσαρμόζονται οι παράμετροι κατά τέτοιο τρόπο, ώστε το μοντέλο επιλογής να περιγράφει όσο το δυνατόν καλύτερα το φαινόμενο που καλείται να ερμηνεύσει, όπως για παράδειγμα το φαινόμενο της θνησιμότητας.

2.5 Χαρτογράφηση Θνησιμότητας (Mapping Mortality)

Κατά τις τελευταίες δύο δεκαετίες, παρατηρείται μία έκρηξη ενδιαφέροντος για τη χαρτογράφηση ασθενειών και κατ' επέκταση την Χαρτογράφηση Θνησιμότητας (Mapping Mortality), γεγονός που συνδυάζεται με τις πρόσφατες εξελίξεις στον τομέα των τεχνικών της χωρικής στατιστικής και την αύξηση της διαθεσιμότητας ηλεκτρονικών γεωγραφικών τεχνολογιών του συστήματος πληροφοριών (GIS) - Geographical Information Systems. Η Χαρτογράφηση Θνησιμότητας είναι ένας από τους τομείς της εφαρμοσμένης στατιστικής που αναπτύσσεται πολύ γρήγορα και έχει μεγάλη ερευνητική απήχηση. Κυρίαρχο παράδειγμα αποτελεί η πρόσφατη επιδημία του COVID-19, όπου πλήθος θεματικών χαρτών χρησιμοποιούνται για την αποτύπωση της έντασης της πανδημίας και την λήψη μέτρων για τον περιορισμό περαιτέρω διάδοσης. Η χαρτογράφηση επομένως, περιλαμβάνει χωρικά στοιχεία

και μεθόδους που κυμαίνονται από την απλή παρουσίαση του προβλήματος μέχρι την ανάδειξη πολιτικών δράσης και τη λήψη αποφάσεων.

Στην πραγματικότητα, η «Χαρτογράφηση Θνησιμότητας» είναι ένα πολυδιάστατο γνωστικό αντικείμενο που προσεγγίζει την κατεύθυνση της κατανόησης των μηχανισμών μέσω των οποίων συνδέονται τα προβλήματα της ανθρώπινης υγείας στο χώρο. Απεικονίζει τα αποτελέσματα των ερευνών για την ανθρώπινη υγεία, την θνησιμότητα και την επιβίωση σε χάρτες, οι οποίοι αποτελούν μία ειδική κατηγορία θεματικών χαρτογραφικών απεικονίσεων.

Ορισμένοι ερευνητές προσεγγίζουν τη «Χαρτογράφηση Θνησιμότητας» μελετώντας τη σχέση μεταξύ φυσικού περιβάλλοντος και μεταδοτικών ασθενειών (Lawson, 2013), ενώ άλλοι επιδιώκουν την λεπτομερή χαρτογράφηση διαφόρων τύπων ασθενειών, με σκοπό να προσδιορίσουν ή να κατανοήσουν καλύτερα απλές ή πολλαπλές συσχετίσεις των ασθενειών αυτών με φυσικά ή/και πολιτισμικά φαινόμενα (Pollard, 1996). Υπάρχουν επίσης άλλοι που προσεγγίζουν την εξάπλωση και τη διάχυση των ασθενειών με εργαλεία γεωγραφικής ανάλυσης (Wakefield, 2006), ώστε να διαγνώσουν τους χωρικούς και χρονικούς μηχανισμούς επίδρασης στη μετεξέλιξη μίας ενδημικής ασθένειας σε επιδημία, ενώ ακόμα άλλες χωρικές μελέτες που αφορούν σε ανθρώπινα προβλήματα υγείας έχουν να κάνουν με τη διαχείριση πόρων για την πρόνοια και τη θεραπεία (Elliott & Wartenberg, 2004).

Οι τεχνολογίες αιχμής διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στη χαρτογράφηση των ασθενειών και της θνησιμότητας και βοηθούν στη σωστή διαχείριση των περίπλοκων μοντέλων που απαιτούνται για τους χάρτες πρόβλεψης, ώστε να εξαχθούν ασφαλή συμπεράσματα για τις επιπτώσεις της θνησιμότητας. Οι περισσότερες προσεγγίσεις για την παραγωγή χωρικών επιδημιολογικών μοντέλων και χωρικών μοντέλων θνησιμότητας ασχολούνται με την κατανόηση του πώς η ανθρώπινη θνησιμότητα εξαπλώνεται από μία γεωγραφική περιοχή σε μία άλλη και πώς τελικά τα πρότυπα των νόμων θνησιμότητας αλλάζουν με το χρόνο (Cliff and Hagget 1996, Hagget 2000). Οι δυναμικοί χάρτες και η εξέλιξή τους είναι θεμελιώδεις σε αυτόν τον τομέα.

Πιο συγκεκριμένα, για τη δημιουργία, επεξεργασία, αποθήκευση και οπτικοποίηση των χωρικών δεδομένων (Καλογήρου, 2015) έχουν αναπτυχθεί ολοκληρωμένα πληροφοριακά συστήματα (Geographical Information Systems – GIS). Τα οποία υποστηρίζουν πολλές μορφές χωρικών δεδομένων, διαφορετικούς τύπους αρχείων από διαφορετικά Συστήματα Διαχείρισης Βάσεων Δεδομένων (Database Management Systems). Στα GIS τα δεδομένα χωρίζονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες: α) στα διανυσματικά (vector) και β) στα ψηφιδωτά (raster) δεδομένα.

α) Τα διανυσματικά δεδομένα αναπαριστούν τριών ειδών χωρικές οντότητες με βάση το σχήμα τους (σημεία (points), διανύσματα / γραμμές (polylines) και πολύγωνα (polygons)).

Ένα παράδειγμα διανυσματικών δεδομένων παρουσιάζεται στην εικόνα 1, από την Ελληνική Στατιστική Αρχή (ΕΛ.ΣΤΑΤ.) και το Υπουργείο Παραγωγικής Ανασυγκρότησης, Περιβάλλοντος και Ενέργειας, στην οποία φαίνεται η διοικητική διαίρεση όλης της Ελλάδας, με χρήση κατάλληλων πολύγωνων και γραμμών.



Εικόνα 1. Χάρτης διοικητικής διαίρεσης της Ελλάδας. Διαχωρισμός χωρικών οντοτήτων με πολύγωνα – Πρόγραμμα Καλλικράτης

β) Τα ψηφιδωτά δεδομένα αφορούν κυρίως σε συνεχή πεδία φυσικά ή νοητά. Στα ψηφιδωτά δεδομένα κάθε ψηφίδα αποτελεί ένα τετράγωνο με συγκεκριμένες διαστάσεις που αναπαριστά ένα τμήμα της επιφάνειας της γης (π.χ. δορυφορικές εικόνες).

2.5.1 Χαρτογραφία και Ανάλυση Θνησιμότητας

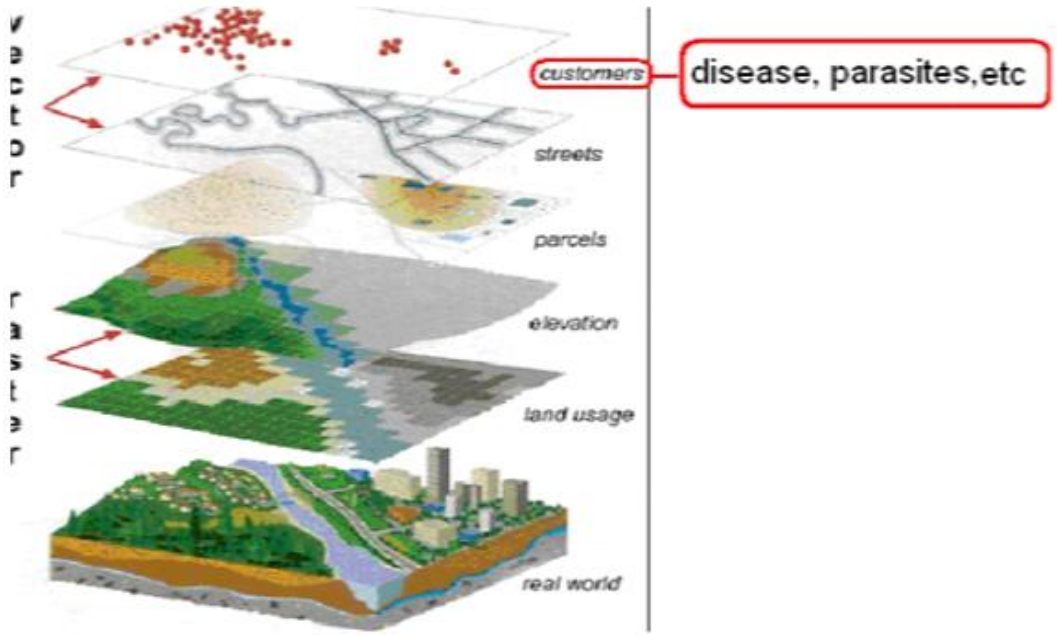
Για να οπτικοποιηθούν τα χωρικά δεδομένα μιας περιοχής και τα αντίστοιχα δεδομένα θνησιμότητας αυτής, χρησιμοποιούνται χάρτες. Η επιστήμη που ασχολείται με τη δημιουργία και τη μελέτη χαρτών ονομάζεται *Χαρτογραφία* (Cartography). Η χαρτογραφία αποτελεί μια ιδιαίτερη επιστήμη (Fotheringham et al., 2000) στο πλαίσιο της οποίας οι τεχνικές γνώσεις του χαρτογράφου συνδυάζονται με τις γραφιστικές του δεξιότητες με αποτέλεσμα να δημιουργούνται ευανάγνωστοι και εντυπωσιακοί χάρτες. Τα χαρακτηριστικά των χαρτών που συνδέονται με τη φύση των χωρικών δεδομένων, αφορούν: α) την κλίμακα, β) την προβολή και γ) το σύστημα συντεταγμένων.

Οι χάρτες Θνησιμότητας έχουν τη δύναμη να «υποστηρίξουν» θέματα δημόσιας υγείας σε παγκόσμιο, εθνικό και τοπικό επίπεδο. Αυτή τους η δυνατότητα, προέρχεται σε μεγάλο βαθμό από τις δυνατότητες του εκάστοτε προγράμματος (όπως είναι η $\boldsymbol{R}$) να υλοποιεί χωρική στατιστική ανάλυση σε διαφορετικό σετ δεδομένων, αλλά και σε διαφορετικές ηλικιακές ομάδες πληθυσμών.

Ο Unwin το 1981, ανέφερε ότι **χωρική ανάλυση** είναι η μελέτη της κατανομής των σημείων, των γραμμών, των περιοχών και των επιφανειών ενός χάρτη (Johnston et al. 2000) ή αλλιώς είναι η επιστήμη που εξάγει αποτελέσματα και κάνει αναλύσεις από τα χωρικά στοιχεία ενός Συστήματος Γεωγραφικών Πληροφοριών. Οι Bailey και Gatrell (1995) ορίζουν τη χωρική ανάλυση ως την ποσοτική μελέτη των χωρικών φαινομένων που βρίσκονται στο γεωγραφικό χώρο.

Οι χωρικές σχέσεις (στους χάρτες) που προκύπτουν βασίζονται σε σχέσεις γειτνίασης, συσχέτισης της θέσης και σχέσεις μαθηματικού αποτελέσματος. Οι Gatrell και Bailey περιγράφουν τρεις γενικούς τύπους χωρικής μελέτης (Tomlin, 1990). Την οπτικοποίηση (visualization) των δεδομένων, την ανάλυση των δεδομένων για διερεύνηση (exploring data analysis) και τέλος την μοντελοποίηση (model building) τους, όπως φαίνεται στην εικόνα 2. Οι χωρικές σχέσεις ποικίλουν σε πολυπλοκότητα, δηλαδή είναι πιθανό να ξεκινούν από ένα απλό χάρτη απεικόνισης – αναπαράστασης και να φτάνουν σε στατιστικά μοντέλα χωρικής

αλληλεπίδρασης και μοντέλα διάχυσης –diffusion models. Η χρησιμότητα των χαρτών στην δημόσια υγεία υποδηλώνεται πολύ εύκολα αρκεί κανείς να κάνει μια απλή ιστορική ανασκόπηση στο απλό παράδειγμα του John Snow με τους κλασσικούς χάρτες των περιστατικών χολέρας (γράφημα 5).



Εικόνα 2. Χαρτογραφικά επίπεδα. Η ανάλυση των δεδομένων διαμορφώνεται ως εξής: οπτικοποίηση (visualization), ανάλυση (exploring data analysis) και μοντελοποίηση (model building). Διακρίνονται και οι δύο κατηγορίες των GIS: στα διανυσματικά (vector) δεδομένα και β) στα ψηφιδωτά (raster) δεδομένα.

Στην εξέλιξη των ετών, η Χαρτογράφηση Θνησιμότητας και η Χωρική Ανάλυση έδειξαν ότι μπορούν να προσφέρουν κάτι περισσότερο από αυτό. Τα πολλαπλά επίπεδα πληροφορίας (layers), τα εξωτερικά δεδομένα και οι πληροφορίες, συνθέτουν την εικόνα των δυνατοτήτων του κατάλληλου μοντέλου. Ενδεικτικά, με τη δημιουργία ενός πολυπαραγοντικού μοντέλου και χρησιμοποιώντας τους κατάλληλους συντελεστές βαρύτητας, είναι δυνατός ο εντοπισμός περιοχών αυξημένης επικινδυνότητας ή περιοχών όπου αναμένεται να εκδηλωθεί μια ασθένεια. Η έγκυρη και κυρίως έγκαιρη ανάδειξη ζωνών επιρροής-κινδύνου (buffer zones) αποτελεί την κρίσιμη πληροφορία που βοηθά στην πρόληψη και αντιμετώπιση του προβλήματος.

Μια ακόμα προσέγγιση όσον αφορά στην οπτικοποίηση, είναι να επιστρατευτούν αναλύσεις παλινδρόμησης (regression analysis) ώστε να παραχθεί η γραμμική σχέση μεταξύ

παραγόντων οι οποίοι εξηγούν καλύτερα την χωρική ποικιλομορφία μιας πορείας ανθρώπινης θνησιμότητας. Τα βάρη από το μοντέλο παλινδρόμησης μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να δημιουργήσουν μια ολοκληρωμένη σύνθεση κινδύνων η οποία αποτυπώνεται σε ένα τελικό χάρτη βάση του οποίου θα διεξαχθούν τα συμπεράσματα (Glass et al., 1995). Ένα παράδειγμα τέτοιας εφαρμογής έλαβε χώρα στις Ηνωμένες Πολιτείες και συνέβαλε στην προσπάθεια αντιμετώπισης του AIDS και της ξαφνικής εξάπλωσης του στα αστικά κέντρα (Glass et al., 1995).

Μια δεύτερη κατηγορία ανάλυσης χωρικών δεδομένων με χρήση κατάλληλων χαρτών, δίνει την δυνατότητα διερεύνησης άγνωστων πτυχών θνησιμότητας για τη διαμόρφωση μιας υπόθεσης εργασίας η οποία θα κατευθύνει την μελλοντική έρευνα (Tomlin, 1990). Μεταξύ των πιο διαδεδομένων μεθόδων αυτής της κατηγορίας είναι αυτές που στοχεύουν στην ταυτοποίηση και ανάδειξη ομάδων χώρου στο χρόνο (space-time clusters) ή σημαντικών σημείων μιας ασθένειας ή κάποιων περιστατικών θανάτου (hot spots). Το Openshaw's Geographic Analysis Machine (GAM) αποτέλεσε μια τέτοια μέθοδο που λειτούργησε μέσω ενός υβριδικού περιβάλλοντος Σ.Γ.Π. Χρησιμοποιήθηκε στην Μεγάλη Βρετανία για περιπτώσεις παιδικής λευχαιμίας, όπου συνδύασε ποικίλες μορφές δεδομένων για να καταλήξει σε ομάδες περιοχών (clusters) υψηλού κινδύνου, ώστε εν συνεχεία η μελέτη να προχωρήσει στην αντιμετώπιση του κινδύνου γειτονικών περιοχών και στην ανάδειξη της στατιστικά σημαντικής πληροφορίας (Openshaw et al., 1987). Παράλληλα, σε αυτή την κατηγορία χωρικής ανάλυσης εντάσσονται και οι χάρτες πιθανοτήτων και πρόβλεψης. Εδώ τα αποτελέσματα δεν εμφανίζονται ποτέ ως απόλυτοι αριθμοί αλλά ως εκτιμήσεις με τα κατάλληλα διαστήματα εμπιστοσύνης. Βέβαια, υπάρχει η δυνατότητα εξομάλυνσης αυτών των αριθμών, με τις κατάλληλες μεθόδους εξομάλυνσης και η συγκεκριμενοποίηση τους μέσω των μεθόδων του Bayes. Αυτός ο συνδυασμός θα μπορούσε να δώσει ακριβή αποτελέσματα τα οποία όμως προέρχονται από πολύπλοκες μεθόδους.

Η μοντελοποίηση των δεδομένων αποτελεί την τρίτη κατηγορία χωρικής ανάλυσης. Περιλαμβάνει διαδικασίες διαμόρφωσης και ελέγχου μιας υπόθεσης σχετικής με την πορεία της ανθρώπινης θνησιμότητας. Χρησιμοποιεί κυρίως μαθηματικούς αλγορίθμους τους οποίους έχει ήδη αποθηκευμένους το πρόγραμμα (ως εντολές). Εδώ το πρόγραμμα της ***R***, μέσω της ψηφιακής βιβλιοθήκης που διαθέτει, δίνει μεγάλες δυνατότητες παραμετροποίησης και στατιστικής ανάλυσης στον ερευνητή. Επίσης, λαμβάνει υπ' όψη και στατιστικά μοντέλα παλινδρόμησης καθώς και διαδικασίες ψηφιακής μοντελοποίησης. Στηρίζεται σε συσχετίσεις μεταξύ χωρικών και χρονικών δεδομένων, στοιχεία για την θνησιμότητα και τον άνθρωπο,

προσπαθώντας να καλύψει όλες τις πτυχές του πραγματικού κόσμου. Μοντέλα χωρικής διάχυσης (spatial diffusion models) αναλύουν και προβλέπουν την εξάπλωση ενός φαινομένου στο πέρας του χρόνου και του χώρου.

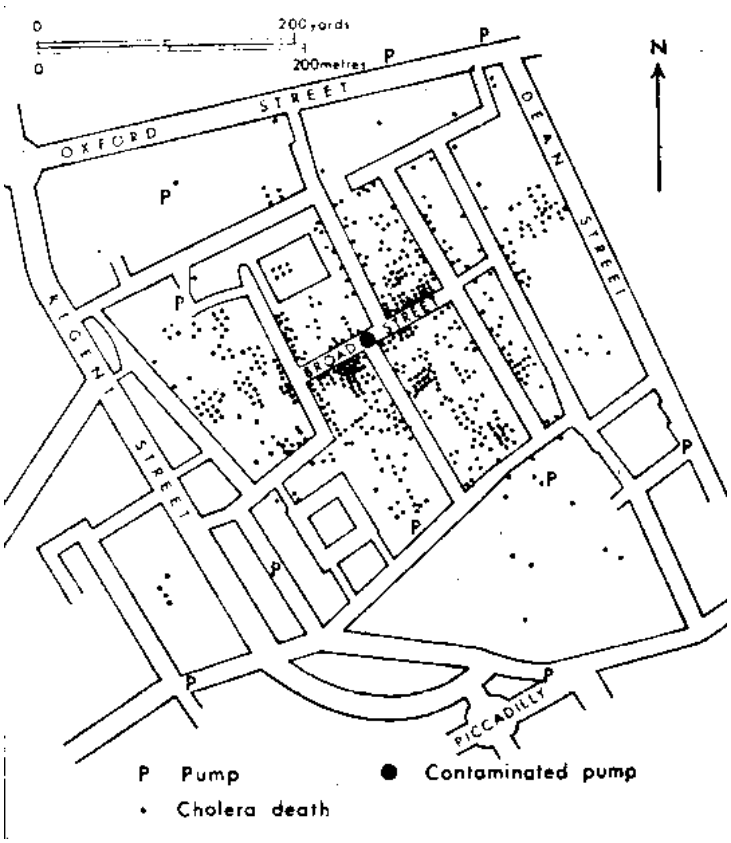
Συνυπολογίζοντας λοιπόν στα δεδομένα, τον χώρο και τον χρόνο και μαζί με τα κατάλληλα διαθέσιμα δημογραφικά στοιχεία (ΕΛ.ΣΤΑΤ., Eurostat, HMD, κλπ.), τα μοντέλα (προτεινόμενο μοντέλο BGGM, κεφάλαιο 3) μπορούν να αποτυπώσουν και να προβάλλουν στο μέλλον το πόσο και πώς θα κινηθεί το «μονοπάτι» της θνησιμότητας, χωρικά και χρονικά εξαρτώμενο από τις κατάλληλες παραμέτρους σε μια γεωγραφική περιοχή (Andreopoulos et al., 2017).

Συνοψίζοντας…

Στο παρόν κεφάλαιο μελετήθηκε το φαινόμενο της θνησιμότητας μέσα από μοντέλα και νόμους θνησιμότητας που διατυπώθηκαν στη διεθνή βιβλιογραφία. Αναλύθηκε η ιστορική εξέλιξη του φαινομένου από το παρελθόν έως σήμερα και παρουσιάστηκαν οι παρατηρήσεις τον ερευνητών διεθνώς. Το φαινόμενο της θνησιμότητας προσεγγίστηκε θεωρητικά και πρακτικά από νέα εργαλεία στατιστικής ανάλυσης και επεξεργασίας, όπως είναι το λογισμικό της *R* και συζητήθηκαν οι δυσκολίες, τα προβλήματα μοντελοποίησης και χαρτογράφησης της θνησιμότητας.

ΚΕΦ.3: Οι Πιθανοθεωρητικές κατανομές στα μοντέλα Θνησιμότητας

Τις τελευταίες δεκαετίες πολλά μοντέλα θνησιμότητας και επιβίωσης έχουν αναπτυχθεί και προταθεί για τη διερεύνηση της θνησιμότητας. Ερευνητικά αλλά και πρακτικά, έχουν καταφέρει να «εισχωρήσουν» σε ένα μεγάλο εύρος επιστημών όπως είναι η Γεωγραφία, η Στατιστική, οι Επιστήμες υγείας, η Ιστορία κ.α. Το ενδιαφέρον αυτό δεν επικεντρώνεται αποκλειστικά στο παρόν, αλλά και κατά τους προηγούμενους αιώνες είχαν πραγματοποιηθεί αρκετά ενδιαφέρουσες μελέτες.



Γράφημα 6. Μία μολυσμένη αντλία νερού στην Broad Street αποδείχτηκε η πηγή για την εξάπλωση της χολέρας (Σχεδιάστηκε από τον Dr John Snow περίπου το 1854, που παρουσιάζεται στο Stamp, L. D. 1964, A Geography of Life and Death.). Αυτή η αναδιατύπωση αφήνει μερικά ενδιαφέροντα κομμάτια αποδεικτικών στοιχείων που εμφανίστηκαν στον αρχικό χάρτη και στην έκδοση του Tufte. Για παράδειγμα, υπήρχε ένα κτίριο απέναντι από την αντλία που δεν είχε καθόλου θανάτους.

Ακόμη και πριν από το μεγάλο έργο του Gompertz, πολλοί επιστήμονες και φιλόσοφοι προσπαθούσαν να ερευνήσουν τη δυναμική της θνησιμότητας και την επίδρασή της στην εξέλιξη των πληθυσμών. Μεταξύ άλλων, ο John Graunt (1620-1674) ήταν ένας από τους πρώτους δημογράφους (Wynder, 1975) που το 1662, ανέλυσε τη θνησιμότητα του πληθυσμού του Λονδίνου. Επιπλέον, έργα των Antoine Deparcieux (1703-1768), του Daniel Bernoulli (1700-1782), του Thomas Robert Malthus (1766-1834) και του Pierre François Verhulst (1804-1849) ήταν σημαντικά για την εξέλιξη και ανάπτυξη των δημογραφικών μελετών και κατ΄επέκταση και της θνησιμότητας. Ωστόσο, μετά από τις εργασίες του Gompertz, άρχισε μια νέα εποχή στην ανάλυση και τη μοντελοποίηση της θνησιμότητας. Άρχισε σταδιακά η δημογραφία και η στατιστική να δίνουν μια νέα διάσταση στο χώρο με νέα και άκρως ενθαρρυντικά ευρήματα. Με πρωτοπόρο τον John Snow (1854) όπου με το έργο του, (γράφημα 6) γύρω από τη χαρτογράφηση σχετικά με το ξέσπασμα της χολέρας στο Λονδίνο συνέβαλε στην εξάπλωση της χωρικής στατιστικής στην καθημερινότητα. Αποτύπωσε στατιστικά τους θανάτους που έλαβαν χώρα στη γύρω περιοχή (χωρική ανάλυση) και τους έδωσε μια πρώτη μαθηματική μοντελοποίηση εκφράζοντας τον αριθμό τους ως ποσοστά (Ανδρεόπουλος, 2013).

Στην επιστήμη των πιθανοθεωρητικών κατανομών, είναι γνωστό πως κάθε τυχαία μεταβλητή μπορεί να έχει τη δική της κατανομή, σε πολλές όμως περιπτώσεις οι κατανομές αυτές παρουσιάζουν σημαντικές ιδιαιτερότητες αλλά και ομοιότητες μεταξύ τους. Δίνεται, λοιπόν, η δυνατότητα περιγραφής μεγάλου αριθμού τυχαίων πειραμάτων ή πραγματικών φαινομένων από βασικά μοντέλα πιθανοτήτων. Λόγω ακριβώς της μεγάλης τους χρησιμότητας, τα χαρακτηριστικά και οι ιδιότητες των πιθανοθεωρητικών αυτών μοντέλων έχουν μελετηθεί και συνεχίζουν να μελετώνται διεξοδικά και ορισμένα αποτελέσματα τους έχουν παρουσιαστεί στη διεθνή βιβλιογραφία (Zografos και Balakrishnan, 2009) σχετικά πρόσφατα.

3.1 Βήτα κατανομή (Beta distribution)

Η κατανομή Βήτα έχει χρησιμοποιηθεί ευρέως τα τελευταία χρόνια σε πολλά επιστημονικά πεδία (Gupta και Nadarajah, 2004) λόγω του ότι είναι σε θέση να περιγράψει ένα ευρύ φάσμα ποικίλων δεδομένων με οριοθετημένη υποστήριξη, θέτοντας δηλαδή τον κατάλληλο περιορισμό. Η επιλογή της κατάλληλης θεωρητικής κατανομής δίνει τη δυνατότητα να μελετηθεί με μεγαλύτερη ευκολία αλλά και ακρίβεια το «μαθηματικό μονοπάτι» που ακολουθούν τα διάφορα σετ δεδομένων (π.χ. ανθρώπινη θνησιμότητα) που εξετάζονται κάθε φορά (Andreopoulos et al., 2017).

Ειδικότερα, η κατανομή Βήτα με τις δύο παραμέτρους της, την παράμετρο α (shape) και η παράμετρο β (scale), χρησιμοποιείται για τη μοντελοποίηση δεδομένων που λαμβάνουν τιμές μέσα στο διάστημα (0,1). Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Βήτα ορίζεται ως εξής:

$$f(x;\alpha,\beta) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\, x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \qquad 0 < x < 1,\ \ \alpha,\beta > 0$$

όπου ο όρος $B(\alpha,\beta)$ δίνεται από το ολοκλήρωμα: $B(\alpha,\beta) = \int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}du = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$.

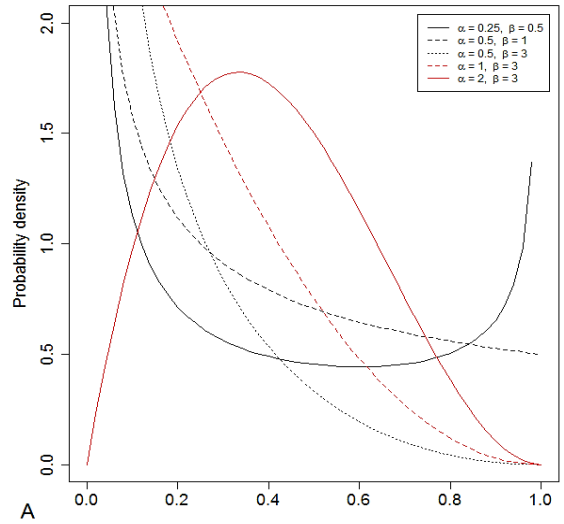
Θεώρημα 1

Έστω X η τυχαία μεταβλητή η οποία ακολουθεί την κατανομή Βήτα με παραμέτρους α και β. Τότε:

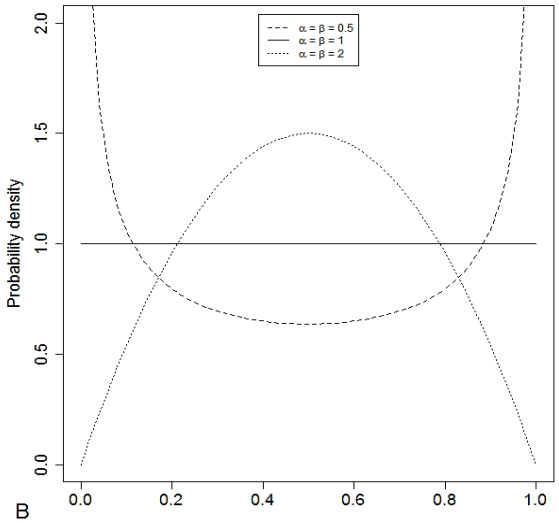
1. Η αναμενόμενη τιμή (μέση τιμή) της τυχαίας μεταβλητής X δίνεται από τη σχέση
$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$
2. Η διακύμανση της τυχαίας μεταβλητής X δίνεται από τη σχέση
$$V(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}.$$

■

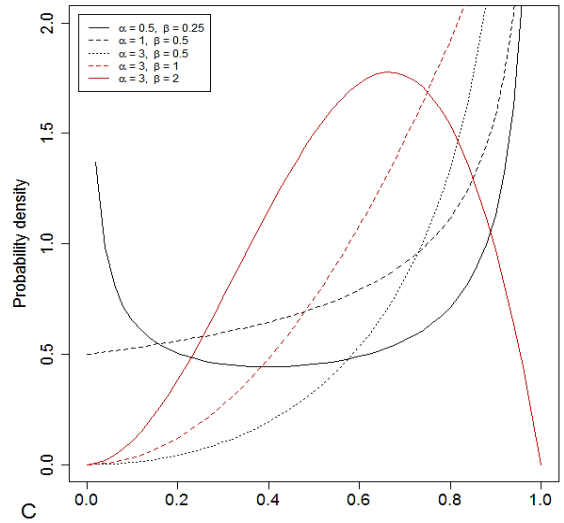
Γραφικά, η καμπύλη της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της Βήτα μπορεί να δώσει διαφορετικά σχήματα (Venter, 1983) ανάλογα με τις τιμές των παραμέτρων της (Γραφήματα 7, 8 και 9).



Γράφημα 7



Γράφημα 8



Γράφημα 9

Γραφήματα 7, 8 και 9. Αποτυπώνεται η δυναμική της πυκνότητας πιθανότητας της συνάρτησης Βήτα για τιμές $\alpha < \beta$ (7), για τιμές $\alpha = \beta$ (8) και για τιμές $\alpha > \beta$ (9). Γίνεται εμφανές και στα τρία γραφήματα το σχήμα που μπορεί να πάρει η Βήτα κατανομή στο διάστημα από 0 έως 1.

Ειδικότερα, αξιολογώντας τις διάφορες τιμές των παραμέτρων από στατιστικής πλευράς, λαμβάνονται τα εξής αποτελέσματα:

- Αν οι παράμετροι α και β είναι ίσες και μικρότερες από την μονάδα, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Βήτα είναι γνησίως κυρτή και συμμετρική (γράφημα 8). Αν $\alpha \neq \beta$, τότε το σχήμα της συνάρτησης Βήτα γίνεται μη συμμετρικό και κυρτό, παίρνοντας την ελάχιστη τιμή στο $x_0 = \frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-2}$, $\alpha + \beta \neq 2$ (γράφημα 9).
- Αν οι παράμετροι α και β είναι ίσες με την μονάδα (γράφημα 8), τότε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Βήτα είναι σταθερή και παίρνει το σχήμα της Ομοιόμορφης κατανομής. Αν $\alpha = 1$ και $\beta > 1$, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

της βήτα μειώνεται καθώς το x τείνει στο 1 (γράφημα 7) και αν $\alpha > 1$ και $\beta = 1$, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας β αυξάνεται καθώς το x τείνει στο 1 (γράφημα 9).

- Γενικεύοντας, αν οι παράμετροι είναι $\alpha < 1$ και $\beta \geq 1$, τότε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Βήτα μειώνεται καθώς το $x \to 1$.
- Αν οι παράμετροι είναι $\alpha \geq 1$ και $\beta < 1$, τότε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Βήτα αυξάνεται καθώς το $x \to 1$.
- Αν οι παράμετροι είναι $\alpha > 1$ και $\beta > 1$, τότε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Βήτα αυξάνεται στο διάστημα $(0, x_0)$ και μειώνεται στο διάστημα $(x_0, 1)$.
- Αν οι παράμετροι ορίζονται στο διάστημα $0 < \alpha < 1$ και $\beta > 1$ τότε η Βήτα κατανομή είναι αρνητική (γράφημα 7).
- Αν οι παράμετροι είναι $\alpha > 1$ και $0 < \beta < 1$ τότε η Βήτα κατανομή είναι θετική (γράφημα 9).

3.2 Γενικευμένη Βήτα κατανομή (Generalized Beta distribution)

Τις δύο τελευταίες δεκαετίες, έγιναν προσπάθειες για τον ορισμό νέων οικογενειών πιθανοθεωρητικών κατανομών που επεκτείνουν άλλες γνωστές οικογένειες κατανομών πιθανοτήτων και ταυτόχρονα παρέχουν μεγάλη ευελιξία στη μοντελοποίηση δεδομένων στην πράξη. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η Γενικευμένη οικογένεια Ομοιόμορφων κατανομών (Uniform distribution), η οποία έχει ως ειδική περίπτωση τη βήτα κατανομή (Beta distribution). Προτάθηκε από τον Jones το 2004, ο οποίος ουσιαστικά επέκτεινε την αρχική οικογένεια βήτα κατανομών με την ενσωμάτωση δύο πρόσθετων παραμέτρων.

Γίνεται αντιληπτό ότι στη Μαθηματική στατιστική, η μελέτη της κατανομής Βήτα είναι χρήσιμη με πολλούς τρόπους (τόσο στατιστικά με τις διάφορες τιμές των παραμέτρων της, όσο και γραφικά, όπως στα γραφήματα 7, 8 και 9): μπορεί κανείς να συσχετίσει τη Βήτα κατανομή και τις ιδιότητές της με άλλες γνωστές θεωρητικές κατανομές πιθανοτήτων όπως π.χ. με την ομοιόμορφη, την Γάμμα, την εκθετική, την κανονική κλπ.

Η κατανομή *Gompertz - Makeham,* όπως αναφέρεται σε προηγούμενη παράγραφο, ορίζει ότι το ποσοστό θνησιμότητας συναρτήσει της ηλικίας, λαμβάνει τον ρόλο της ανεξάρτητης συνιστώσας ο νόμος *Makeham* και μιας συνιστώσας που εξαρτάται από την ηλικία (νόμος *Gompertz*) η οποία αυξάνεται εκθετικά με τον χρόνο. Ο νόμος *Gompertz - Makeham* περιγράφει

ικανοποιητικά την δυναμική ανθρώπινη ηλικία, αλλά χάνει σε ακρίβεια στις νεαρές (πριν τα 30) και στις υψηλές (μετά τα 75) ηλικίες.

Για τον συνδυασμό της **Βήτα κατανομής** με τα προαναφερθέντα μοντέλα θνησιμότητας των *Gompertz - Makeham*, γίνεται χρήσης της ***Generated Beta distribution*** (Zografos & Balakrishnan, 2009). Με την αντίστοιχη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας να δίνεται ως ακολούθως:

$$g_1(x) = \frac{f(x)}{B(\alpha,\beta)}[F(x)]^{\alpha-1}[1-F(x)]^{\beta-1}, \qquad \alpha,\beta > 0, x \geq 0$$

όπου $F(x) = 1 - S(x) \rightarrow S(x) = 1 - F(x)$ και $h(x) = \frac{f(x)}{S(x)}$.

Η Γενικευμένη Βήτα κατανομή (Generated Beta distribution), με τις αντίστοιχες οικογένειες γενικευμένων κατανομών έχουν μελετηθεί στη βιβλιογραφία όμως κυρίως σε θεωρητικό επίπεδο. Παραδείγματα τέτοιων ενδεικτικών ερευνών είναι η Beta-Gumbel distribution (Nadarajah et al., 2004 & 2006), η Beta-Pareto distribution (Akinsete et al., 2008), η Generalized Beta distribution (Zografos et al., 2009) και η Beta-Generalized Exponential distribution (Barreto-Souza et al., 2011).

3.3 Μίξεις Βήτα κατανομής με μοντέλα Θνησιμότητας

Η έρευνα της μίξης κατανομών αποτελεί ένα σημαντικό εργαλείο για την περιγραφή της κατανομής του χρόνου ζωής των ανθρώπων, των οργανισμών ή συσκευών αν μιλάμε για μηχανήματα. Ιστορικό παράδειγμα μίξης κατανομών αποτέλεσε του Proschan (1963), ο οποίος χρησιμοποιώντας τη μίξη εκθετικών κατανομών, θέλησε να εξηγήσει το χρόνο μεταξύ διαδοχικών αποτυχιών του συστήματος κλιματισμού σε αεροπλάνα τύπου Boeing 720. Επίσης, απέδειξε ότι οι ιδιότητες της συνάρτησης κινδύνου διατηρούνται και στις μίξεις κατανομών με σταθερές συναρτήσεις κινδύνου.

Ο Α’ και κυρίως ο Β’ Παγκόσμιος πόλεμος (1939-45), έδωσαν το κίνητρο για ανάπτυξη της έρευνας στον τομέα της αξιοπιστίας και στην μελέτη της διάρκειας ζωής των στρατευμάτων (προσπάθεια μείωσης της θνησιμότητας), αλλά και αργότερα η έρευνα επικεντρώθηκε στην μελέτη κάποιων ιδιαίτερων πιθανοθεωρητικών προβλημάτων σχετιζόμενων με την παύση λειτουργίας και την αντικατάσταση μηχανικών εξαρτημάτων ή ηλεκτρικών κυκλωμάτων, όπως κάποιας βαλβίδας ή ενός θερμοστάτη σε ένα μηχανικό κύκλωμα, μιας λυχνίας.

Η παρούσα διατριβή, εκτός από τη μελέτη του φαινομένου της θνησιμότητας, εστιάζει και στη μελέτη των κατανομών που προκύπτουν από τη μίξη Εκθετικών κατανομών (Νόμοι Θνησιμότητας) με συνεχείς κατανομές (Βήτα) σε μοντέλα επιβίωσης. Γίνεται προσπάθεια αποτύπωσης των αποτελεσμάτων στο χώρο (γεωγραφικοί χάρτες) και πιθανών προβλέψεων της πορείας που θα ακολουθήσει η ανθρώπινη θνησιμότητα (προβολές πληθυσμού) σε εύλογο χρονικό διάστημα ακολουθώντας το «μαθηματικό πρότυπο» που προτείνεται.

Τα μαθηματικά μοντέλα που εκφράζουν τη θνησιμότητα ως συνάρτηση της ηλικίας ή εκείνα που λαμβάνουν υπόψη όχι μόνο την ηλικία αλλά και άλλες παραμέτρους / παράγοντες που επηρεάζουν την πιθανότητα, είναι σε θέση να χρησιμοποιήσουν διάφορες παραδοχές (αύξουσα, φθίνουσα πορεία, καμπύλη, εξομάλυνση) για να προσαρμοστούν σε όλα τα πιθανά παρατηρούμενα χαρακτηριστικά των μοτίβων θνησιμότητας. Χαρακτηριστικότερη ιδιότητα αυτής της προσέγγισης είναι ότι ο πληθυσμός είναι ετερογενής και αποτελείται από αρκετούς υποπληθυσμούς με διαφορετική δυναμική θνησιμότητας (Vaupel, 2010).

Η έρευνα επικεντρώνεται στη μαθηματική μοντελοποίηση της δυναμικής θνησιμότητας στους ανθρώπινους πληθυσμούς. Το προτεινόμενο μοντέλο βασίζεται στην κύρια βασική παραδοχή του ομογενούς πληθυσμού. Δεν λαμβάνεται υπόψη αν το ανθρώπινο σύνολο που εξετάζεται αποτελείται από διάφορους υποπληθυσμούς, αλλά γίνεται προσπάθεια να δοθεί η κατάλληλη δημογραφική τάση / ερμηνεία στην εξαγωγή των αποτελεσμάτων. Ο παράγοντας που διαφοροποιεί το μοντέλο (προτεινόμενο) από άλλα υπάρχοντα μοντέλα πληθυσμών είναι η δυνατότητα που δίνεται στον κάθε ερευνητή / μελετητή να αξιοποιήσει κατάλληλα την κάθε παράμετρο του νέου μοντέλου θνησιμότητας ώστε να μπορέσει να δώσει μια διαφορετική ερμηνεία στα αποτελέσματα του, χωρίς να χάσει χρήσιμες στατιστικές ή χωρικές πληροφορίες. Η κύρια υπόθεση των ιστορικών μοντέλων θνησιμότητας, η οποία δηλώνουν ότι η δυναμική θνησιμότητας αυξάνεται εκθετικά με την ηλικία με τρόπο παρόμοιο με αυτόν που περιγράφεται από το νόμο Gompertz, διατηρείται και στο προτεινόμενο.

Πριν την παρουσίαση της νέας κατανομής, αξίζει να αναφερθεί η πορεία που έχει ακολουθήσει η επιστημονική κοινότητα στη μίξη κατανομών με νόμους θνησιμότητας. Αρχικά, η κατανομή **Gompertz** είναι μια ευέλικτη κατανομή που είναι ασύμμετρη δεξιά ή αριστερά. Αυτή η κατανομή είναι μια γενίκευση της Εκθετικής (**Exponential**) και χρησιμοποιείται ευρέως σε πολλές εφαρμογές προβλημάτων, ιδιαίτερα στην ανάλυση των δεδομένων ζωής (Johnson et al., 1995).

Ο συνδυασμός/μίξη της **(Generated) Beta distribution** με την **Gompertz distribution** οδηγεί στην **Beta-Gompertz distribution** (Jafari et al., 2014) με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{BG}(x) = \frac{\alpha e^{bx} e^{-\frac{\alpha}{b}(e^{bx}-1)}}{B(\alpha,b)} [\,(1-e^{-\frac{\alpha}{b}(e^{bx}-1)})]^{\alpha-1} \cdot \left[1-\left(1-e^{-\frac{\alpha}{b}(e^{bx}-1)}\right)\right]^{b-1},$$

$$a,b>0, x\geq 0$$

Ένα χρόνο αργότερα, η επέκταση της παραπάνω κατανομής παρουσιάστηκε από τους Chukwu et al., το 2015. Ο συνδυασμός της **(Generated) Beta distribution** με την **GompertzMakeham distribution** οδηγεί στην **Beta-GompertzMakeham distribution** με την αντίστοιχη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και τις 5 παραμέτρους της να δίνεται ως ακολούθως

$$f_{BGM}(x) = \frac{(\alpha e^{bx}+\lambda) e^{-\lambda x-\frac{\alpha}{b}(e^{bx}-1)}}{B(\alpha,\beta)} [\,(1-e^{-\lambda x-\frac{\alpha}{b}(e^{bx}-1)})]^{\alpha-1} \cdot [1-(1-e^{-\lambda x-\frac{\alpha}{b}(e^{bx}-1)})]^{\beta-1}$$

$$a,b,\lambda,\alpha,\beta>0, x\geq 0$$

3.4 Beta Gompertz Generalized Makeham κατανομή

Αξιοποιώντας τις προηγούμενες πληροφορίες, επιχειρείται μια επέκταση των δύο προηγούμενων κατανομών (BG distribution, 2014 και BGM distribution, 2015). Για τον συνδυασμό της **Βήτα** κατανομής με την **Generalized Gompertz Makeham** ως μοντέλο θνησιμότητας, γίνεται χρήσης της *Generated Beta distribution.* Το νέο μοντέλο θνησιμότητας (γράφημα 10) που προτείνεται στην παρούσα διατριβή προκύπτει από τη μίξη της **Beta distribution** με τη **Generalized Gompertz Makeham distribution.**

Το όνομα αυτής είναι **Beta Gompertz Generalized Makeham distribution** (**BGGM**) και η αντίστοιχη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας με τις 6 παραμέτρους είναι η εξής

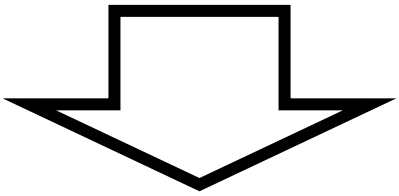
$$f_{BGGM}(x) = \frac{(\theta e^{\xi x}+\lambda+\kappa x) e^{-\lambda x-\frac{\theta}{\xi}(e^{\xi x}-1)}}{B(\alpha,\beta)} \cdot \left[(1-e^{-\frac{\kappa}{2}x^2-\lambda x-\frac{\theta}{\xi}(e^{\xi x}-1)})\right]^{\alpha-1} \cdot \left[\left(e^{-\frac{\kappa}{2}x^2-\lambda x-\frac{\theta}{\xi}(e^{\xi x}-1)}\right)\right]^{\beta-1}$$

$$\theta,\xi,\lambda,\kappa,\alpha,\beta>0, x\geq 0$$

Η προσαρμογή τη BGGM κατανομής στα δεδομένα θνησιμότητας παρουσιάζει μια σημαντική ομοιογένεια όπως θα παρουσιαστεί και στις αντίστοιχες εφαρμογές τόσο για τα Ελληνικά δεδομένα, όσο και για τα Ευρωπαϊκά δεδομένα (άνδρες και γυναίκες) ακόμα και σε μεγάλο εύρος ηλικιών (άνω των 80 ετών). Η κάθε παράμετρος μπορεί να διευκολύνει ή να

προσεγγίσει περισσότερο την «ανάγνωση» και την αντιμετώπιση των καθημερινών δημογραφικών προβλημάτων, εξετάζοντας διαφορετικές πτυχές της θνησιμότητας. Η κατανομή BGGM με τις 6 διαφορετικές παραμέτρους $(\theta, \xi, \kappa, \lambda, \alpha, \beta)$ παρέχει μεγαλύτερη ευελιξία και κάνει πιο ξεκάθαρες τις διαφοροποιήσεις (Andreopoulos et al., 2015) που σχετίζονται με τα ποσοστά θνησιμότητας, σε σχέση με τις μέχρι τώρα παρόμοιες κατανομές θνησιμότητας.

Beta distribution — ***Gompertz distribution*** — ***Generalized Makeham distribution***



Beta Gompertz Generalized Makeham distribution (BGGM)

$$f_{BGGM}(x) = \frac{(\theta e^{\xi x} + \lambda + \kappa x) e^{-\lambda x - \frac{\theta}{\xi}(e^{\xi x} - 1)}}{B(\alpha, \beta)} \cdot \left[(1 - e^{-\frac{\kappa}{2}x^2 - \lambda x - \frac{\theta}{\xi}(e^{\xi x} - 1)}) \right]^{\alpha - 1} \cdot \left[\left(e^{-\frac{\kappa}{2}x^2 - \lambda x - \frac{\theta}{\xi}(e^{\xi x} - 1)} \right) \right]^{\beta - 1}$$

$$\theta, \xi, \lambda, \kappa, \alpha, \beta > 0, x \geq 0$$

Γράφημα 10. Ο συνδυασμός της γενικευμένης Βήτα κατανομής με το γενικευμένο νόμο θνησιμότητας Gompertz - Makeham έχει ως παράγωγο την BGGM κατανομή (ή Beta Gompertz Generalized Makeham), με την αντίστοιχη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

Η μαθηματική μοντελοποίηση (Team, 2013) των παραπάνω συναρτήσεων κατανομών, έγινε με χρήση του ανοιχτού κώδικα R (www.r-project.org) και τα πακέτα των αλγορίθμων σε επίπεδο βασικών κατανομών χρησιμοποιήθηκαν από την ψηφιακή βιβλιοθήκη του CRAN (Comprehensive R Archive) http://cran.r-project.org το οποίο είναι ένα δίκτυο διανομής του R σε πολλά μέρη του κόσμου μέσω διαδικτύου.

3.4.1 Στατιστική προσέγγιση των παραμέτρων της BGGM κατανομής

Σε κάθε στατιστικό πρόβλημα που εμπλέκεται η δειγματοληψία, ο ερευνητής αναζητά την κατάλληλη ποσότητα πληροφορίας που του δίνουν τα δεδομένα για την κάθε παράμετρο του πληθυσμού (Kullback, 1959). Στη στατιστική (Papaioannou, 1985), πληροφορία σημαίνει το ποσό της αβεβαιότητας για μια άγνωστη ποσότητα, το οποίο μειώνεται από το αποτέλεσμα ενός πειράματος. Ο όρος αβεβαιότητα δε σχετίζεται μόνο με την άγνωστη πυκνότητα της f_{BGGM} ή των παραμέτρων $\theta, \xi, \kappa, \lambda, \alpha, \beta$ αλλά και με το αποτέλεσμα ενός πειράματος τύχης. Η Θνησιμότητα εξετάζεται στη στατιστική δημογραφία ως ένα πείραμα τύχης με αυστηρά δύο δυνατά αποτελέσματα (επιβίωση ή θάνατος).

Ως *πείραμα* θεωρείται η πορεία ζωής του ανθρώπου στο χώρο και στο χρόνο, αφού δεν είναι γνωστή η εκ των προτέρων έκβαση του αποτελέσματος – επιβίωση/θάνατος. Πριν την εκτέλεση του «πειράματος» υπάρχει μηδενική πληροφορία για την πορεία της κατανομής f_{BGGM} ή των παραμέτρων της $\theta, \xi, \kappa, \lambda, \alpha, \beta$ ενώ συλλέγοντας παρατηρήσεις από μία τυχαία μεταβλητή x (χρόνος ζωής σε έτη, του πληθυσμού) η οποία ακολουθεί την κατανομή f_{BGGM} ή $f_{BGGM}(x; \theta, \xi, \kappa, \lambda, \alpha, \beta)$ μειώνεται η αβεβαιότητα. Άμεσα λοιπόν, γίνεται αντιληπτή η μεγάλη στατιστική και δημογραφική σημασία των παραμέτρων της νέας κατανομής.

Η Θνησιμότητα καθορίζει πολλά παρατηρούμενα και μη παρατηρούμενα χαρακτηριστικά. Τα παρατηρούμενα χαρακτηριστικά (τα οποία και εξετάζονται στην παρούσα διατριβή) περιλαμβάνουν στο βαθμό που είναι δυνατόν τις συνθήκες ζωής και περιβάλλοντος, το φύλο και την ηλικία, ενώ τα μη παρατηρούμενα χαρακτηριστικά αφορούν κυρίως τις γενετικές διαφορές.

Πριν παρουσιαστούν οι επιδράσεις της παραλλαγής των παραμέτρων στην παραπάνω συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{BGGM}(x; \theta, \xi, \kappa, \lambda, \alpha, \beta)$, δίνεται η στατιστική ερμηνεία των 6 παραμέτρων του νέου μοντέλου.

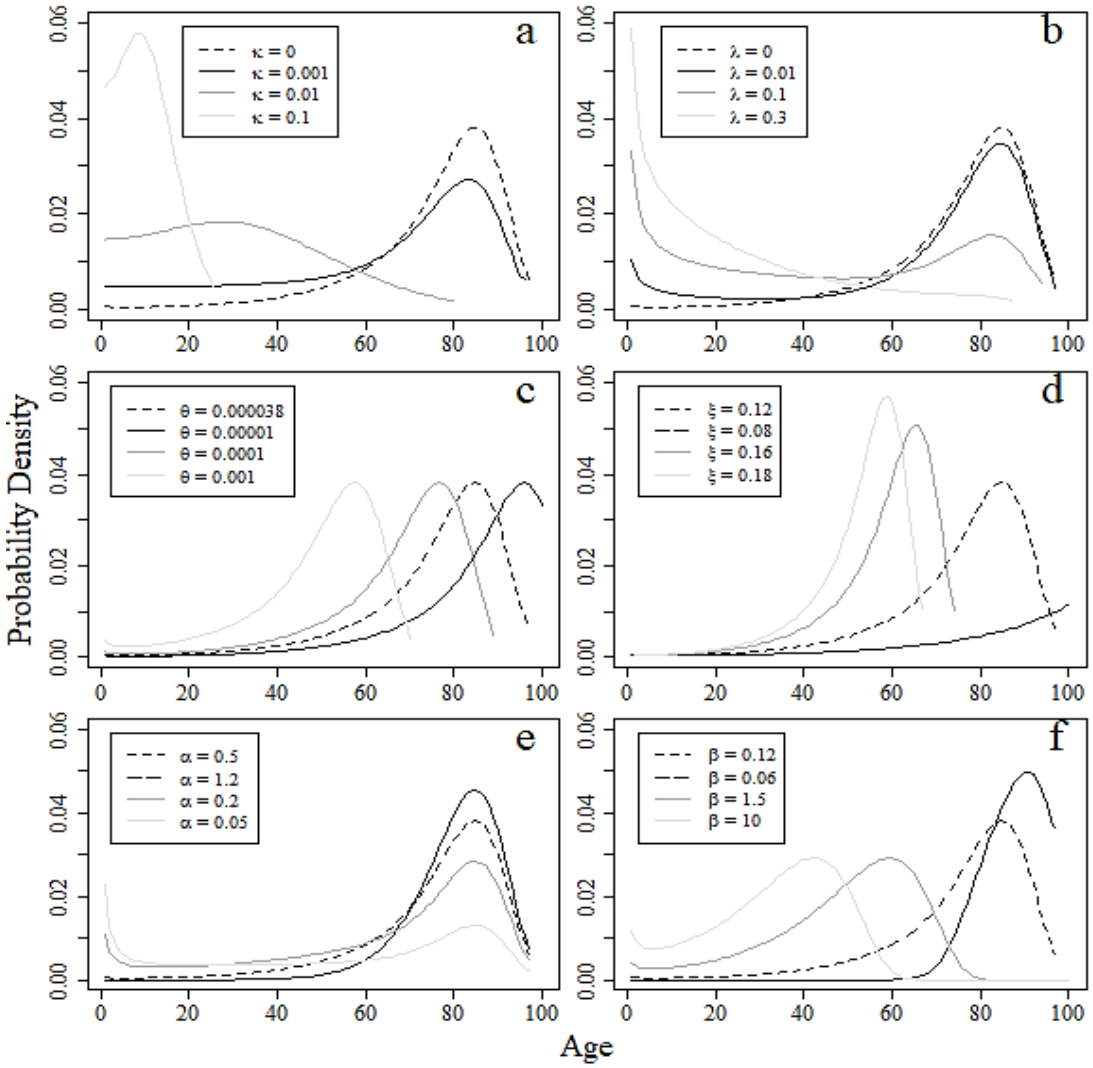
Τα χαρακτηριστικά και η ερμηνεία των παραμέτρων του νόμου του Gompertz διατηρούνται, όπως αναφέρθηκε στην παράγραφο 3.3, συνεπώς η παράμετρος $\boldsymbol{\theta}$ εκφράζει μια ενιαία τιμή με ποσοστά θνησιμότητας για την ηλικία κατά το έτος αναφοράς που εξετάζεται ή θεωρείται και ως η **αρχική θνησιμότητα**. Αποτυπώνεται δηλαδή σύμφωνα με τον Gompertz, ως η εκ των προτέρων πληροφορία για τον πληθυσμό που μελετάται. Στην πορεία αυτή η θεώρηση

άλλαξε και πλέον η παράμετρος $\boldsymbol{\theta}$ διαδραματίζει τον ρόλο της **βρεφικής θνησιμότητας** - [0,1) έτη - του πληθυσμού που εξετάζεται. Η παράμετρος $\boldsymbol{\xi}$ ορίζει το ποσοστό των ατόμων άνω των 70 ετών προς το σύνολο του πληθυσμού (και συνήθως ονομάζεται ποσοστό γήρανσης, συντελεστής θνησιμότητας ή κλίση Gompertz).

Η παράμετρος $\boldsymbol{\lambda}$, που εισήχθηκε από τον Makeham, εκφράζει την τυχαιότητα στο σύνολο ενός πληθυσμού ανεξαρτήτως της ηλικίας. Αποτυπώνει δηλαδή τον τυχαίο παράγοντα κινδύνου ο οποίος μπορεί να προκαλέσει τον θάνατο (π.χ. σεισμός, πλημμύρα, πόλεμος, πείνα κ.α.). Η παράμετρος $\boldsymbol{\kappa}$ είναι σε θέση να εξηγήσει τυχαία γεγονότα συγκεκριμένου ερευνητικού ενδιαφέροντος και επηρεάζεται από την ηλικία του ατόμου (π.χ. αυτοκινητιστικό ατύχημα, ασθένεια, αυτοκτονία κ.α.).

Αντίστοιχα οι επόμενες δύο παράμετροι $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$ αφορούν, όπως αναφέρθηκε στην παράγραφο 3.1, στην Βήτα κατανομή. Η παράμετρος α (shape - σχήμα) και η παράμετρος β (scale – κλίμακα ύψους), χρησιμοποιείται για τη μοντελοποίηση δεδομένων που λαμβάνουν τιμές μέσα στο διάστημα (0,1).

Οι επιδράσεις της παραλλαγής των παραπάνω παραμέτρων στην νέα συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (BGGM) είναι εμφανείς (γράφημα 11). Στις 6 απεικονίσεις παρουσιάζεται η ευελιξία της BGGM κατανομής όταν παραμένουν σταθερές οι πέντε από τις έξι παραμέτρους του μοντέλου κάθε φορά και «κινείται» η έκτη παράμετρος. Για την παρουσίαση των γραφημάτων τα αποτελέσματα βασίζονται σε αληθινά δεδομένα θνησιμότητας (πηγή: ΕΛ.ΣΤΑΤ., 2018) και αφορούν τον Ελλαδικό χώρο το έτος απογραφής (2011) στο σύνολο του πληθυσμού. Εδώ η παράμετρος $\boldsymbol{\theta}$ εκφράζει την παιδική θνησιμότητα κατά το έτος αναφοράς (2011 για την παιδική θνησιμότητα του πληθυσμού). Η εκτίμηση των παραμέτρων για το έτος αναφοράς (2011), έγινε με τη μέθοδο Ελαχίστων τετραγώνων, μέθοδος η οποία παρουσιάζεται στην παράγραφο 4.3 της διατριβής.



Γράφημα 11. Οι διαφορετικές επιδράσεις των παραμέτρων στην νέα συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (BGGM). Η μαύρη διακεκομμένη γραμμή σε κάθε πίνακα a, b, c, d χρησιμοποιείται ως καμπύλη αναφοράς θνησιμότητας (έτος 2011, Ελλάδα) με τις αντίστοιχες εκτιμήσεις των παραμέτρων: $\kappa = 0.0001, \lambda = 0.0005, \theta = 0.000038, \xi = 0.12, a = 0.5, \beta = 0.12$. Σε κάθε πίνακα πέντε από τις έξι παραμέτρους της καμπύλης αναφοράς παραμένουν σταθερές και αλλάζει η έκτη παράμετρος.

Κλείνοντας με τη στατιστική ερμηνεία των παραμέτρων, ο εκθετικός όρος $\boldsymbol{\theta e^{\xi x}}$ διατηρεί την ιδιότητα του να αυξάνεται με γεωμετρική πρόοδο σε συνάρτηση με την πάροδο του χρόνου. Στην ιδιότητα αυτή βασίστηκε ολόκληρη η θεωρία του *Gompertz*. Η εκθετική παράμετρος $\boldsymbol{e^{\xi}}$ περιγράφει την φυσιολογική φθορά της ανθρώπινης ζωής ή το ποσοστό γήρανσης του πληθυσμού και είναι άμεσα εξαρτώμενη από την ηλικία, ενώ η παράμετρος $\boldsymbol{x}$ περιγράφει τον χρόνο ζωής (σε έτη).

3.4.2 Δημογραφική ερμηνεία των παραμέτρων της BGGM κατανομής

Η ταχεία ανάπτυξη του παγκόσμιου πληθυσμού τα τελευταία 100 χρόνια δεν οφείλεται σε αύξηση του ποσοστού γεννητικότητας. Αντιθέτως, οφείλεται στη μείωση των ποσοστών θνησιμότητας, ιδιαίτερα στις αναπτυσσόμενες χώρες (Van de Kaa, 1987). Οι άνθρωποι έχουν επιτύχει μεγαλύτερη διάρκεια ζωής καθώς λιγότερα βρέφη πεθαίνουν και περισσότερα άτομα επιβιώνουν σε υψηλότερες ηλικιακές ομάδες χάρη στην καλύτερη διατροφή, τις καλύτερες συνθήκες διαβίωσης καθώς και στη σημαντική πρόοδο της ιατρικής, της δημόσιας υγείας και της τεχνολογίας.

Σε όλη την ανθρώπινη ιστορία, η μείωση των ποσοστών θνησιμότητας συνδέεται με την οικονομική ανάπτυξη και την κοινωνικοοικονομική ευημερία. Η βρεφική θνησιμότητα και το προσδόκιμο ζωής είναι τα κύρια συστατικά σύνθετων δεικτών (όπως ο δείκτης ανθρώπινης ανάπτυξης – Human Development Index) που μετρούν τους δείκτες συνθηκών διαβίωσης και χρησιμοποιούνται ευρέως σε συγκρίσεις χωρών ή/και ηπείρων. Σε παγκόσμιο επίπεδο, το προσδόκιμο ζωής κατά τη γέννηση αυξήθηκε από τα 48 χρόνια στα 70 χρόνια από το 1955 (ΟΗΕ, 2017). Η αύξηση της μακροζωίας είναι, πέρα από κάθε αμφιβολία, ένα από τα μεγαλύτερα επιτεύγματα της ανθρωπότητας. Ωστόσο, παρά τη γενική θεαματική βελτίωση, αξίζει να μελετηθούν οι διαφοροποιήσεις που υπάρχουν μεταξύ των φύλων, των περιφερειών καθώς και των αιτιών θανάτου. Παρά τη γενικευμένη πρόοδο, το χάσμα μεταξύ ανδρών και γυναικών παραμένει, όπως και αυτό μεταξύ λιγότερο και περισσότερο ανεπτυγμένων χωρών. Το προσδόκιμο ζωής κατά τη γέννηση στη χώρα με τις καλύτερες επιδόσεις στην Ιαπωνία είναι τα 85 έτη, τουλάχιστον 35 χρόνια υψηλότερο από εκείνο που παρατηρήθηκε στο Τσαντ, τη χώρα με τη χειρότερη απόδοση σύμφωνα με τον ΟΗΕ/WHO (2017). Επιπλέον, καθώς οι μεταβολές της ηλικιακής κατανομής του πληθυσμού συμβαίνουν και με τη σχετική επικράτηση των ασθενειών που σχετίζονται με την ηλικία, λόγω της γήρανσης του πληθυσμού, οι παλαιότερες ασυνήθεις καταστάσεις είναι συχνές αιτίες νοσηρότητας ή θνησιμότητας (Tragaki and Panagiotakos, 2018). Η προτεινόμενη BGGM κατανομή με τις διαφορετικές παραμέτρους $(\theta, \xi, \kappa, \lambda, \alpha, \beta)$ είναι σε θέση να παρέχει μεγαλύτερη ευελιξία και να καταγράφει καλύτερα αυτές τις διαφοροποιήσεις (Andreopoulos et al., 2015).

Συγκεκριμένα, ο Brown (1997) επιβεβαιώνει ότι το ποσοστό θνησιμότητας αυξάνεται σχεδόν εκθετικά με την ηλικία, κάτι που από το 1825 είχε επισημάνει ο Gompertz. Αυτό

αντικατοπτρίζεται στο «πρότυπο» της θνησιμότητας ως μείωση της κανονικής λειτουργικής ικανότητας μετά την ηλικία των 30 ετών. Ωστόσο, το πρότυπο της θνησιμότητας αλλάζει σε πολύ μεγάλες ηλικίες από διάφορους παράγοντες, αλλά κυρίως από την ετερογένεια που παρουσιάζει ο κάθε πληθυσμός (Avraam et al., 2013), όπως και εξαιτίας του στοχαστικού θορύβου που εμφανίζουν τα δεδομένα σε αυτές τις ηλικίες (άνω των 80 ετών). Ο Brown (1997) σχολιάζει ότι η εκθετική μορφή ισχύει μόνο μεταξύ των ηλικιών 30 και 85. Πέρα από αυτό το όριο, η ισχύς της θνησιμότητας γίνεται σχεδόν σταθερή. Οι Horiuchi και Wilmoth (1998) επισημαίνουν επίσης την επιβράδυνση των ποσοστών θνησιμότητας στις πολύ μεγάλες ηλικίες. Υποδεικνύουν ότι αυτό οφείλεται στην «υπόθεση της ετερογένειας», δηλαδή στην επιλεκτική επιβίωση υγιέστερων ατόμων σε μεγαλύτερες ηλικίες, στην ύπαρξη δηλαδή υποπληθυσμών μέσα σε πληθυσμούς μελέτης. Τα αποτελέσματά τους υποστηρίζουν αυτή την υπόθεση, αλλά επίσης προτείνουν πως και άλλοι παράγοντες που πρέπει να διερευνηθούν θα μπορούσαν επίσης να διαδραματίσουν κάποιο ρόλο. Η είσοδος λοιπόν νέων/περισσότερων παραμέτρων στα μοντέλα θνησιμότητας κρίνεται απαραίτητη. Γίνεται άμεσα αντιληπτό, ότι οι παραπάνω απόψεις, επιβεβαιώνουν την ανάγκη συνέχισης της σχετικής έρευνας. Η BGGM κατανομή με την μορφή της καταφέρνει να ερμηνεύσει πιο σωστά την πορεία της θνησιμότητας και τα γεγονότα που την επηρεάζουν.

Στο παρόν κεφάλαιο, για να δοθεί μια καλύτερη δημογραφική ερμηνεία των 6 παραμέτρων $(\theta, \xi, \kappa, \lambda, , \alpha, \beta)$ της προτεινόμενης κατανομής (BGGM), χρησιμοποιούνται δεδομένα θνησιμότητας από την Ελλάδα (*πηγή:* Human Mortality Database), χωριστά για άνδρες και γυναίκες σε τρία διαφορετικά έτη 2001, 2011 και 2012. Επιλέχθηκε, όπως και στην παράγραφο 3.4.1, το έτος 2011 ως έτος αναφοράς (2011 είναι το έτος απογραφής). Οι τιμές των εκτιμώμενων παραμέτρων, προσαρμοσμένες σε σχέση με το εξεταζόμενο έτος, παρουσιάζονται στους πίνακες 2 και 3.

Αναλύοντας τα αποτελέσματα, μετά από μια μείωση που παρατηρήθηκε μεταξύ του 2001 και του 2011, η τιμή της παραμέτρου $\boldsymbol{\kappa}$ αυξάνεται και πάλι το 2012, δηλώνοντας πιθανή αύξηση της πιθανότητας αιφνίδιου θανάτου σε ατομικό επίπεδο. Οι διακυμάνσεις στην τιμή της παραμέτρου είναι μικρότερες για τις γυναίκες. Η μείωση της τιμής $\boldsymbol{\kappa}$ μετατοπίζει την καμπύλη της BGGM στα δεξιά στις ηλικίες 30-40. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο η καμπύλη της συνάρτησης θνησιμότητας στις γυναίκες είναι ομαλότερη χωρίς το μικρό «άλμα» (hump) που παρατηρείται στην πιθανότητα θανάτου των ανδρών (γράφημα 12). Η επίδραση του τυχαίου

κινδύνου στη θνησιμότητα αυξάνεται στους νεαρούς ενήλικες καθώς και στις ηλικίες μεταξύ 50 και 75 ετών, λόγω τρόπου ζωής ή ξαφνικών γεγονότων υγείας.

Mortality – Males – Greece			
BGGM	**2001**	**2011**	**2012**
$\boldsymbol{\theta}$	0.0211820	0.0224385	0.0228621
$\boldsymbol{\xi}$	0.0000397	0.0000341	0.0000342
$\boldsymbol{\kappa}$	0.0000339	0.0000284	0.0000305
$\boldsymbol{\lambda}$	0.0923643	0.1008973	0.1002122
$\boldsymbol{a}$	1.9340188	6.4159469	6.6423187
$\boldsymbol{\beta}$	1.5580919	0.6932102	0.6931936
AIC	*1080.155*	*1107.002*	*1088.605*
BIC	*1095.22*	*1122.067*	*1103.67*
logLik	*-534.077*	*-547.5011*	*-538.3025*

Πίνακας 2. Οι εκτιμήσεις των τιμών των παραμέτρων για τα έτη 2001, 2011 και 2012 αντίστοιχα. Το 2011 είναι έτος αναφοράς (έτος απογραφής πληθυσμού). Οι εκτιμήσεις αφορούν τον ανδρικό πληθυσμό της Ελλάδας. Ενώ τα *AIC, BIC* και *logLik* είναι τα αντίστοιχα στατιστικά κριτήρια της BGGM κατανομής.

Η παράμετρος $\boldsymbol{\lambda}$ εξετάζει την τυχαιότητα του θανάτου στο σύνολο του πληθυσμού, λόγω είτε της απότομης επιδείνωσης της δημόσιας υγείας ή των συνθηκών διαβίωσης (π.χ. οικονομική κρίση, φυσικές καταστροφές, πανδημίες). Μια τιμή του $\boldsymbol{\lambda}$ κοντά στο μηδέν, υποδηλώνει ότι η πιθανότητα ξαφνικού θανάτου είναι χαμηλή. Όταν η τυχαιότητα αυξάνεται (η παράμετρος $\boldsymbol{\lambda}$ απομακρύνεται από το 0), η καταλληλότητα της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας βελτιώνεται για την ηλικία από 50 έως 75 ετών, αλλά επιδεινώνεται στα παιδικά χρόνια. Στις χώρες με «χαμηλή θνησιμότητα», ο κίνδυνος θανάτου νηπίων ή παιδιών είναι πολύ χαμηλός.

Κάνοντας χρήση των Ελληνικών ποσοστών θνησιμότητας ως προς το φύλο και την ηλικία, παρατηρείται ότι η παράμετρος $\boldsymbol{\lambda}$ παρέχει ικανοποιητική προσαρμογή αν η τιμή της κυμαίνεται από 0.09 έως 0.10 για τους άνδρες (Πίνακας 2) και 0.10 ως 011 για τις γυναίκες (Πίνακας 3).

Mortality – Females – Greece			
BGGM	**2001**	**2011**	**2012**
$\boldsymbol{\theta}$	0.0124271	0.0132440	0.0131162
$\boldsymbol{\xi}$	0.0000401	0.0000409	0.0000436
$\boldsymbol{\kappa}$	0.0000353	0.0000168	0.0000141
$\boldsymbol{\lambda}$	0.1038055	0.1101087	0.1116875
$\boldsymbol{\alpha}$	3.9152653	4.3654589	4.4774675
$\boldsymbol{\beta}$	0.4446323	0.4896606	0.5371169
AIC	*1094.691*	*1100.993*	*1080.155*
BIC	*1109.757*	*1116.058*	*1095.22*
logLik	*-541.345*	*-544.496*	*-534.077*

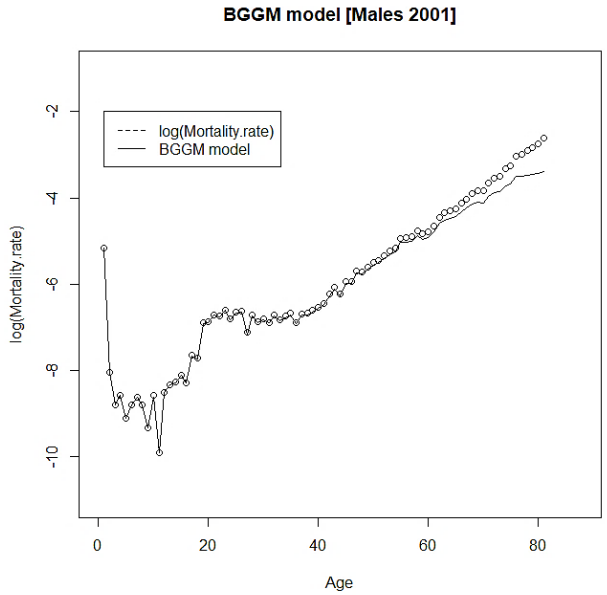
Πίνακας 3. Οι εκτιμήσεις των τιμών των παραμέτρων για τα έτη 2001, 2011 και 2012 αντίστοιχα. Το 2011 είναι έτος αναφοράς (έτος απογραφής πληθυσμού). Οι εκτιμήσεις αφορούν τον γυναικείο πληθυσμό της Ελλάδας. Ενώ τα *AIC, BIC* και *logLik* είναι τα αντίστοιχα στατιστικά κριτήρια της BGGM κατανομής.

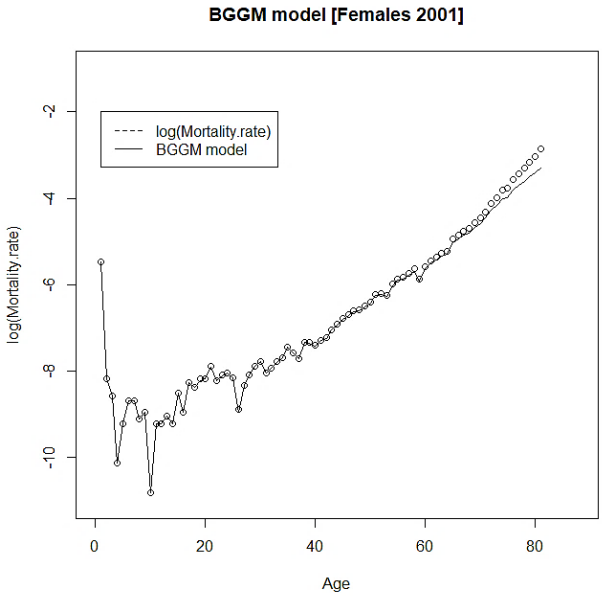
Ο όρος $\boldsymbol{\theta e^{\xi x}}$ σχετίζεται με τη διαδικασία γήρανσης ενός πληθυσμού για συγκεκριμένο χρόνο. Παρατηρείται ότι καθώς το $\boldsymbol{\theta}$ αυξάνεται η καμπύλη θνησιμότητας μετατοπίζεται προς τα αριστερά, αντανακλώντας την αυξανόμενη σχετική σημασία της τάξης των 60-80 ετών.

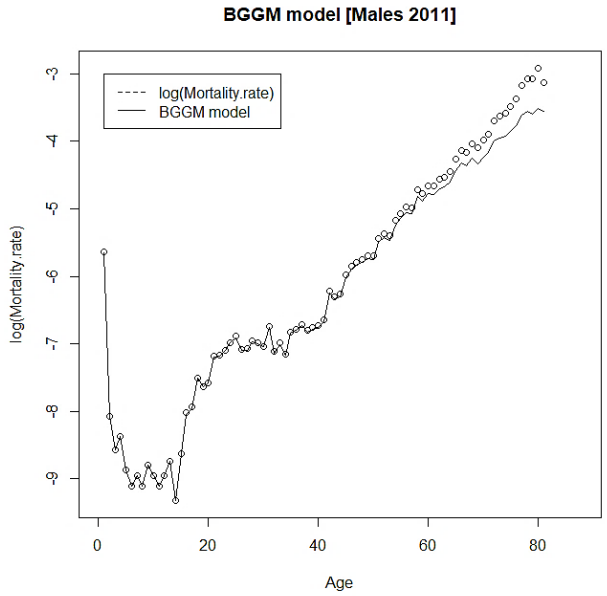
Η τιμή της παραμέτρου $\boldsymbol{\theta}$ διαφοροποιείται μεταξύ των δύο φύλων (Πίνακες 2 & 3), και παραμένει σταθερά υψηλότερη για τους άνδρες. Μια αύξηση της τιμής του $\boldsymbol{\theta}$ παρατηρείται στους άνδρες μεταξύ 2001 και 2011, ενώ δεν παρατηρούνται αλλαγές μεταξύ 2011 και 2012, πιθανώς λόγω του πολύ μικρού χρονικού διαστήματος. Δημογραφικά, μία μειούμενη τιμή του $\boldsymbol{\theta}$ αντικατοπτρίζει ένα αυξανόμενο προσδόκιμο ζωής.

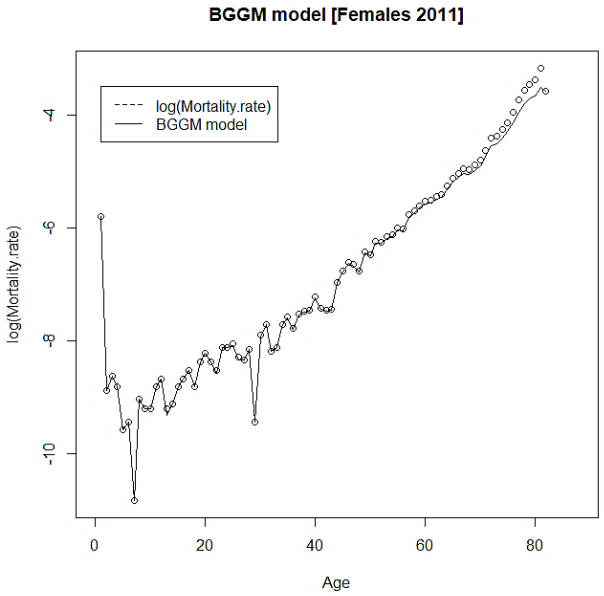
Η παράμετρος $\boldsymbol{\xi}$ αντιπροσωπεύει το ποσοστό γήρανσης του πληθυσμού. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της κατανομής BGGM, για τους άνδρες, το 2001 -12 παρατηρείται μία σχετικά

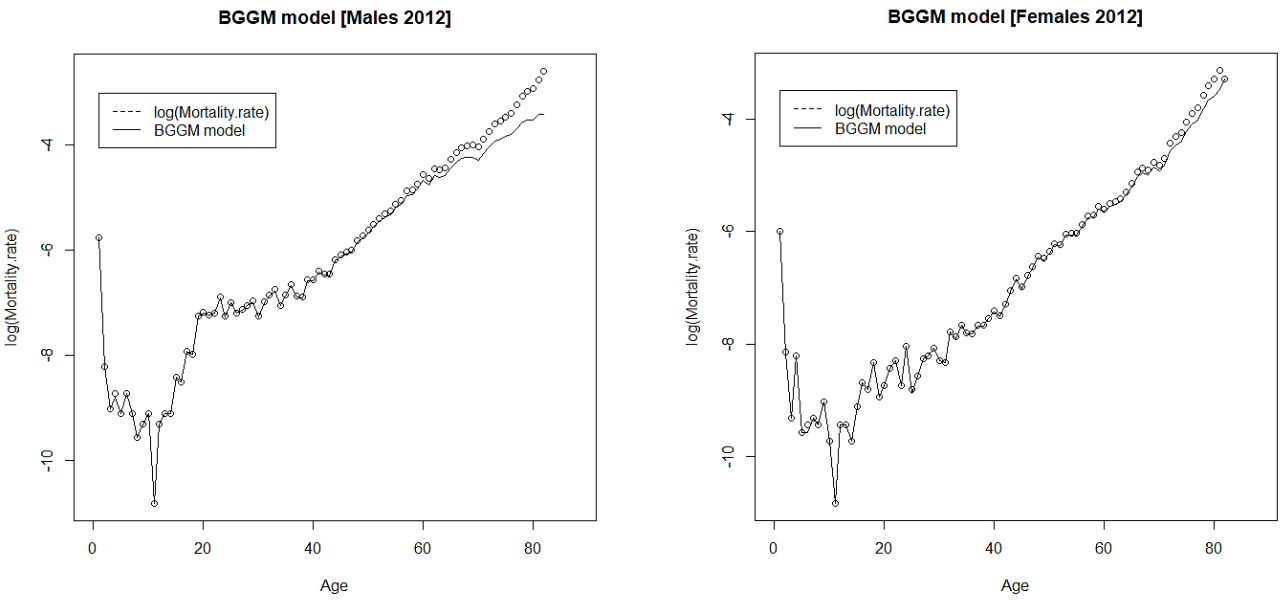
υψηλή τιμή της παραμέτρου (πίνακας 2) και ομοίως μία ακόμα υψηλότερη τιμή για τις γυναίκες (πίνακας 3).











Γράφημα 12. Η πιθανότητα θανάτου σε λογαριθμική κλίμακα, της BGGM κατανομής (συνεχής μαύρη γραμμή). Αφορά τα έτη 2001, 2011 και 2012 για την Ελλάδα, τόσο για άνδρες όσο και για γυναίκες για μονοετείς ηλικιακές ομάδες. Τα γραφήματα έγιναν με το λογισμικό της R.

Στο γράφημα 12 παρατηρείται η προσέγγιση/καλή προσαρμογή (goodness of fit) της BGGM κατανομής στα πραγματικά δεδομένα θνησιμότητας. Στις ηλικίες από τα 80 έτη και μετά, φαίνεται και η παρατήρηση των Brown, Horiuchi και Wilmoth, οι οποίοι όπως αναφέρθηκε, μίλησαν για την «ανθρώπινη αντίσταση» στο θάνατο και την ετερογένεια των πληθυσμών. Γραφικά δηλαδή, οι εκτιμήσεις των μοντέλων θνησιμότητας θα δίνουν πάντα μία μικρή απόκλιση από τα πραγματικά δεδομένα, κάτι το οποίο μειώνεται στο ελάχιστο μέσω της Beta Gompertz Generalized Makeham κατανομής, όταν τα δεδομένα των πληθυσμών είναι περισσότερα και με καλύτερα ποιοτικά χαρακτηριστικά.

Συνοψίζοντας…

Στο κεφάλαιο 3 προτείνεται μία νέα κατανομή για την περιγραφή της θνησιμότητας. Η νέα αυτή κατανομή βασίζεται σε προηγούμενα πιθανοθεωρητικά μοντέλα θνησιμότητας και αποτελεί μίξη των Βήτα κατανομών με τους αντίστοιχους νόμους θνησιμότητας. Η Beta Gompertz Generalized Makeham (BGGM) είναι μία κατανομή έξι παραμέτρων:

$$f_{BGGM}(x) = \frac{(\theta e^{\xi x} + \lambda + \kappa x) e^{-\lambda x - \frac{\theta}{\xi}(e^{\xi x} - 1)}}{B(\alpha, \beta)} \cdot \left[(1 - e^{-\frac{\kappa}{2}x^2 - \lambda x - \frac{\theta}{\xi}(e^{\xi x} - 1)}) \right]^{\alpha - 1} \cdot \left[\left(e^{-\frac{\kappa}{2}x^2 - \lambda x - \frac{\theta}{\xi}(e^{\xi x} - 1)} \right) \right]^{\beta - 1}$$

$$\theta, \xi, \lambda, \kappa, \alpha, \beta > 0, x \geq 0$$

Κάθε μία από τις παραμέτρους έχει συγκεκριμένη δημογραφική και στατιστική ερμηνεία.

ΚΕΦ.4: Στατιστικές ιδιότητες της προτεινόμενης BGGM κατανομής

Η Βήτα κατανομή έχει χρησιμοποιηθεί ευρέως σε πολλούς επιστημονικούς τομείς. Εφαρμόζεται πολύ συχνά και είναι γνωστή ως κατανομή πιθανοτήτων με ευρεία εφαρμογή στη διαχείριση διαφόρων ειδών προβλημάτων, μεταξύ των οποίων η ανάλυση επιβίωσης. Τα τελευταία χρόνια, η ανάπτυξη επικεντρώνεται σε νέες πιθανοθεωρητικές τεχνικές για την οικοδόμηση νέων κατανομών, για παράδειγμα η Γενικευμένη Βήτα κατανομή του Jones, το 2004.

Σε αυτή την ενότητα θα διερευνηθούν οι στατιστικές ιδιότητες της *Beta Gompertz Generalized Makeham* (BGGM), μιας νέας κατανομής που προτείνεται για την περιγραφή της θνησιμότητας και η οποία προκύπτει από την μίξη της Βήτα κατανομής με τις κατανομές των Gompertz και Gompertz Generalized Makeham. Αυτό περιλαμβάνει την επαλήθευση της πραγματικής συνάρτησης πιθανότητας, την αθροιστική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και τη συνάρτηση κινδύνου. Η ανάλυση με την αντίστοιχη διαδικασία πραγματοποιήθηκε μέσω του κώδικα της R. Ο αντίστοιχος κώδικας σε αναλυτική μορφή για την κάθε μία περίπτωση του κεφαλαίου 4 που εξετάζεται παρακάτω, καθώς και οι αντίστοιχες τιμές και συναρτήσεις της BGGM κατανομής, βρίσκεται στο αντίστοιχο παράρτημα Α, της παρούσης διδακτορικής διατριβής, υπό τον τίτλο Παράρτημα $A_{\text{BGGM distribution}}$.

4.1 Η BGGM ως συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

Οι κατανομές που δημιουργούνται από την οικογένεια των Βήτα και που περιγράφονται στην Ενότητα 3 επεκτείνονται πλέον σε μια γενικότερη κατηγορία Γενικευμένων κατανομών που δημιουργούνται από την Βήτα. Δοσμένης της μητρικής κατανομής $F(x)$, $x \in R$ και με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$, λαμβάνεται ότι η αντίστοιχη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (pdf) της (προτεινόμενης) BGGM κατανομής η οποία προκύπτει από τον γενικότερο τύπο

$$g_1(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{B(\alpha,\beta)}[F(x)]^{\alpha-1}[1-F(x)]^{\beta-1}, & \alpha,\beta,\kappa,\lambda,\theta,\xi > 0, x \geq 0 \\ 0 \quad , & \gamma\iota\alpha\ x < 0 \end{cases}$$

όπου συγκεκριμένα θέτοντας την $f(x) = \left(\theta e^{\xi x} + \lambda + \kappa x\right) e^{-\frac{\kappa}{2}x^2 - \lambda x - \frac{\theta}{\xi}\left(e^{\xi x}-1\right)}$ ως συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (pdf: probability density function)

και την $F(x) = 1 - e^{-\frac{\kappa}{2}x^2 - \lambda x - \frac{\theta}{\xi}\left(e^{\xi x}-1\right)}$ ως την συνάρτηση αθροιστικής πυκνότητας (cdf: cumulative density function) της Γενικευμένης Gompertz Makeham (GGM) κατανομής.

Έστω η $h(x) = \frac{\kappa}{2}x^2 + \lambda x + \frac{\theta}{\xi}\left(e^{\xi x} - 1\right)$ (hazard function ή συνάρτηση κινδύνου της GGM), τότε η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης αυτής θα δίνεται ως $h'(x) = \theta e^{\xi x} + \lambda + \kappa x$, $\gamma\iota\alpha\ x > 0$ και η $F(x)$ να γράφεται $F(x) = 1 - e^{-h(x)}$.

Επιπλέον, μπορούμε να ξαναγράψουμε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της BGGM $x \geq 0$ ως

$$f_{BGGM}(x) = \frac{h'(x)e^{-h(x)}}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)}\left(1 - e^{-h(x)}\right)^{\alpha-1}\left(e^{-h(x)}\right)^{\beta-1} =$$

$$= \frac{h'(x)}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)}\left(1 - e^{-h(x)}\right)^{\alpha-1}\left(e^{-h(x)}\right)^{\beta}, x \geq 0$$

Με την αντίστοιχη αθροιστική συνάρτηση κατανομής (cdf) της BGGM να ορίζεται ως

$$F_{BGGM}(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)\,\mathrm{dt} = \frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)}\int_{0}^{x} h'(t)\left(1 - e^{-h(t)}\right)^{\alpha-1}\left(e^{-h(t)}\right)^{\beta}\,\mathrm{dt}\,.$$

Θεωρώντας τον μετασχηματισμό $u = 1 - e^{-h(t)}$, και έχοντας ότι $du = h'(t)e^{-h(t)}dt$ τα αντίστοιχα όρια μετασχηματίζονται ως εξής:

- για $t = 0$, επειδή $h(0) = 0$ έχουμε $u = 1 - e^{-h(0)} = 1 - e^{0} = 0$
- για $t = x$, έχουμε $u = 1 - e^{-h(x)}$
- για $t \to +\infty$ έχουμε $u \to 1$,επειδή $\lim_{t\to+\infty} h(t) \to +\infty$ και

$\lim_{t\to+\infty} u = \lim_{t\to+\infty}\left(1 - e^{-h(t)}\right) = 1 - 0 = 1.$

Με την $h(x)$ να είναι συνεχής, παραγωγίσιμη και αύξουσα συναρτηση για $x \geq 0$.

Δηλαδή έχουμε $0 \leq u = 1 - e^{-h(x)} \leq 1$ δίνεται ότι,

$F_{BGGM}(x) = \frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)}\int_0^{1-e^{-h(x)}} u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}\ du = \mathrm{B}\left(1 - e^{-h(x)}, \alpha, \beta\right),$

όπου $\mathrm{B}\left(1 - e^{-h(x)}, \alpha, \beta\right)$ είναι η Βήτα κατανομή.

Η αντίστοιχη συνάρτηση κινδύνου της BGGM κατανομής διαμορφώνεται ακολούθως:

$$H(x) = \frac{f_{BGGM}(x)}{1 - F_{BGGM}(x)} = \frac{\frac{h'(x)}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)} \cdot \left(1 - e^{-h(x)}\right)^{\alpha-1} \cdot \left(e^{-h(x)}\right)^{\beta}}{1 - \mathrm{B}(1 - e^{-h(x)}, \alpha, \beta)} =$$

$$= \frac{h'(x) \cdot \left(1 - e^{-h(x)}\right)^{\alpha-1} \cdot \left(e^{-h(x)}\right)^{\beta}}{\mathrm{B}(\alpha,\beta) \cdot [1 - \mathrm{B}(1 - e^{-h(x)}, \alpha, \beta)]} =$$

$$= \frac{h'(x) \cdot \left(1 - e^{-h(x)}\right)^{\alpha-1} \cdot \left(e^{-h(x)}\right)^{\beta}}{\mathrm{B}(\alpha,\beta) \cdot \left[1 - \frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)} \int_0^x h'(t)(1 - e^{-h(t)})^{\alpha-1}(e^{-h(t)})^{\beta}\,\mathrm{dt}\right]} =$$

$$= \frac{h'(x) \cdot \left(1 - e^{-h(x)}\right)^{\alpha-1} \cdot \left(e^{-h(x)}\right)^{\beta}}{\mathrm{B}(\alpha,\beta) - \int_0^x h'(t)(1 - e^{-h(t)})^{\alpha-1}(e^{-h(t)})^{\beta}\,\mathrm{dt}}$$

■

Παραγόμενα μοντέλα από την BGGM κατανομή

Ορισμένες γνωστές κατανομές προκύπτουν από τις τιμές συγκεκριμένων παραμέτρων της κατανομής *Beta Gompertz Generalized Makeham*. Συγκεκριμένα, στην περίπτωση που $\lambda = 0$ και $a = b = 1$, τότε εκφράζεται η Exponentiated Gompertz (ExpG) κατανομή, και αν ισχύει επιπλέον $\kappa = 0$, τότε λαμβάνεται η κατανομή Gompertz (G).

Τα όσα αναφέρθηκαν σε επίπεδο παραγόμενων κατανομών (submodels), μπορούν να ομαδοποιηθούν ως ακολούθως:

- Generalized Gompertz Makeham (GGM), για $\alpha = \beta = 1$,
- Gompertz Makeham (GM), για $\alpha = \beta = 1$ και $\kappa = 0$,
- Gompertz (G), για $\alpha = \beta = 1$ και $\kappa = \lambda = 0$,
- Beta Gompertz Makeham (BGM) για $\kappa = 0$,
- Beta Gompertz (BG) για $\kappa = \lambda = 0$.

4.2 Στατιστικές Ιδιότητες

Μία συνάρτηση για να είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας πρέπει να πληροί τις ακόλουθες ιδιότητες (Παπαϊωάννου et al., 2001):

1. $f(x) \geq 0$ (από την απόδειξη του Λήμματος 1) (*)
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ (Λήμμα 1 με την ακόλουθη απόδειξη) (**)

Λήμμα 1 (Ανδρεόπουλος et al., 2016)

Ο συνδυασμός της γενικευμένης Βήτα κατανομής με το γενικευμένο νόμο θνησιμότητας Gompertz - Makeham έχει ως αποτέλεσμα την *BGGM* κατανομή (ή *Beta Gompertz Generalized Makeham*), με την αντίστοιχη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

$$f_{BGGM}(x) = \frac{\left(\theta e^{\xi x} + \lambda + \kappa x\right)}{B(\alpha,\beta)} \cdot \left[\left(1 - e^{-\frac{\kappa}{2}x^2 - \lambda x - \frac{\theta}{\xi}\left(e^{\xi x}-1\right)}\right)\right]^{\alpha-1} \cdot \left[e^{-\frac{\kappa}{2}x^2 - \lambda x - \frac{\theta}{\xi}\left(e^{\xi x}-1\right)}\right]^{\beta}$$

$$\theta, \xi, \lambda, \kappa, \alpha, \beta > 0, x \geq 0$$

Απόδειξη

Στο εδάφιο 4.1 ορίστηκαν οι αντίστοιχες συναρτήσεις της BGGM κατανομής ως εξής:

Έστω ότι η $h(x) = \frac{\kappa}{2}x^2 + \lambda x + \frac{\theta}{\xi}\left(e^{\xi x} - 1\right)$ (hazard function ή συνάρτηση κινδύνου της GGM), τότε η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης αυτής θα δίνεται ως $h'(x) = \theta e^{\xi x} + \lambda + \kappa x$.

Είναι φανερό ότι $h'(x) \geq 0$ *και* $h(x) \geq 0$ για $x \geq 0$ καθώς όλες οι παράμετροι είναι θετικές και επίσης και οι δύο συναρτήσεις είναι γνησίως αύξουσες στο $[0, +\infty)$. Το σύνολο τιμών για την $h(x)$ είναι $[0, +\infty)$ για $x \in [0, +\infty)$, οπότε η $e^{-h(x)}$ παίρνει τιμές αντιστοίχως στο $(0,1]$, άρα και $F(x) = 1 - e^{-h(x)} \in [0,1)$, για $x \geq 0$.

Ακόμα, η $f_{BGGM}(x)) \geq 0$ για $x \geq 0$ καθώς είναι γινόμενο θετικών συναρτήσεων, οπότε ικανοποιείται και η συνθήκη (*) (Παπαϊωάννου et al., 2000).

Επιπλέον, αναδιατυπώνεται η συνάρτηση BGGM ως

$$f_{BGGM}(x) = \frac{h'(x)e^{-h(x)}}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)}\left(1 - e^{-h(x)}\right)^{\alpha-1}\left(e^{-h(x)}\right)^{\beta-1} =$$

$$= \frac{h'(x)}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)}\left(1 - e^{-h(x)}\right)^{\alpha-1}\left(e^{-h(x)}\right)^{\beta}.$$

Θεωρώντας τον μετασχηματισμό $u = 1 - e^{-h(x)}$, έχουμε ότι $du = h'(x)e^{-h(x)}dx$ και τα αντίστοιχα όρια μετασχηματίζονται ως εξής:

- για x= 0 , επειδή $h(0) = 0$ έχουμε $u = 1 - e^{-h(0)} = 1 - e^0 = 0$
- για $x \to +\infty$ έχουμε $u \to 1$,επειδή $\lim_{x\to+\infty} h(x) \to +\infty$ και

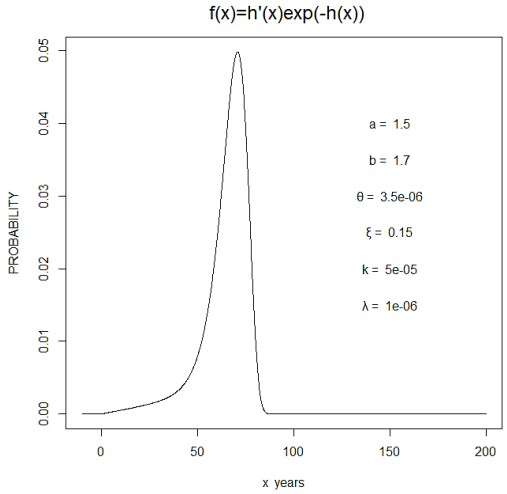
  $\lim_{x\to+\infty} u = \lim_{x\to+\infty}\left(1 - e^{-h(x)}\right) = 1 - 0 = 1.$

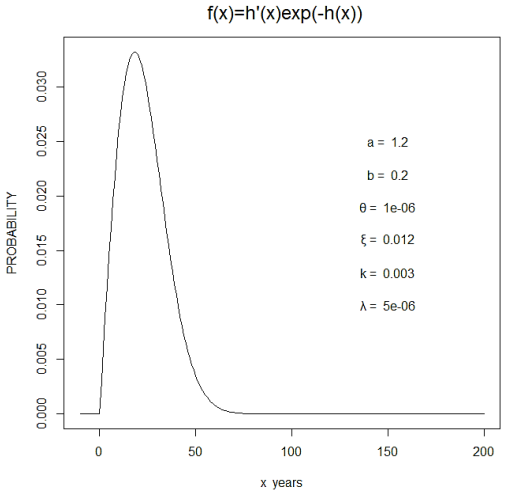
Επομένως, $\int_0^{\infty} f_{BGGM}(x)dx = \int_0^{\infty} \frac{\left(1-e^{-h(x)}\right)^{\alpha-1}\cdot\left[1-\left(1-e^{-h(x)}\right)\right]^{\beta-1}\cdot h'(x)e^{-h(x)}}{B(\alpha,\beta)}dx =$

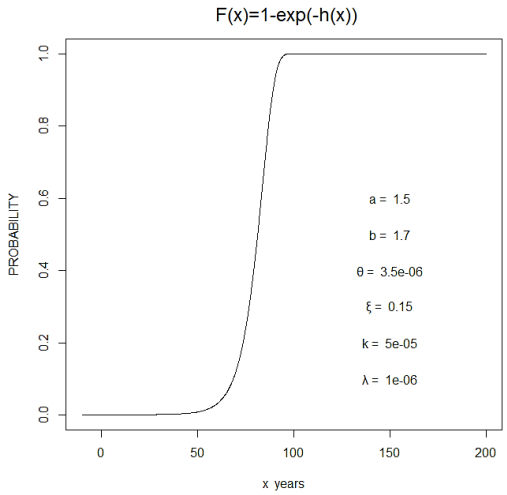
$$= \int_0^1 \frac{u^{\alpha-1}\cdot(1-u)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}du = \frac{B(\alpha,\beta)}{B(\alpha,\beta)} = 1 \qquad \blacksquare$$

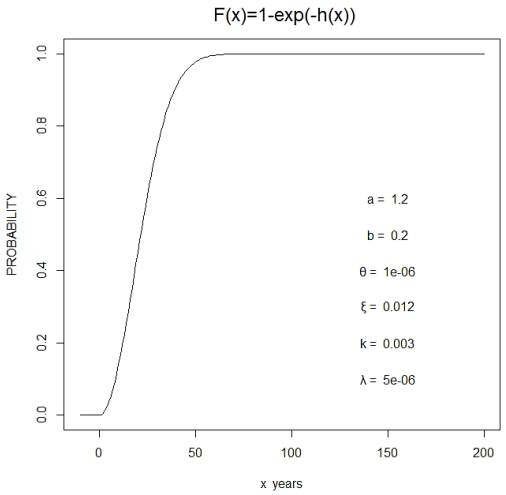
Ενδεικτικές μορφές της *BGGM* κατανομής

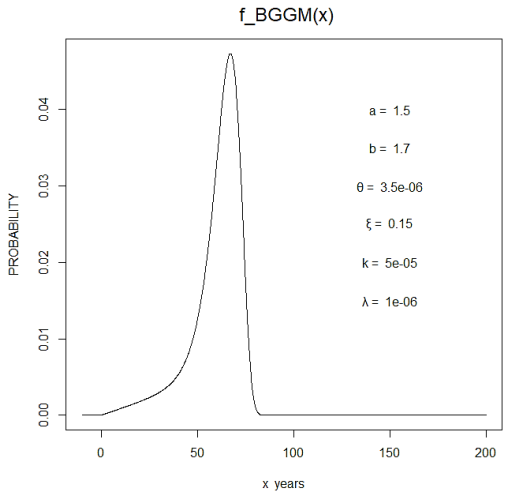
Παρατίθενται τα παρακάτω διαγράμματα για την *f(x)*, την *F(x)* και την *BGGM* κατανομή για δύο διαφορετικούς συνδυασμούς τιμών των παραμέτρων τους.

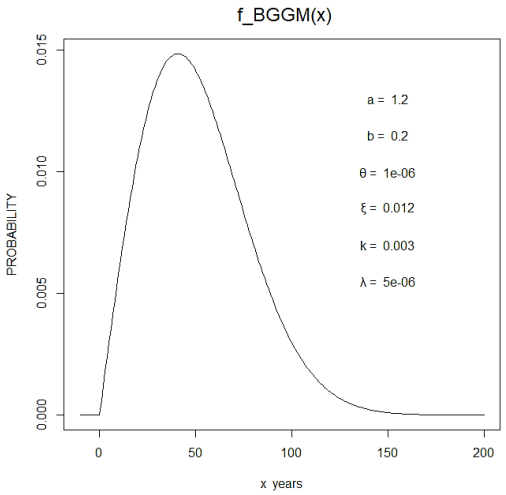






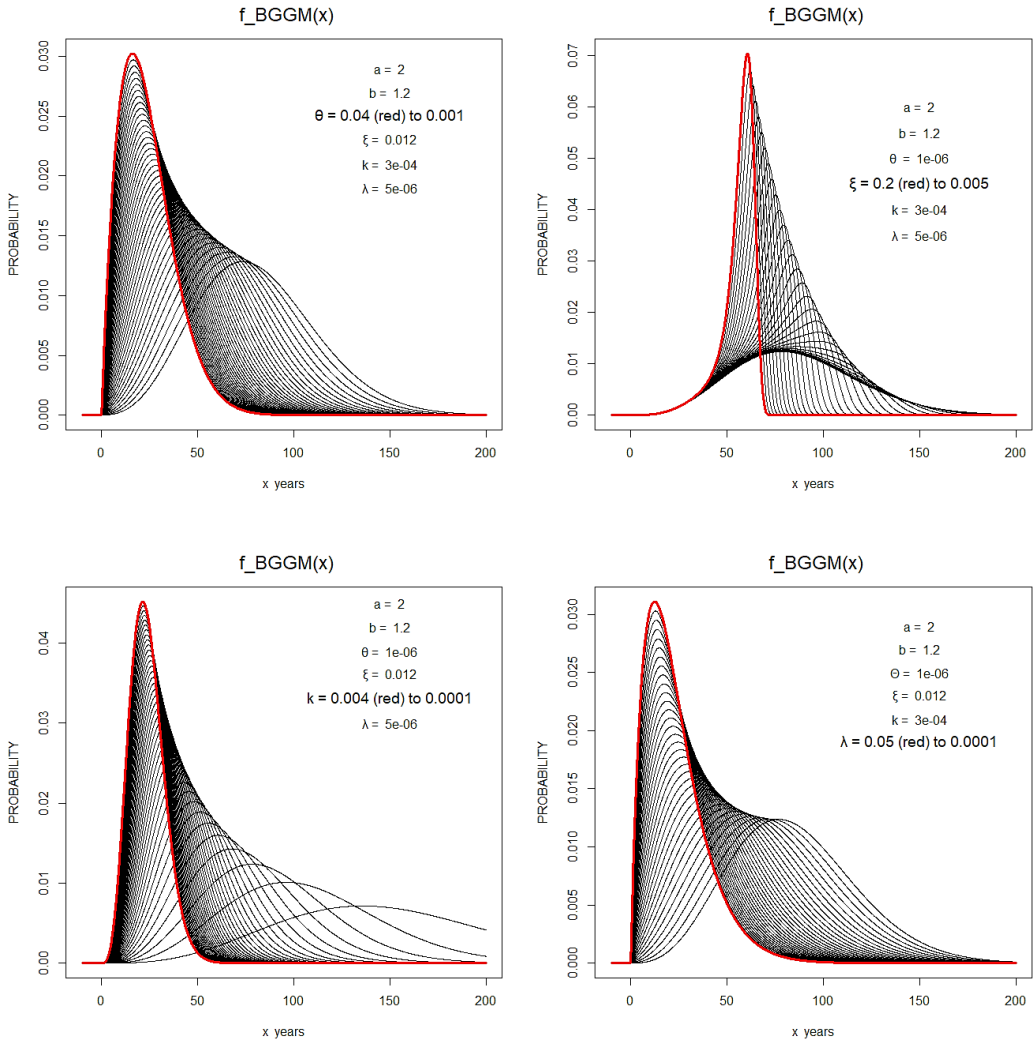


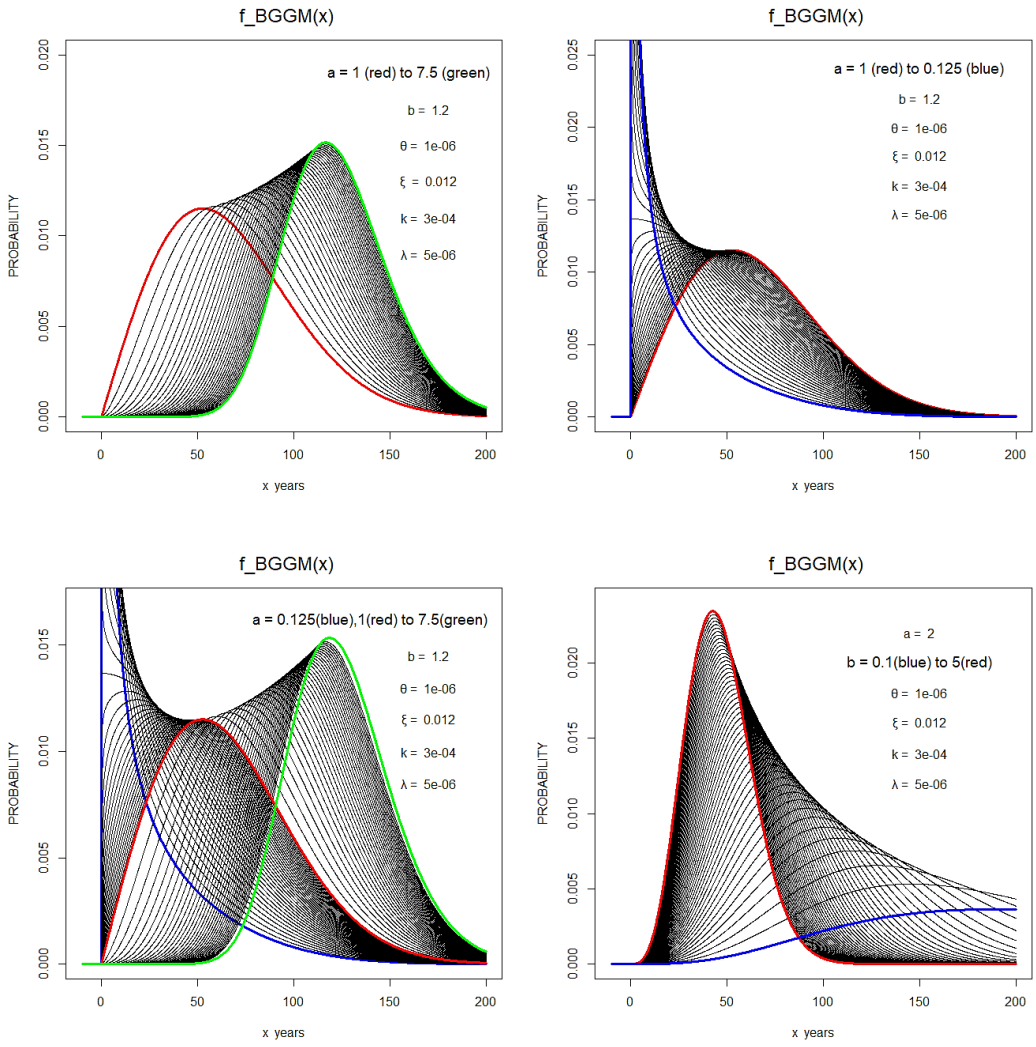




Γράφημα 13: Η γραφική παράσταση της σ.π.π. της *BGGM* κατανομής, κατ΄αντιστοιχία με την *f(x)* και την αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F(x) = 1 - e^{-h(x)}$ για διάφορες τιμές των παραμέτρων της.
Τα γραφήματα έχουν πραγματοποιηθεί με το λογισμικό της R.

Για διαφορετικές τιμές της κάθε παράμετρου προκύπτουν τα παρακάτω διαγράμματα, όπου φαίνεται η επίδραση καθεμίας στην μορφή της σ.π.π. της *BGGM* κατανομής. Συγκεκριμένα, κινείται σε ένα εύρος τιμών η μία παράμετρος και διατηρούνται σταθερές οι υπόλοιπες πέντε. Για τις διάφορες τιμές κάθε παραμέτρου, παρουσιάζονται τα παρακάτω διαγράμματα (Γράφημα 14), που δείχνουν την επίδραση κάθε παραμέτρου με τη μορφή pdf της κατανομής BGGM (Currie, et al., 2004). Τα τελευταία δύο γραφήματα, δείχνουν τις διαφορές στην τυπική απόκλιση των δύο pdf, αλλά με την ίδια μέση τιμή. Η εκτίμηση των 6 παραμέτρων έγινε με το λογισμικό minpack.lm (λογισμικό R).





Γράφημα 14: Οι καμπύλες της σ.π.π της κατανομής BGGM με χρήση επιλεγμένων τιμών παραμέτρων. Τα γραφήματα δείχνουν την επίδραση στη μορφή της κατανομής. Τα γραφήματα δημιουργήθηκαν με το λογισμικό της R.

Όταν το $\boldsymbol{\theta}$ αυξάνεται, η καμπύλη της BGGM κατανομής μετακινείται προς τα αριστερά δείχνοντας μια αυξητική τάση θανάτων στις παιδικές ηλικίες. Όταν το $\boldsymbol{\xi}$ αυξάνεται «συγκεντρώνεται» η καμπύλη θνησιμότητας στο υψηλότερο όριο, μεγάλες ηλικίες (ως 85+ ετών). Σχετικά με το $\boldsymbol{\kappa}$, όσο μικρότερη τιμή τόσο μεγαλύτερη διασπορά της καμπύλης. Αύξηση του $\boldsymbol{\kappa}$ δείχνει μία μετατόπιση της καμπύλης σε ένα εύρος τιμών 20 με 60 ετών, όπου ως παράγοντας κινδύνου παρουσιάζεται η ηλικία. Εμφανίζεται δηλαδή η παράμετρος να επηρεάζει τις ηλικίες μεταξύ 20 έως 60 ετών. Το $\boldsymbol{\lambda}$ δείχνει να έχει μικρότερη διασπορά, όμως πάλι επηρεάζεται ένα εύρος ηλικιών 20 με 80 έτη, όσο το $\boldsymbol{\lambda}$ αυξάνεται.

Για την παράμετρο $\boldsymbol{\alpha}$, λαμβάνονται τα ενδεικτικά αποτελέσματα:

- $\alpha < 1$ η καμπύλη μετατοπίζεται προς τα αριστερά (μπλε χρώμα)
- $\alpha = 1$ η καμπύλη συγκεντρώνεται γύρω από τα 50 έτη (κόκκινο χρώμα)
- $\alpha > 1$ η καμπύλη μετατοπίζεται προς τα δεξιά με μικρότερη διασπορά (πράσινο χρώμα).

Για την παράμετρο $\boldsymbol{\beta}$ παρατηρείται μετατόπιση καμπύλης προς τα αριστερά όσο η τιμή μειώνεται και μετατόπιση προς τα δεξιά σε κάθε άλλη περίπτωση.

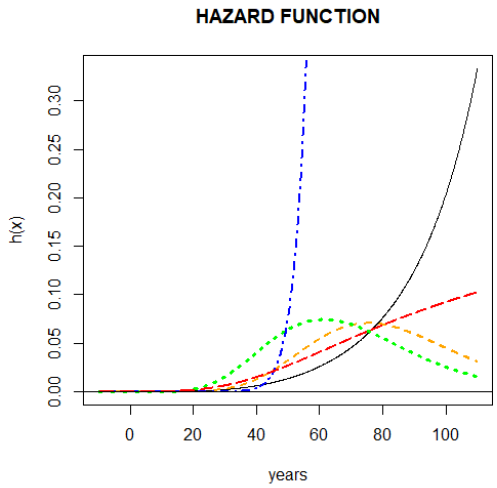
Ενδεικτικές μορφές της Συνάρτησης κινδύνου της *BGGM* κατανομής

Η αντίστοιχη συνάρτηση κινδύνου της BGGM κατανομής, όπως αναφέρθηκε, διαμορφώνεται ακολούθως:

$$H(x) = \frac{f_{BGGM}(x)}{1 - F_{BGGM}(x)} = \frac{\frac{h'(x)}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)} \cdot \left(1 - e^{-h(x)}\right)^{\alpha-1} \cdot \left(e^{-h(x)}\right)^{\beta}}{1 - \mathrm{B}(1 - e^{-h(x)}, \alpha, \beta)} =$$

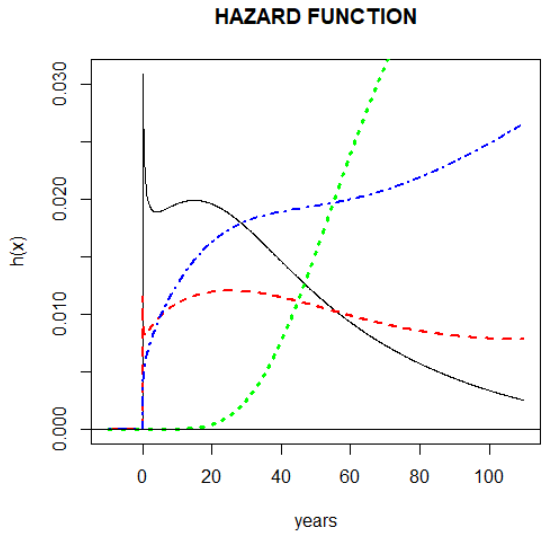
$$= \frac{h'(x) \cdot \left(1 - e^{-h(x)}\right)^{\alpha-1} \cdot \left(e^{-h(x)}\right)^{\beta}}{\mathrm{B}(\alpha,\beta) - \int_0^x h'(t)(1 - e^{-h(t)})^{\alpha-1}(e^{-h(t)})^{\beta}\,\mathrm{dt}}$$

Τα παρακάτω διαγράμματα (γράφημα 15) διαμορφώνουν τη συνάρτηση κινδύνου της BGGM κατανομής (hazard function) για διαφορετικούς συνδυασμούς τιμών των παραμέτρων $\alpha, \beta, \theta, \xi, \kappa$ και λ και διαμορφώνονται ως εξής:



	α	β	θ	ξ
Black	4	0.6	0.01	0.002
Orange	7	2	0.01	0.002
Green	7	2	0.01	0.002
Blue	10	0.3	0.01	0.05
Red	10	0.3	0.007	0.05

	κ	λ
Black	0.0005	0.000001
Orange	0.0005	0.000001
Green	0.0005	0.01
Blue	0.00005	0.00001
Red	0.00005	0.00001



	α	β	θ	ξ
Black	0.8	1.8	0.0001	0.003
Green	3.2	1.5	0.0004	0.002
Blue	1.2	1.2	0.01	0.002
Red	0.6	1.2	0.0001	0.008

	κ	λ
Black	0.005	0.0005
Green	0.000001	0.0005
Blue	0.000001	0.0005
Red	0.0001	0.0003

Γράφημα 15: Οι μορφές που λαμβάνει η συνάρτηση Κινδύνου (Hazard function) της BGGM κατανομής με χρήση επιλεγμένων τιμών παραμέτρων. Τα γραφήματα δείχνουν τη δυναμική στη μορφή/σχήμα της κατανομής.

Τα γραφήματα δημιουργήθηκαν με το λογισμικό της R.

Η ασυμπτωτική συμπεριφορά της BGGM κατανομής

Οι ασυμπτωτικές συμπεριφορές στις μαθηματικές συναρτήσεις εκφράζουν την σύγκλιση μιας συνάρτησης, για συγκεκριμένα σημεία του πεδίου ορισμού της ή και για τιμές αυτών να τείνουν στο άπειρο. Έχει αποδειχθεί (Κολυβά Μ. et al., 2015) ότι για την οικογένεια των εκθετικών κατανομών, ισχύουν τα παρακάτω όρια:

- $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
- $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$
- $\lim_{x\to 0} e^x = 1$

Η συνάρτηση $h(x) = \frac{\kappa}{2}x^2 + \lambda x + \frac{\theta}{\xi}\left(e^{\xi x} - 1\right)$ είναι γνησίως αύξουσα, καθώς είναι άθροισμα πολυωνυμικής και εκθετικής (και οι δύο αύξουσες συναρτήσεις, εφόσον έχουν θετικούς συντελεστές). Επίσης η $h(x)$ είναι θετική για $x \geq 0$, με $h(0) = 0$ και $\lim_{x\to+\infty} h(x) \to +\infty$.

Ομοίως η συνάρτηση $h'(x) = \theta e^{\xi x} + \lambda + \kappa x$ είναι γνησίως αύξουσα και είναι και αυτή θετική για $x \geq 0$, με $h'(0) = \theta + \lambda$ και $\lim_{x\to+\infty} h'(x) \to +\infty$.

Επομένως, λαμβάνοντας τα αντίστοιχα όρια για κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις, λαμβάνονται τα εξής αποτελέσματα:

Για $x \to 0^+$

$$\lim_{x\to 0^+} f_{BGGM}(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{h'(x)}{B(\alpha,\beta)}\left[1-e^{-h(x)}\right]^{\alpha-1}\left[e^{-h(x)}\right]^{\beta} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{h'(x)}{B(\alpha,\beta)}\left[1-e^{-h(x)}\right]^{\alpha-1}\left[e^{-h(x)}\right]^{\beta} = (1)$$

εάν το $\alpha > 1$, τότε $(1) = \frac{\theta+\lambda}{B(\alpha,\beta)}[1-e^{-0}]^{\alpha-1}[(e^{-0})]^{\beta} = \frac{\theta+\lambda}{B(\alpha,\beta)}[1-1]^{\alpha-1}[1]^{\beta} = 0$

εάν το $\alpha = 1$, τότε $(1) = \frac{\theta+\lambda}{B(\alpha,\beta)}[(e^{-0})]^{\beta} = \frac{\theta+\lambda}{B(\alpha,\beta)}$

εάν το $0 < \alpha < 1$, τότε $(1) = \frac{\theta+\lambda}{B(\alpha,\beta)}\left(\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{e^{h(x)}}{e^{h(x)}-1}\right]^{1-\alpha}\right)[1]^{\beta} = +\infty$

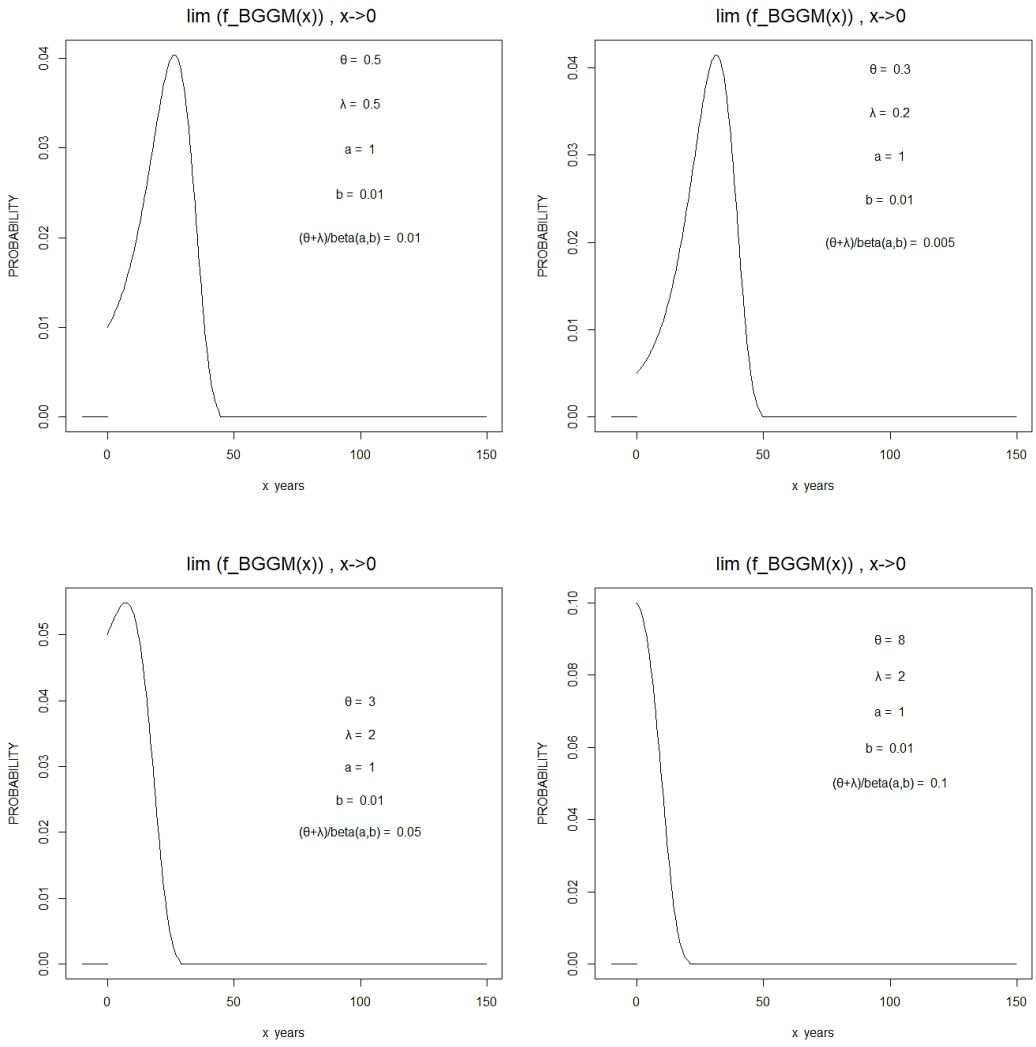
Για την περίπτωση όπου $\alpha = 1$, παρουσιάζεται ασυνέχεια στην σ.π.π. στο μηδέν, όπως φαίνεται και στα παρακάτω γραφήματα (Γράφημα 16). Οριακά στο μηδέν (x>0 ή $x \to 0^+$) η τιμή της συνάρτησης είναι $\frac{\theta+\lambda}{B(\alpha,\beta)}$.

Για $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f_{BGGM}(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{h'(x)}{B(\alpha,\beta)} \cdot \left[1-e^{-h(x)}\right]^{\alpha-1} \cdot \left[e^{-h(x)}\right]^{\beta} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{h'(x)}{B(\alpha,\beta)\cdot[e^{h(x)}]^{\beta}} \cdot \left[1-e^{-h(x)}\right]^{\alpha-1} =$$

$$= \frac{[1-0]^{\alpha-1}}{B(\alpha,\beta)} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\theta e^{\xi x}+\lambda+\kappa x\right)}{\left[e^{\frac{\kappa}{2}x^2+\lambda x+\frac{\theta}{\xi}\left(e^{\xi x}-1\right)}\right]^{\beta}} = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \cdot 0 = 0$$



Γράφημα 16: Όρια της BGGM συνάρτησης. Όταν το $\alpha = 1$, λαμβάνονται οι αντίστοιχες καμπύλες της σ.π.π της κατανομής BGGM με χρήση των υπόλοιπων επιλεγμένων τιμών των παραμέτρων. Τα γραφήματα δείχνουν την επίδραση στη μορφή της κατανομής, καθώς και το στοιχείο της ασυνέχειας. Τα γραφήματα δημιουργήθηκαν με το λογισμικό της R. Το αποτέλεσμα αριθμητικά μπορεί να υπολογιστεί για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων από τον κώδικα της R (παράρτημα A_1).

Επέκταση (Expansion) της σ.π.π. της BGGM κατανομής

Μια προσπάθεια επέκτασης της συνάρτησης πιθανότητας της BGGM κατανομής, είναι ο υπολογισμός της μέσω διωνυμικών συντελεστών. Οι διωνυμικοί συντελεστές δείχνουν τον αριθμό των επιλογών που υπάρχουν από την επιλογή x τρόπων από n στοιχεία, όταν το στοιχείο μπορεί να είναι ένα από μόλις δύο τύπους (π.χ. επιτυχία / αποτυχία, αγόρι / κορίτσι) . Αξίζει να τονιστεί ότι ορισμένα σημαντικά στατιστικά μέτρα, όπως η διακύμανση, η συμμετρία (skewness)

και η κύρτωση (kurtosis), μπορούν να ληφθούν κατά περιόδους (ή στιγμές) (Castellares et al., 2019) κάτι ιδιαίτερο χρήσιμο όταν ο υπολογισμός κλειστής μορφής είναι δύσκολος ή αδύνατος. Επομένως, η έγκυρη έκφραση των περιόδων αυτών είναι απαραίτητη για τον υπολογισμό των προαναφερθέντων ποσοτήτων. Στη συνέχεια, παρέχεται μια έκφραση κλειστής μορφής για τις περιόδους της κατανομής *Beta Gompertz Generalized Makeham*.

Για την έκφραση της BGGM κατανομής ως δυναμοσειρά, χρησιμοποιείται η παρακάτω διωνυμική σειρά (Binomial series), όπου $|z| \leq 1$ και $b > 0$:

$$(1-z)^b = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{b}{j} z^j \quad (*)$$

και για την $F(x) = 1 - e^{-\frac{\kappa}{2}x^2 - \lambda x - \frac{\theta}{\xi}\left(e^{\xi x}-1\right)} = 1 - e^{-h(x)} \coloneqq u$

όπου $0 \leq F(x) = 1 - e^{-h(x)} \coloneqq u \leq 1$ και την $(*)$, λαμβάνεται ότι ο παράγοντας $\left(F(x)\right)^{\alpha-1}$ που υπάρχει στην συνάρτηση $f_{BGGM}(x)$ μπορεί να γραφτεί:

$$\left(F(x)\right)^{\alpha-1} = \left(1 - e^{-h(x)}\right)^{\alpha-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{a-1}{j} \left(e^{-h(x)}\right)^j$$

Από την οποία οδηγούμαστε στην εξής μορφή της σ.π.π. της f_{BGGM} ως δυναμοσειρά:

$$f_{BGGM}(x) = \frac{h'(x)}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)} \left(1 - e^{-h(x)}\right)^{\alpha-1} \left(e^{-h(x)}\right)^{\beta} =$$

$$= \frac{h'(x)}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)} \left[\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{a-1}{j} \left(e^{-h(x)}\right)^j\right] \left(e^{-h(x)}\right)^{\beta} =$$

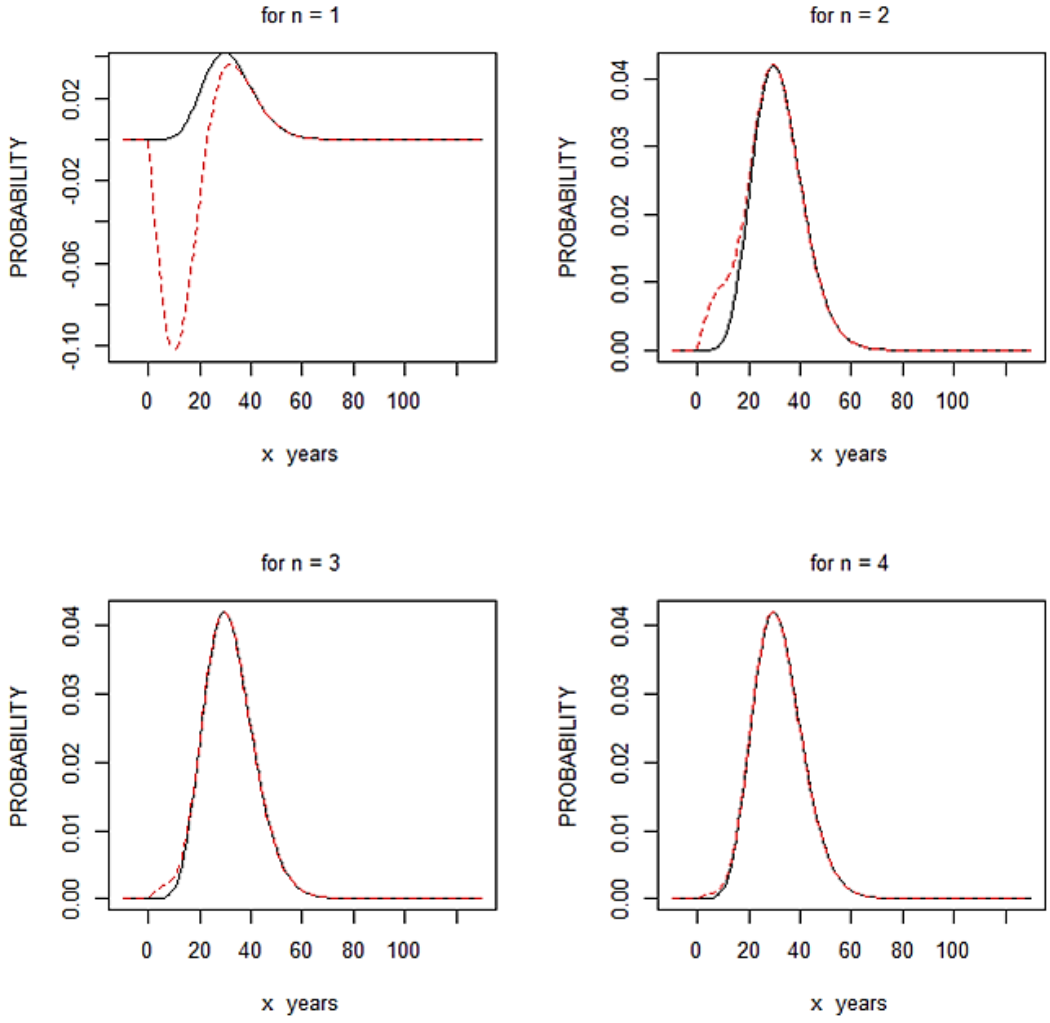
$$= \frac{h'(x)}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{a-1}{j} e^{-h(x)j} e^{-h(x)\beta} =$$

$$= \frac{h'(x)}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{a-1}{j} e^{-h(x)(j+\beta)} \quad (**)$$

■

Το γράφημα 17 παρουσιάζει την προσέγγιση της BGGM ως συνάρτησης πιθανότητας με το αντίστοιχο άθροισμα (δυναμοσειρά) της παραπάνω σχέσης $(**)$. Η σύγκλιση, μεταξύ της μαύρης και της κόκκινης γραμμής, παρατηρείται από τους πρώτους όρους των αντίστοιχων αθροισμάτων και όσο το πλήθος των επαναλήψεων (n) αυξάνεται, η προαναφερθείσα σύγκλιση της δυναμοσειράς παρατηρείται στους προηγούμενους όρους του αθροίσματος. Η

μαύρη γραμμή στα γραφήματα, παρουσιάζει την σ.π.π της BGGM κατανομής και η κόκκινη (διακεκομμένη) γραμμή παρουσιάζει την αντίστοιχα αθροίσματα της δυναμοσειράς $(**)$.



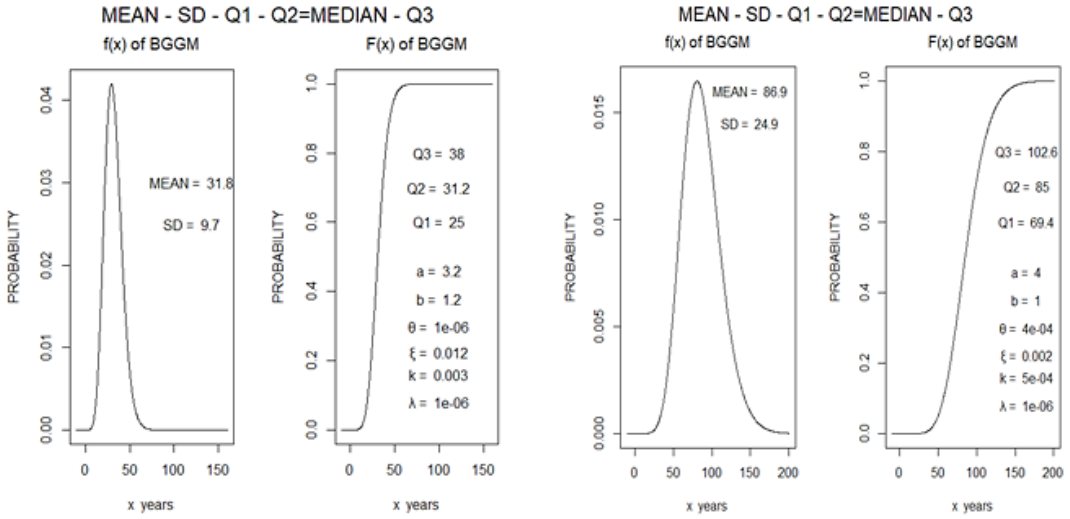
Γράφημα 17: Για τιμές $a = 3.2, \beta = 1.2, \theta = 0.000001, \xi = 0.012, k = 0.003$ και $\lambda = 0.000001$ η μαύρη γραμμή στα παραπάνω γραφήματα, παρουσιάζει την σ.π.π της BGGM κατανομής. Η κόκκινη (διακεκομμένη) γραμμή παρουσιάζει τα αντίστοιχα αθροίσματα της δυναμοσειράς $\frac{h'(x)}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{a-1}{j}e^{-h(x)(j+\beta)}$ για $n = 1,2,3,4$

Ομοίως, για τις τιμές των άλλων παραμέτρων η σύγκλιση είναι ικανοποιητική. Τα γραφήματα δημιουργήθηκαν με το λογισμικό της R.

Μερικοί στατιστικοί υπολογισμοί (αριθμητική ανάλυση) της BGGM κατανομής

Στα διαγράμματα του γραφήματος 18, παρουσιάζονται ως παραδείγματα συγκεκριμένων τιμών των παραμέτρων $a, \beta, \theta, \xi, \kappa$ και λ η σ.π.π της BGGM κατανομής και η

α.σ.κ. της BGGM κατανομής. Επιπλέον ο πίνακας 4 παρουσιάζει τους αντίστοιχους υπολογισμούς της μέσης τιμής, της τυπικής απόκλισης και των τεταρτημορίων 25% (Q1), 50% (Q2=διάμεσος) και 75% (Q3) της κατανομής της BGGM για τις διάφορες τιμές των αντίστοιχων παραμέτρων της και κάνοντας χρήση των $f(x)$ και $F(x)$. Από το γράφημα 18 γίνεται σαφές ότι, ακόμη και μια μικρή διαφοροποίηση των παραμέτρων οδηγεί σε αλλαγή του σχήματος της σ.π.π και της α.σ.κ. της BGGM κατανομής, κάνοντας την καμπύλη της αντίστοιχης κατανομής πιο πλατύκυρτη ή πιο μεσόκυρτη. Αυτό το συμπέρασμα ενισχύεται από τις αριθμητικές τιμές του πίνακα 4 όπου ακόμη και στην περίπτωση της αριθμητικής αλλαγής της τιμής μιας μόνο παραμέτρου (δηλ. οι υπόλοιπες 5 παράμετροι να είναι σταθερές), η τιμή των κεντρικών μέτρων τάσης και διασποράς είναι επαρκώς διαφοροποιημένες.



Γράφημα 18: Μερικοί στατιστικοί υπολογισμοί της BGGM κατανομής για διάφορες τιμές των παραμέτρων. Οι υπολογισμοί και τα γραφήματα δημιουργήθηκαν με το λογισμικό της R.

θ	ξ	k	λ	α	β	MEAN	SD	Q1	Q2 (Median)	Q3
0.000001	0.012	0.003	0.000001	3.2	1.2	31.75	9.67	24.9	31.1	37.9
0.0001	0.012	0.003	0.000001	3.2	1.2	31.71	9.67	24.9	31.0	37.8
0.0004	0.002	0.0005	0.000001	3.2	1.2	76.91	23.67	60.1	75.1	91.8
0.01	0.002	0.0005	0.000001	3.2	1.2	59.61	22.41	43.5	57.7	73.7
0.01	0.002	0.0005	0.000001	4	1.2	64.16	21.83	48.6	62.4	77.8
0.01	0.002	0.0005	0.000001	4	0.6	84.29	30.25	62.7	81.3	103
0.01	0.002	0.0005	0.000001	7	2	62.66	16.22	51.3	61.6	73.0
0.01	0.002	0.0005	0.001	7	2	50.18	15.01	39.5	49.0	59.6
0.01	0.05	0.00005	0.00001	10	0.3	64.18	10.73	57.1	64.4	72.0
0.007	0.05	0.00005	0.00001	10	0.3	71.44	10.91	63.8	71.2	78.9

Πίνακας 4: Στατιστικοί υπολογισμοί (Αριθμητική ανάλυση) της BGGM κατανομής για διάφορες τιμές των παραμέτρων.

Μέση τιμή & ροπογεννήτρια της BGGM κατανομής

Στο πλαίσιο της παρούσης διδακτορικής διατριβής, η BGGM κατανομή χρησιμοποιείται για να εξετάζει σύνολα δεδομένων θνησιμότητας που αναφέρονται σε ανθρώπινο πληθυσμό. Η παράμετρος x εκφράζει τα χρόνια ζωής του ανθρώπινου πληθυσμού σε έτη από την γέννηση (x > 0 έτη) ως τη στιγμή που θα επέλθει ο θάνατος (μπορεί να προσαρμοστεί από 1-2 δεκαετίες έως πολύ περισσότερα από τα 100 έτη). Επομένως η παράμετρος «έτη» ή «χρόνια ζωής» τρέχει για τιμές $x \geq 0$.

Για την εύρεση της **μέσης τιμής** της προτεινόμενης συνάρτησης απαιτούνται πολύπλοκοι υπολογισμοί. Στο παράρτημα A_2 παρουσιάζεται η διαδικασία αναλυτικά σε μορφή αριθμητικής ανάλυσης κατά προσέγγιση.

Ορισμός

Έστω X μία συνεχής τ.μ. με σ.π.π. f_x. Η ποσότητα

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_x(x) dx$$

θα καλείται **μέση** ή **αναμενόμενη τιμή** ή **πληθυσμιακός μέσος** της τ.μ. X.

■

Έχουμε $E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_{BGGM}(x) dx$ και την

$$f_{BGGM}(x) = \frac{(\theta e^{\xi x} + \lambda + \kappa x)}{B(\alpha, \beta)} \cdot \left[(1 - e^{-\frac{\kappa}{\lambda}x^2 - \lambda x - \frac{\theta}{\xi}(e^{\xi x} - 1)}) \right]^{\alpha - 1} \cdot \left[\left(e^{-\frac{\kappa}{\lambda}x^2 - \lambda x - \frac{\theta}{\xi}(e^{\xi x} - 1)} \right) \right]^{\beta}$$

με $\theta, \xi, \lambda, \kappa, \alpha, \beta > 0, \quad x \geq 0$

Οπότε,

$$E(x) = \int_{0}^{+\infty} x \cdot \frac{(\theta e^{\xi x} + \lambda + \kappa x)}{B(\alpha, \beta)} \left[1 - e^{-\frac{\kappa}{2}x^2 - \lambda x - \frac{\theta}{\xi}(e^{\xi x} - 1)} \right]^{\alpha - 1} \left[\left(e^{-\frac{\kappa}{2}x^2 - \lambda x - \frac{\theta}{\xi}(e^{\xi x} - 1)} \right) \right]^{\beta} dx$$

■

Δεν υπολογίζεται σε κλειστή μορφή, αλλά δύναται να υπολογιστεί με μεθόδους αριθμητικής ανάλυσης για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων.

Ομοίως για την εύρεση της **ροπογεννήτριας** $M_x(t)$ της προτεινόμενης συνάρτησης απαιτούνται πολύπλοκοι υπολογισμοί. Στο παράρτημα A_3 παρουσιάζεται η διαδικασία

αναλυτικά. Να σημειωθεί ότι επειδή εξετάζονται τα όρια του ανθρώπινου πληθυσμού ο χρόνος δεν παίρνει αρνητικές τιμές, χρησιμοποιώντας την παράμετρο $t \geq 0$ για τις τιμές εκείνες της οποίας υπάρχει σύγκλιση.

Θεωρείται $M_x(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_{BGGM}(x)dx$ και

$$f_{BGGM}(x) = \frac{(\theta e^{\xi x} + \lambda + \kappa x)e^{-\lambda x - \frac{\theta}{\xi}(e^{\xi x}-1)}}{B(\alpha,\beta)} \cdot \left[(1 - e^{-\frac{\kappa}{\lambda}x^2 - \lambda x - \frac{\theta}{\xi}(e^{\xi x}-1)})\right]^{\alpha-1} \cdot \left[1 - \left(1 - e^{-\frac{\kappa}{\lambda}x^2 - \lambda x - \frac{\theta}{\xi}(e^{\xi x}-1)}\right)\right]^{\beta-1}$$

με $\theta, \xi, \lambda, \kappa, \alpha, \beta > 0, \quad 0 \leq x$

Λαμβάνοντας διαδοχικά,

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_{BGGM}(x)dx$$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{tx} \cdot \frac{(\theta e^{\xi x} + \lambda + \kappa x)\left[e^{-\frac{\kappa}{2}x^2 - \lambda x - \frac{\theta}{\xi}(e^{\xi x}-1)}\right]}{B(\alpha,\beta)} \left[1 - e^{-\frac{\kappa}{2}x^2 - \lambda x - \frac{\theta}{\xi}(e^{\xi x}-1)}\right]^{\alpha-1} \left[\left(e^{-\frac{\kappa}{2}x^2 - \lambda x - \frac{\theta}{\xi}(e^{\xi x}-1)}\right)\right]^{\beta-1} dx$$

■

Διακύμανση της BGGM κατανομής

Έστω X μια διακριτή τ.μ. Η ποσότητα $V(X) = E[X - E(X)^2]$ καλείται **διασπορά (ή διακύμανση)** της τ.μ. X (ή της κατανομής της). Η διασπορά ορίζεται όταν $E(X) < \infty$ και συμβολίζεται με ${\sigma_x}^2$, όπου η $\sigma_x = \sqrt{V(x)}$ καλείται **τυπική απόκλιση (sd)** της τ.μ. X

■

Δεν υπολογίζεται σε κλειστή μορφή, αλλά δύναται να υπολογιστεί με μεθόδους αριθμητικής ανάλυσης για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων.

Παρατήρηση: Όλοι οι υπολογισμοί έγιναν μέσω του κώδικα R, που παρουσιάζεται στα παραρτήματα A_1, A_2, A_3. Για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων έχουν υπολογιστεί και εξαχθεί αποτελέσματα στον πίνακα 4, του παρόντος εδαφίου.

Μέτρα πληροφορίας της BGGM κατανομής (Εντροπία)

Υπάρχουν πολλά μέτρα πληροφορίας, εκ των οποίων τα πιο βασικά είναι του Fisher, των Kullback και Leibler και του Shannon (1948). Τα μέτρα πληροφορίας χωρίζονται σε τρεις μεγάλες κατηγορίες, στα παραμετρικά ή μέτρα τύπου Fisher, σε μη παραμετρικά ή τύπου απόκλισης και σε τύπου εντροπίας (Shannon, 2001) μέτρα πληροφορίας.

Το κυριότερο μέτρο είναι η **εντροπία του** Shannon, η οποία δίνεται από τον τύπο $H(x) = -\int f(x) ln f(x) dx$ για την συνεχή περίπτωσή μας (BGGM distribution). Το μέτρο αυτό ποσοτικοποιεί την αναμενόμενη αβεβαιότητα που σχετίζεται με το αποτέλεσμα ενός πειράματος τύχης (π.χ. πιθανότητα μπορεί να είναι η ζωή ή ο θάνατος). Δηλαδή παρέχει πληροφορία στην κατανομή μας για την "δυνατότητα πρόβλεψης" του αποτελέσματος μιας τυχαίας μεταβλητής X. Θα μπορούσε να δίνει την πληροφορία της ανθρώπινης θνησιμότητας (ποσοτικοποίηση αβεβαιότητας σε πληροφορία). Όσο μεγαλύτερη είναι η εντροπία, τόσο λιγότερο συγκεντρωμένη είναι η κατανομή της X και συνεπώς μια παρατήρηση x μας παρέχει λίγη πληροφορία.

Τα μέτρα πληροφορίας παρουσιάζουν κάποιες ιδιότητες, τα οποία αναφέρονται με μεγάλη λεπτομέρεια από τον Papaioannou (1985 και 2001).

Αναφέρονται ονομαστικά οι σημαντικότερες εξ αυτών:

1. Μη αρνητικότητα (Nonnegativity)
2. Προσθετικότητα και Υποπροσθετικότητα (Additivity – Subadditivity)
3. Μέγιστη πληροφορία (maximal information)
4. Κυρτότητα (Convexity)
5. Απώλεια πληροφορίας (Loss of information)

Γίνεται σαφές από τα παραπάνω ότι περισσότερα δεδομένα (περισσότερες παράμετροι σε μια κατανομή) σημαίνουν περισσότερη πληροφορία. Στην BGGM κατανομή λαμβάνονται υπόψη τα περισσότερα από τα παραπάνω προαπαιτούμενα για την όσο το δυνατόν περισσότερη πληροφορία: α) *ομαλότητα*, β) *μονοτονία* (η κατανομή αυξάνεται με την ηλικία), γ) *κυρτότητα* (αυξάνεται απότομα στις μεγάλες ηλικίες).

Ορισμός

Αν X μια μη αρνητική συνεχής τ.μ. με την αντίστοιχη σ.π.π. $f(x)$ τότε η ποσότητα

$$H_{Shannon}(x) = -\int_0^{+\infty} f(x) lnf(x) dx$$

καλείται η **εντροπία του Shannon** (Shannon entropy)**.**

■

Από την BGGM κατανομή λαμβάνεται διαδοχικά

$$f_{BGGM}(x) = \frac{(\theta e^{\xi x} + \lambda + \kappa x) e^{-\lambda x - \frac{\theta}{\xi}(e^{\xi x}-1)}}{B(\alpha,\beta)} \cdot \left[(1 - e^{-\frac{\kappa}{\lambda}x^2 - \lambda x - \frac{\theta}{\xi}(e^{\xi x}-1)})\right]^{\alpha-1} \cdot \left[1 - \left(1 - e^{-\frac{\kappa}{\lambda}x^2 - \lambda x - \frac{\theta}{\xi}(e^{\xi x}-1)}\right)\right]^{\beta-1}$$

με $\theta, \xi, \lambda, \kappa, \alpha, \beta > 0, \quad 0 \le x$

Όπου

$$H_{Shannon}(x) = -\int f(x) lnf(x) dx$$

$$= -\int f(x) lnf(x) dx = -\int f_{BGGM}(x) lnf_{BGGM}(x) dx$$

$$= -\int \frac{(\theta e^{\xi x} + \lambda + \kappa x) e^{-\lambda x - \frac{\theta}{\xi}(e^{\xi x}-1)}}{B(\alpha,\beta)} \cdot \left[\left(1 - e^{-\frac{\kappa}{\lambda}x^2 - \lambda x - \frac{\theta}{\xi}(e^{\xi x}-1)}\right)\right]^{\alpha-1} \cdot \left[1 - \left(1 - e^{-\frac{\kappa}{\lambda}x^2 - \lambda x - \frac{\theta}{\xi}(e^{\xi x}-1)}\right)\right]^{\beta-1} lnf_{BGGM}(x) dx$$

Θέτω $B(x) = \frac{(\theta e^{\xi x} + \lambda + \kappa x) e^{-\lambda x - \frac{\theta}{\xi}(e^{\xi x}-1)}}{B(\alpha,\beta)} \cdot \left[(1 - e^{-\frac{\kappa}{\lambda}x^2 - \lambda x - \frac{\theta}{\xi}(e^{\xi x}-1)})\right]^{\alpha-1} \cdot \left[\left(e^{-\frac{\kappa}{\lambda}x^2 - \lambda x - \frac{\theta}{\xi}(e^{\xi x}-1)}\right)\right]^{\beta-1}$

άρα $H_{Shannon}(x) = -\int B(x) lnf_{BGGM}(x) dx$

4.3 Μέθοδος εκτίμησης των παραμέτρων της BGGM κατανομής

Στην παρούσα διατριβή εφαρμόζεται ανάλυση πολλαπλής γραμμικής παλινδρόμησης για να ταιριάξουμε το μοντέλο που αναπτύσσουμε στο κεφάλαιο 3 (BGGM κατανομή) με τα δεδομένα θνησιμότητας.

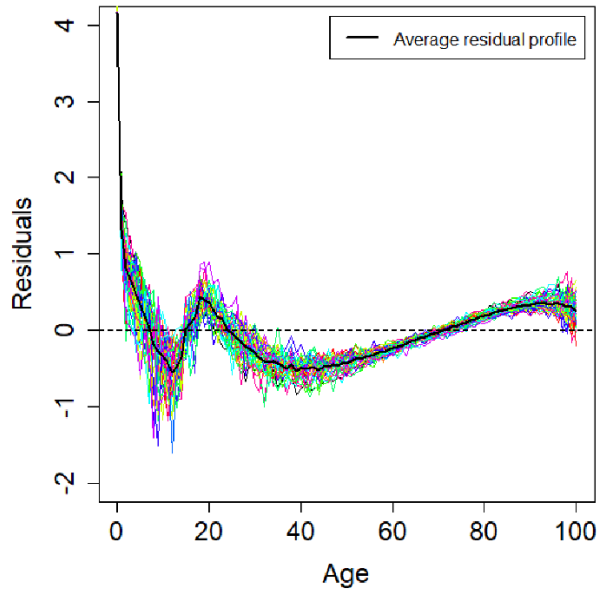
Η μέθοδος **Least Squares** (LS) χρησιμοποιείται για την εκτίμηση των ελεύθερων (άγνωστων) παραμέτρων που ελαχιστοποιούν το άθροισμα των τετραγωνικών υπολοίπων (ένα υπόλοιπο είναι η διαφορά μεταξύ της θεωρητικής και της τελικής παρατηρούμενης τιμής). Οι έρευνες (Wilson, 1993 και Yen et al., 2008) έχουν δείξει ότι οι πολλαπλές γραμμικές παλινδρομήσεις αποδείχθηκαν λιγότερο αξιόπιστες από τη μέθοδο Μέγιστης Πιθανοφάνειας (Maximum Likelihood) στην εκτίμηση των άγνωστων παραμέτρων όταν χρησιμοποιούνται μοντέλα θνησιμότητας. Εξετάζοντας ένα απλό σύνολο δεδομένων θνησιμότητας με τους νόμους Gompertz ή Makeham, πολύ εύκολα διαπιστώνεται ότι πράγματι, η μέθοδος **LS** υπερεκτιμά τη θνησιμότητα στην μικρές ηλικίες και υποεκτιμά στις υψηλότερες ηλικιακές ομάδες.

Αντίθετα, όταν ένα σύνθετο πολλαπλό γραμμικό μοντέλο ταιριάζει (goodness of fit) με ακρίβεια σε ολόκληρο το σύνολο δεδομένων (ηλικιακό εύρος), η μέθοδος **LS** ευνοείται έναντι της **Maximum Likelihood** (ML) επειδή δεν απαιτεί τη χρήση αριθμητικών μεθόδων για τη μερική διαφοροποίηση της κατανομής σε σχέση με την κάθε άγνωστη παράμετρο. Άλλωστε, όπως έχει μελετηθεί, τόσο οι μέθοδοι **LS** όσο και οι μέθοδοι **ML** έχουν πολλές ομοιότητες (Pletcher, 1999). Όταν τα σφάλματα (υπόλοιπα) είναι ανεξάρτητα και κατανεμημένα με τον ίδιο τρόπο, οι γραμμικές και μη γραμμικές πολλαπλές παλινδρομήσεις δίνουν εκτιμήσεις για τις άγνωστες παραμέτρους ταυτόσημες με εκείνες που δίδονται από τη μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας (Burnham και Andreson, 2003).

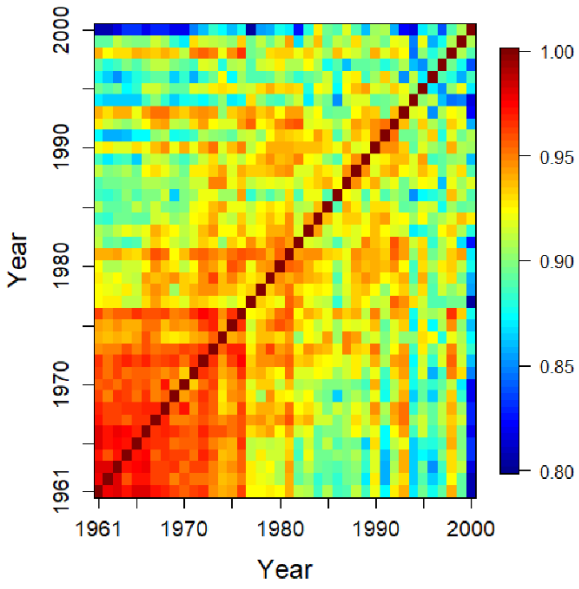
Λαμβάνοντας υπόψη ότι η μέθοδος **LS** είναι ευκολότερη στην εφαρμογή της και ότι οι εκτιμήσεις της για τις παραμέτρους είναι ίδιες με εκείνες της **ML** (στην περίπτωση που τα σφάλματα είναι ανεξάρτητα και ομοιόμορφα κατανεμημένα), χρησιμοποιείται η μέθοδος των **LS** ως βασική μέθοδο εκτίμησης για τις άγνωστες παραμέτρους του μοντέλου μας. Παρατηρώντας, το μοντέλο που προτείνεται, παρέχει μια πολύ ακριβή προσαρμογή στα δεδομένα θνησιμότητας (Ελληνικά και Διεθνή) σε όλες τις ηλικιακές ομάδες και τα σφάλματα/κατάλοιπα του είναι ισοκατανεμειμένα στο σύνολο των δεδομένων που εξετάζονται κάθε φορά. Παρουσιάζουν μάλιστα περίπου σταθερή μέση τιμή αφού είναι όλα πολύ κοντά στο μηδέν και με σχεδόν σταθερή διακύμανση.

Στο Γράφημα 19a, μπορούν να παρατηρηθούν τα κατάλοιπα (residuals) όπως εξήχθησαν από την κατανομή του Gompertz, για τα δεδομένα θανάτων (ανδρών) της Σουηδίας από το 1961 έως το 2000, αντιπαραθέτοντάς τα με τα κατάλοιπα (residuals) της BGGM κατανομής, στο γράφημα 19c για την ίδια χρονική περίοδο και με το ίδιο σύνολο δεδομένων. Ο κώδικας εξαγωγής των καταλοίπων της BGGM κατανομής, βρίσκεται στο παράρτημα A_{7res}.

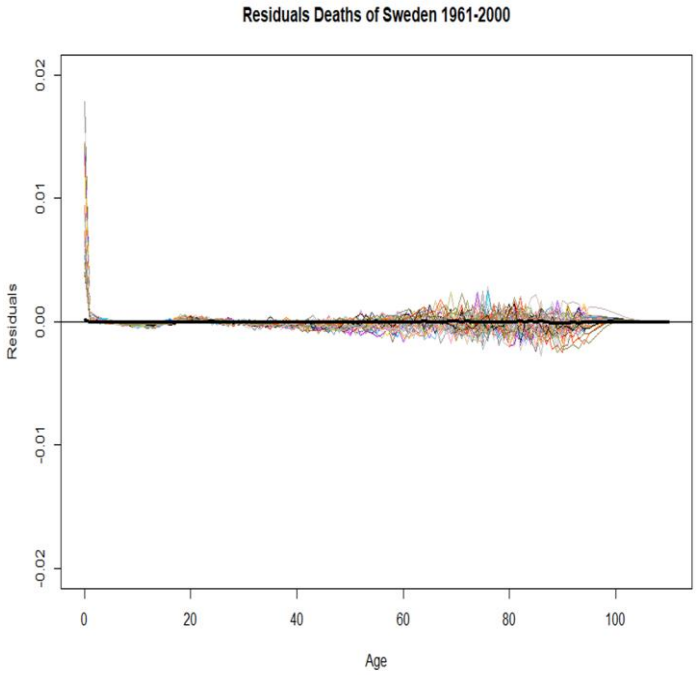
Όπως παρατηρείται, για τα δεδομένα θνησιμότητας της Σουηδίας (1961 – 2000), τα κατάλοιπα που λαμβάνονται (μοντέλο Gompertz) ως αποτέλεσμα από την προσαρμογή των δεδομένων ανά δύο διαφορετικά ημερολογιακά έτη (Γράφημα 19b) συσχετίζονται σε μεγάλο βαθμό (ρ> 0,85).



Γράφημα 19a. Ειδική ηλικιακή απεικόνιση όπου φαίνεται το προφίλ των καταλοίπων (χρωματιστές καμπύλες) που λαμβάνονται από την εφαρμογή του μοντέλου Gompertz σε ποσοστά θνησιμότητας των ετών 1961-2000 (Σουηδία) και του μέσου όρου (μαύρη καμπύλη) που προκύπτει.



Γράφημα 19b. Στην πολύχρωμη εικόνα παρουσιάζονται οι διασταυρούμενες συσχετίσεις μεταξύ των καταλοίπων του μοντέλου Gompertz προσαρμοσμένα σε διαφορετικά δεδομένα περιόδου από το 1961 ως το 2000 (Σουηδία).



Γράφημα 19c. Ειδική ηλικιακή απεικόνιση όπου φαίνεται το προφίλ των καταλοίπων (χρωματιστές καμπύλες) που λαμβάνονται από την εφαρμογή του προτεινόμενου μοντέλου BGGM σε ποσοστά θνησιμότητας των ετών 1961-2000 (Σουηδία) και του μέσου όρου (μαύρη καμπύλη) που προκύπτει. Η προσέγγιση της μέσης τιμής στο μηδέν είναι πολλή ισχυρή.

Όπως γίνεται επομένως αντιληπτό από τα παραπάνω γραφήματα, το μοντέλο Gompertz αν και παρέχει μια καλή ένδειξη για την πορεία που ακολουθούν τα κατάλοιπα. Εντούτοις σε καμία περίπτωση δεν συγκλίνουν στο μηδέν όπως αυτά από το προτεινόμενο μοντέλο Beta Gompertz Generalized Makeham στο ίδιο σύνολο δεδομένων και για το ίδιο χρονικό εύρος.

Όπως αναφέρθηκε, όσο «υψηλότερη» ελαχιστοποίηση σφαλμάτων των καταλοίπων παρέχεται σε μία έρευνα, τόσο καλύτερη «πρόβλεψη» των δεδομένων του μοντέλου δύναται να λαμβάνεται. Θα πρέπει τα κατάλοιπα (residuals) να κατανέμονται όσο το δυνατόν γύρω από το μηδέν, λαμβάνοντας όμως μια σειρά από στατιστικές ιδιότητες, η επεξήγηση των οποίων ξεφεύγει από την παρούσα ανάλυση.

4.4 Στατιστικά κριτήρια επιλογής του κατάλληλου μοντέλου

Η διαδικασία επιλογής του κατάλληλου μοντέλου χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό του βέλτιστου, από ένα σύνολο υποψήφιων μοντέλων. Δηλαδή το μοντέλο που ταιριάζει σε ένα δοσμένο σύνολο δεδομένων χωρίς υπερβολική ή ανεπαρκή εφαρμογή. Η ποιότητα της προσαρμογής μπορεί να αντιπροσωπεύεται από μια ορισμένη ποσότητα που εκτιμά την όσο το δυνατόν πιο ακριβή τοποθέτηση του μοντέλου (goodness off fit) στο «μονοπάτι» των δεδομένων και εξαρτάται από τον αριθμό των παραμέτρων του μοντέλου και το μέγεθος του συνόλου δεδομένων.

Σε γενικές γραμμές, η αύξηση του μεγέθους του δείγματος μπορεί να αντισταθμίσει την αύξηση των παραμέτρων του μοντέλου. Ωστόσο, αν ένα μοντέλο με μικρό αριθμό παραμέτρων ταιριάζει αποτελεσματικά σε ένα σύνολο δεδομένων, τότε αυτό στατιστικά προτιμάται από ένα άλλο μοντέλο με πολλές παραμέτρους.

Έχουν προταθεί διάφορα κριτήρια για την επιλογή του βέλτιστου μοντέλου. Τρία ποσοτικά κριτήρια που αξιολογούν την ισορροπία ανάμεσα στην προσαρμογή και την ομαλότητα, όπως το κριτήριο πληροφοριών Akaike (AIC), το κριτήριο πληροφοριών Bayes (BIC) και η λογαριθμική πιθανοφάνεια (Loglik) (Cairns, 2000) επελέγησαν για τα εφαρμοσμένα μοντέλα θνησιμότητας (πίνακες 2 & 3). Επίσης για το πόσο καλά το μοντέλο μας εξηγεί τα δεδομένα (πίνακες 9 και 10) εξηγείται από το R^2_{pseudo} (McFadden, 1977).

Τα δύο πιο συχνά χρησιμοποιούμενα κριτήρια που συνδέονται στενά μεταξύ τους είναι το Κριτήριο Πληροφοριών Akaike (*Akaike Information Criterion*) (Akaike, 1973) και το Bayesian Criterion Information (BIC) που αποδίδεται στον Gideon Schwarz (Schwarz, 1978). Και τα δύο κριτήρια βασίζονται στη συνάρτηση πιθανότητας αλλά διαφέρουν στην ποινικοποίηση που χρησιμοποιείται για τον αριθμό των παραμέτρων του μοντέλου. Η «ποινή» είναι σημαντική για τα μοντέλα προσαρμογής που εξετάζονται, επειδή η αύξηση του αριθμού παραμέτρων συνήθως αυξάνει την πιθανότητα αλλά και υπερεκτιμά τα δεδομένα. Η «ποινή» για το BIC είναι $kln(n)$ όπου k είναι ο αριθμός των παραμέτρων του μοντέλου και n είναι το πλήθος των παρατηρήσεων. Αντίστοιχα η «ποινή» για το AIC είναι $2k$. Αυτό σημαίνει πως το στατιστικό κριτήριο BIC γενικά «τιμωρεί» τον αριθμό των άγνωστων παραμέτρων πιο έντονα από ό,τι το κάνει το στατιστικό κριτήριο AIC (αυτό όμως κάνει το BIC ευνοϊκό σε σύγκριση με το AIC), καθώς εξαρτάται από το μέγεθος του n και το σχετικό μέγεθος των n και k.

Το στατιστικό κριτήριο ***AIC*** ενός μοντέλου, ορίζεται ως εξής:

$$AIC = 2k - 2\ln(L)$$

όπου $ln(L)$ είναι η μέγιστη πιθανοφάνεια καταγραφής του μοντέλου και k είναι ο αριθμός των ελεύθερων παραμέτρων του μοντέλου. Τα μοντέλα με τη χαμηλότερη τιμή AIC προτιμούνται έναντι εκείνων με μεγαλύτερη τιμή AIC.

Στην περίπτωση της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων (LS) με κανονικά κατανεμημένα σφάλματα, και εκτός από μια αυθαίρετη πρόσθετη σταθερά, το ***AIC*** μπορεί να εκφραστεί ως:

$$AIC = 2k + n\ln(\hat{\sigma}^2)$$

Το βασικό *πλεονέκτημα* της χρήσης του στατιστικού AIC είναι ότι δεν υπάρχει ανάγκη διατύπωσης οποιωνδήποτε υποκειμενικών προηγούμενων πεποιθήσεων σχετικά με το ποιο από τα προτεινόμενα μοντέλα είναι πιθανότερο να είναι κατάλληλο. Δεν χρειάζεται δηλαδή, η οποιαδήποτε προηγούμενη ανάλυση για την επιλογή κατάλληλου μοντέλου. Αντίθετα, ένα *μειονέκτημα* της χρήσης του κριτηρίου AIC είναι ότι η παραδοχή/αποδοχή του υποθέτει ότι τα συγκριτικά μοντέλα πρέπει να είναι «φωλιασμένα» (το ένα να είναι εξαρτώμενο από το άλλο). Η περίπτωση της BGGM κατανομής, όντως αποτελεί μια «φωλιασμένη-nested» μίξη κατανομών, όπως παρουσιάζεται στο κεφάλαιο 3.

■

Το στατιστικό κριτήριο ***BIC*** ενός μοντέλου, ορίζεται ως εξής:

$$BIC = -2\ln(L) + k\ln(n)$$

όπου $ln(L)$ είναι η μέγιστη πιθανοφάνεια καταγραφής του μοντέλου, η παράμετρος n αντιστοιχεί στο μέγεθος του δείγματος και k είναι ο αριθμός των ελεύθερων παραμέτρων του μοντέλου. Στην περίπτωση της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων (LS) με κανονικά κατανεμημένα σφάλματα, το ***BIC*** μπορεί να εκφραστεί ως:

$$BIC = n\ln(\hat{\sigma}^2) + k\ln(n)$$

Το στατιστικό κριτήριο BIC προέρχεται από τη Bayesian θεωρία (Dellaportas et al, 2001), ξεκινώντας από την εκ των προτέρων υπόθεση ότι όλα τα εξεταζόμενα μοντέλα είναι εξίσου πιθανόν να είναι σωστά και συγκρίνοντας τις εκ των υστέρων πιθανότητες των διαφορετικών

μοντέλων (Neath και Cavanaugh, 2012). Ομοίως, τα μοντέλα με τη χαμηλότερη τιμή BIC προτιμούνται έναντι εκείνων με μεγαλύτερη τιμή BIC.

■

Η λογαριθμική πιθανότητα $\boldsymbol{log-likelihood}$ ή $\boldsymbol{logLik}$ ενός μοντέλου (Myumg, 2003), ορίζεται ως εξής:

$$L = \prod_{x=1}^{n} \binom{l_x}{d_x} {q_x}^{d_x} (1 - q_x)^{l_x - d_x}$$

όπου το πλήθος των θανάτων στην ηλικία x ακολουθεί την διωνυμική κατανομή, η παράμετρος l_x αντιπροσωπεύει τον αριθμό των ατόμων που απειλούνται στην ηλικία των x και q_x αντιπροσωπεύει το αντίστοιχο πραγματικό ποσοστό θνησιμότητας, υποθέτοντας ότι οι θάνατοι στις διάφορες ηλικιακές ομάδες είναι ανεξάρτητοι ο ένας από τον άλλο.

Προκειμένου να εκτιμηθεί η μέγιστη πιθανότητα για τις άγνωστες παραμέτρους (π.χ. των l_x και q_x) του μοντέλου, υπολογίζεται ο φυσικός λογάριθμος του L και η αντίστοιχη μαθηματική μορφή δίνεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$logL = \sum_{x=1}^{n} \left[log \binom{l_x}{d_x} + d_x log q_x + (l_x - d_x) \log (1 - q_x) \right]$$

■

Το στατιστικό κριτήριο $\boldsymbol{R^2_{pseudo}}$ ενός μοντέλου (McFadden, 1977), ορίζεται ως εξής:

$$R^2_{pseudo} = 1 - \frac{ResidualDeviance}{NullDeviance}$$

$$\text{ή } R^2_{McFadden} = 1 - \frac{log(L_c)}{\log (L_{null})}$$

όπου (L_c) υποδηλώνει την (μεγιστοποιημένη) πιθανότητα από το τρέχον μοντέλο προσαρμογής και (L_{null}) υποδηλώνει την αντίστοιχη τιμή, αλλά για το μηδενικό μοντέλο - το μοντέλο που έχει μόνο μία διακοπή / ασυνέχεια και δεν συνεπάγεται άλλες μεταβολές.

Γενικά, κατά την ανάπτυξη πιο σύνθετων μοντέλων είναι συχνά επιθυμητό να αναφέρεται ένα R^2 για το μοντέλο. Η τιμή R^2 είναι ένα στατιστικό μέτρο του πόσο καλά το μοντέλο εξηγεί τα δεδομένα και λαμβάνει τιμές μεταξύ του 0 και του 1, δηλαδή $0 < R^2 < 1$.

Τιμές κοντά στο 1 υποδηλώνουν πως οι επεξηγηματικές μεταβλητές του μοντέλου μας περιγράφουν ικανοποιητικά την εξαρτημένη μεταβλητή, ενώ τιμές κοντά στο 0 υποδηλώνουν το αντίθετο. Είναι δηλαδή ένα παράδειγμα καλής προσαρμογής. Για πολλούς τύπους μοντέλων όμως, το R^2 δεν ορίζεται. Στις περιπτώσεις αυτές γίνεται χρήση του τύπου McFadden και συγκεκριμένα του R^2_{pseudo}.

■

Η ανάγκη της επιλογής των στατιστικά σημαντικών μεταβλητών που θα εισαχθούν τελικά σε ένα μοντέλο, ώστε να περιγράψουν με όσο το δυνατό μεγαλύτερη ακρίβεια το υπό εξέταση χαρακτηριστικό (θνησιμότητα), οδήγησε στη δημιουργία μεθόδων ικανών να ανταποκριθούν στην απαίτηση αυτή. Σε συνδυασμό με την ανάγκη η BGGM κατανομή να χαρακτηρίζεται και από καλή ικανότητα πρόβλεψης για μελλοντικές παρατηρήσεις / επισημάνσεις, αναπτύχθηκαν και χρησιμοποιήθηκαν κατάλληλες μέθοδοι και κριτήρια. Το κοινό χαρακτηριστικό αυτών των μεθόδων είναι ότι επιβάλλουν ένα είδος «ποινής» στη συνάρτηση πιθανοφάνειας με αποτέλεσμα οι συντελεστές των μεταβλητών στο μοντέλο μας να συρρικνώνονται. Το κοινό χαρακτηριστικό και των τεσσάρων στατιστικών κριτηρίων που χρησιμοποιήθηκαν ($AIC, BIC, logLik$ και R^2_{pseudo}) είναι ότι «βελτιώνουν» κατάλληλα το μοντέλο θνησιμότητας (γράφημα 10) προκειμένου να μην εισαχθούν ανεξέλεγκτα πολλές επεξηγηματικές μεταβλητές (Andreopoulos et al., 2020).

Συνοψίζοντας…

Στο κεφάλαιο 4 μελετήθηκαν και αναλύθηκαν οι βασικές στατιστικές ιδιότητες της προτεινόμενης Beta Gompertz Generalized Makeham κατανομής, και διαπιστώθηκε ότι πληροί τις προϋποθέσεις μιας συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας. Η νέα κατανομή τεκμηριώνεται μαθηματικά, με τον έλεγχο των στατιστικών ιδιοτήτων της, κάνοντας κατάλληλη χρήση μεθόδων εκτίμησης των παραμέτρων της και μέσω κριτηρίων ($AIC, BIC, logLik$ και R^2_{pseudo}) επιλογής στατιστικών μοντέλων.

ΚΕΦ.5: Εφαρμογή σε Ελληνικά δεδομένα

Τα χωρικά δεδομένα που έχουν παραχθεί στο παρελθόν, έχουν ψηφιοποιηθεί και επικαιροποιούνται συνεχώς ώστε να αυξηθεί η πληρότητα και η ποιότητά τους. Σήμερα η συλλογή δεδομένων γίνεται με όλο και πιο αυτοματοποιημένο τρόπο (Kalogirou, 2015). Τα παγκόσμια χωρικά δεδομένα πολυεθνικών εταιριών, όπως της Google, γίνονται με δορυφόρους, αεροπλάνα, drones και ειδικά οχήματα που είναι εφοδιασμένα με ειδικές κάμερες και GPS. Επίσης, είναι δυνατή η παγκόσμια συλλογή χωρικών δεδομένων ακόμα και μέσω των κοινωνικών δικτύων (Facebook, Twitter, Instagram, Flickr) στα οποία οι χρήστες εθελοντικά καταχωρούν κείμενα, φωτογραφίες και βίντεο με χωρική αναφορά.

Στο παράρτημα Α της διατριβής, παρουσιάζονται αναλυτικά τα βήματα που ακολουθήθηκαν για την κατασκευή των συναρτήσεων καθώς και για την κάθε ανάλυση των δεδομένων θνησιμότητας ξεχωριστά. Τα πρωτογενή δεδομένα προέρχονται από την ΕΛ.ΣΤΑΤ. και τη Human Mortality Database. Η έρευνα και η ανάλυση των δεδομένων έγιναν κατόπιν επίσημου αιτήματος στις αρμόδιες επιτροπές, ενώ η ανάλυση έλαβε χώρα στο ψηφιακό περιβάλλον της R.

5.1 Εφαρμογή της BGGM κατανομής στη Βόρεια & Νότια Ελλάδα

Εισαγωγή

Όπως έχει ήδη αναφερθεί στις ενότητες 2 και 3, έχουν προταθεί διαφορετικές κατανομές πιθανότητας που προσεγγίζουν το φαινόμενο της ανθρώπινης θνησιμότητας σε συνάρτηση με την ηλικία. Οι πιο συνηθισμένες κατανομές εξ αυτών, των Gompertz και Gompertz - Makeham έχουν τύχει ευρείας αποδοχής και περιγράφουν αρκετά καλά τα δεδομένα θνησιμότητας ως την ηλικία των 60-70 ετών. Δεν δίνουν όμως, τα επιθυμητά αποτελέσματα για μεγάλες (άνω των 70 ετών) και / ή για νεαρές ηλικίες (από 0 έως 30). Για την «βελτίωση» της καλής προσαρμογής των δεδομένων Θνησιμότητας στα πραγματικά αποτελέσματα προτείνεται μια νέα μαθηματική κατανομή (με το όνομα **BGGM**), η οποία προκύπτει από το συνδυασμό των παραπάνω κατανομών με την κατανομή Βήτα (παράγραφος 3.4). Η κατανομή Βήτα έχει επιλεγεί για την ευελιξία της σε διαφορετικά σύνολα δεδομένων. Δοκιμασμένη λοιπόν, για την καλή της προσαρμογή, η BGGM παρουσιάζει υψηλότερη προγνωστική ικανότητα για τους άνδρες και τις γυναίκες, ακόμα και σε υψηλότερες ηλικιακές ομάδες.

Η ανάλυση και κατ΄επέκταση η εφαρμογή βασίζεται σε στοιχεία της φυσικής κίνησης του πληθυσμού που συλλέχθηκαν και παρασχέθηκαν από την ΕΛ.ΣΤΑΤ. για το έτος 2011. Χρησιμοποιήθηκαν στοιχεία απογραφής (δεδομένα πληθυσμού 2011) για τον υπολογισμό του ποσοστού θνησιμότητας με βάση την ηλικία και το φύλο. Πινακοποιήθηκε ο πληθυσμός σε μονοετείς ηλικιακές ομάδες για το έτος 2011 και κατασκευάστηκε ο αντίστοιχος Αδρός Δείκτης Θνησιμότητας (CDR – Crude Death Rate). Σύμφωνα με τα αντίστοιχα ευρήματα, το μοντέλο θνησιμότητας **BGGM** παρουσιάζει ικανοποιητικά αποτελέσματα προσαρμογής (Andreopoulos et al., 2019) ακολουθώντας τα κατάλληλα κριτήρια αξιολόγησης (AIC, BIC).

Το μοντέλο (BGGM) στοχεύει στο να συμβάλει στη παγκόσμια επιστημονική συζήτηση γύρω από τα μοντέλα θνησιμότητας και την καταλληλότητά τους, προτείνοντας μια νέα κατανομή θνησιμότητας με 6 παραμέτρους όπου όπως δείχνουν τα ευρήματα φαίνεται να είναι σε θέση να παρέχει μια καλή προσαρμογή, ειδικά σε προχωρημένες ηλικίες. Παρουσιάζει δηλαδή ένα συγκριτικό πλεονέκτημα στις ηλικίες εκείνες όπου άλλες κατανομές δεν καταφέρνουν να «πιάσουν» την παρατηρούμενη επιβράδυνση (plateau) της θνησιμότητας (Gavrilov και Gavrilova, 1991).

Ιστορικά στοιχεία

Από τα τρία βασικά δημογραφικά φαινόμενα (γονιμότητα, θνησιμότητα, μετανάστευση), η θνησιμότητα ήταν η πρώτη που μελετήθηκε. Οι διαφοροποιήσεις που σχετίζονται με την ηλικία και το φύλο, οι σημαντικές γεωγραφικές διαφοροποιήσεις καθώς και οι χρονικές διακυμάνσεις στα ποσοστά βελτίωσης προσελκύουν το ενδιαφέρον των ερευνητών από διαφορετικούς κλάδους για περισσότερους από τρεις αιώνες. Η πρωτοφανής μείωση της θνησιμότητας που επετεύχθη κατά τον 20^{ο} αιώνα ενίσχυσε το ενδιαφέρον και ενέτεινε τις σχετικές προσπάθειες μοντελοποίησης του φαινομένου. Μείωση της θνησιμότητας σημειώθηκε σε όλες τις ηλικίες, ειδικά στα αρχικά στάδια ζωής. Αυτό το σημαντικό επίτευγμα ήταν υπεύθυνο για την μεγάλη αύξηση του παγκόσμιου πληθυσμού, καθώς και για τη μεταβαλλόμενη ηλικιακή του δομή. Πρόσφατα, το ενδιαφέρον για τις τάσεις και τις προβλέψεις θνησιμότητας έχει ανανεωθεί, καθώς οι υπεύθυνοι για τη χάραξη πολιτικής, οι επιστήμονες της υγείας, οι δημογράφοι και οι οικονομολόγοι κατανοούν την αυξανόμενη σημασία της θνησιμότητας στη διαμόρφωση των μελλοντικών τάσεων, όπως προαναφέρθηκε στο 2^{ο} κεφάλαιο.

Η μακρά ιστορία των μοντέλων θνησιμότητας είναι επακόλουθο του ενδιαφέροντος που παρουσιάζει το φαινόμενο που προσπαθούν να περιγράψουν. Υπάρχει ένας μεγάλος και συνεχώς εξελισσόμενος αριθμός δημοσιεύσεων και ερευνών για τη μοντελοποίηση της θνησιμότητας (για ανασκόπηση των μεθόδων βλέπε Booth and Tickle, 2008). Έχουν διεξαχθεί πολλές εργασίες για την κατασκευή και τη βελτιστοποίηση πιθανών μοντέλων που περιγράφουν τη θνησιμότητα του πληθυσμού. Όλες οι μέθοδοι καταλήγουν στο συμπέρασμα πως μια μαθηματική λειτουργία που περιγράφει επαρκώς τη θνησιμότητα καθ' όλη τη διάρκεια ζωής του ανθρώπου είναι ιδιαίτερα πολύπλοκη. Ένα μαθηματικό μοντέλο που προσεγγίζει αυτή τη λογική είναι αυτό που προτείνουν οι Heligman και Pollard (1980), που βασίζεται, όχι στη δυναμική της θνησιμότητας, αλλά στη σχέση της πιθανότητας θανάτου σε οποιαδήποτε ηλικία με την πιθανότητα να μην πεθάνει σε αυτή την ηλικία. Η κατανομή που προτείνουν έχει 8 παραμέτρους: τρεις από αυτές χρησιμοποιούνται για να καταγράψουν τη μείωση της θνησιμότητας μετά το πρώτο έτος της ζωής και κατά τη διάρκεια της παιδικής ηλικίας. Άλλες δύο παράμετροι περιγράφουν την «περίπτωση ατυχήματος» και οι άλλες δύο έχουν σαφή σύνδεση με τη λειτουργία θνησιμότητας όπως την όρισε ο Gompertz. Τα μοντέλα αυτά κατασκευάζονται χρησιμοποιώντας διάφορες δημογραφικές παραμέτρους όπως ηλικία, φύλο, επίπεδο εκπαίδευσης ή οικογενειακή κατάσταση ως επεξηγηματικές μεταβλητές (Skiadas et al., 2007).

Μεθοδολογία

Η κατασκευή ενός μοντέλου θνησιμότητας (κεφάλαιο 2) που επιχειρεί να αξιολογήσει το πραγματικό πρότυπο θνησιμότητας βασίζεται σε μία από τις ακόλουθες δύο προσεγγίσεις. Η πρώτη προσέγγιση κατασκευάζει έναν πίνακα θνησιμότητας που περιγράφει την πιθανότητα θανάτου ανά ομάδα ηλικιών, ενώ η δεύτερη προσέγγιση περιγράφει το πραγματικό πρότυπο θνησιμότητας χρησιμοποιώντας μια συνάρτηση (πιθανοθεωρητική – BGGM).

Η δεύτερη προσέγγιση βασίζεται στη μέθοδο παραμετρικής εξομάλυνσης που προτάθηκε και μελετήθηκε από τους London, (1985) και Haberman et al., (1998), όπου υιοθετείται μια μαθηματική συνάρτηση για την περιγραφή των αρχικών εκτιμήσεων των ποσοστών θνησιμότητας ή της έντασης θνησιμότητας. Η εξομάλυνση διεξάγεται ρυθμίζοντας είτε μια συνάρτηση σε όλες τις ηλικίες είτε περισσότερες συναρτήσεις σε δεδομένα σταδιακά. Μη-παραμετρικές μέθοδοι εφαρμόζονται σε πίνακες θνησιμότητας συνδυάζοντας δεδομένα σε διαφορετικές τιμές ηλικίας x. Ο κύριος στόχος αυτών των μεθόδων είναι να εξομαλύνουν τις τιμές των πινάκων θνησιμότητας χρησιμοποιώντας μοντέλα θνησιμότητας, που παράγονται με

μεθόδους όπως τα γενικευμένα γραμμικά μοντέλα (GLM) ή οι μέθοδοι με σφήνες (Splines). Για την εκτίμηση των άγνωστων παραμέτρων των μοντέλων προσαρμοσμένων στα αρχικά δεδομένα χρησιμοποιείται η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων (LS) και η μέθοδος μέγιστης πιθανότητας (ML).

Η **Μέθοδος Ελαχίστων τετραγώνων**, που ακολουθήθηκε στην παρούσα εφαρμογή, θεωρεί την αρχική εκτίμηση θνησιμότητας στην ηλικία x να είναι και η τιμή που προσαρμόζεται σε αυτήν την ηλικία. Η επιλογή του κατάλληλου μοντέλου μ_x γίνεται με την προσαρμογή των εκτιμώμενων τιμών ώστε να είναι όσο το δυνατόν πιο κοντά στις παρατηρούμενες τιμές. Προκειμένου να επιτευχθεί η ελαχιστοποίηση της απόστασης μεταξύ των πραγματικών και των εκτιμώμενων τιμών, εφαρμόζεται η μέθοδος των σταθμισμένων ελαχίστων τετραγώνων (Amemiya, 1985), η οποία δίδεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\sum_{x=1}^{n} w_x[\widehat{q_x} - \mu_x]^2$$

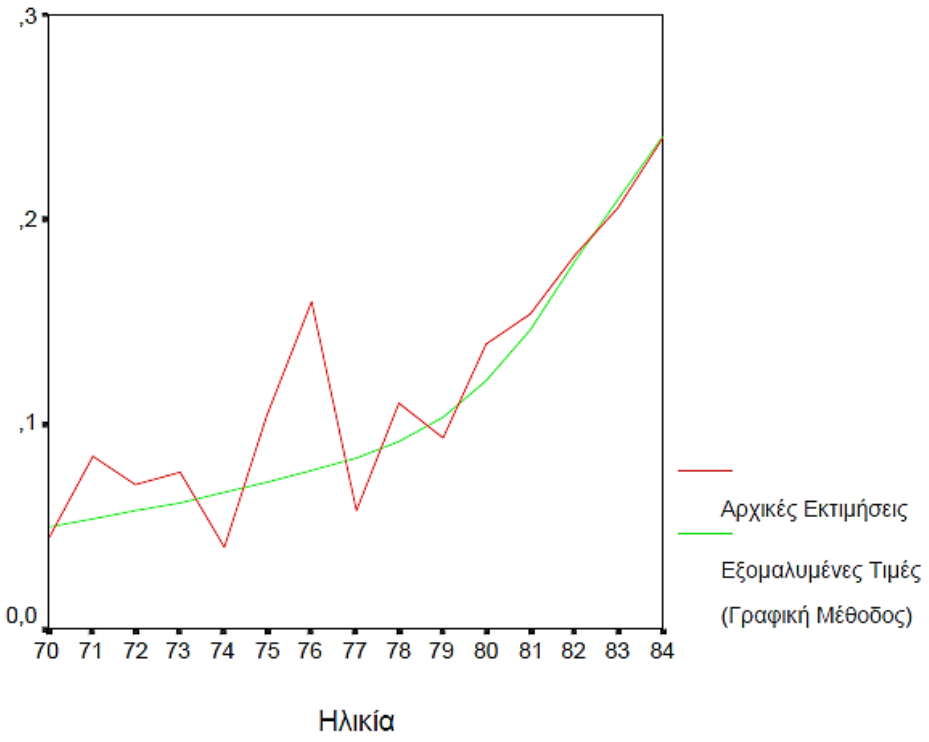
Για την εξομάλυνση των δεδομένων Θνησιμότητας με τη μέθοδο των **Splines**, θα περιγραφεί πολύ συνοπτικά η διαδικασία που ακολουθείται σε αυτές τις περιπτώσεις και θα παρουσιαστεί ο αντίστοιχος κώδικας στην ***R***. Περαιτέρω ανάλυση των μεθόδων των Splines ξεφεύγει από το σκοπό της παρούσας διατριβής. Σκοπός της νέας προτεινόμενης κατανομής (BGGM) είναι να παρουσιάζει καλή προσαρμογή σε διαφορετικά δεδομένα χωρίς τη χρήση επιπλέον μαθηματικών «βοηθημάτων» που θα ομαλοποιήσουν παροδικά το αποτέλεσμα.

Γίνεται άμεσα αντιληπτό, πως τα αριθμητικά δεδομένα του πραγματικού κόσμου είναι συνήθως δύσκολο να αναλυθούν, για το σκοπό αυτό αναπτύχθηκε η ιδέα της κυβικής σφήνας (cubic splines). Περιγράφοντας την μέθοδο αυτή περιγραμματικά, η κεντρική ιδέα είναι η τοποθέτηση μιας σειράς από μοναδικά κυβικά πολυώνυμα (πολυώνυμα υψωμένα εις την 3^{η}) μεταξύ κάθε σημείου δεδομένων (στην περίπτωση των δεδομένων θνησιμότητας το κάθε σημείο είναι η ηλικία), με την προϋπόθεση ότι η καμπύλη που προκύπτει είναι συνεχής και εμφανίζεται ομαλή. Μια γραμμική σφήνα (linear spline) είναι μια συνεχής συνάρτηση που σχηματίζεται από τη σύνδεση γραμμικών τμημάτων (Rorres, 1984). Τα σημεία στα οποία συνδέονται τα τμήματα ονομάζονται "κόμβοι" της σφήνας (knots of spline). Μια σφήνα $D\ \beta\alpha\theta\mu o\acute{\upsilon}$ είναι μια συνάρτηση που σχηματίζεται από τη σύνδεση του πολυωνυμικού τμήματος του $D\ \beta\alpha\theta\mu o\acute{\upsilon}$ έτσι ώστε: α) η διαδικασία να είναι συνεχής, β) η διαδικασία να έχει συνεχόμενα παράγωγα $D-1\ \beta\alpha\theta\mu o\acute{\upsilon}$ και γ) το παράγωγο D^{th} να είναι σταθερό μεταξύ των κόμβων.

Σημειώνεται ότι η διάρκεια ζωής πρέπει να διαχωρίζεται σε υποδιαστήματα ώστε σε κάθε ένα από αυτά τα διαστήματα να προσαρμόζεται ένα διαφορετικό μοντέλο. Αυτή η μέθοδος είναι γνωστή ως εξομάλυνση μέσω της μεθόδου των Splines. Στην εφαρμογή μας πάνω στα ελληνικά δεδομένα, μια συνάρτηση spline είναι η συνάρτηση ηλικίας που δίνει τις εξομαλυνθείσες τιμές. Τα σημεία (knots) είναι αριθμητικά δεδομένα, δηλαδή οι αντίστοιχες ηλικίες. Αυτοί οι συντελεστές είναι που «προσαρμόζουν» τη γραμμή έτσι ώστε να περάσει πάνω από κάθε σημείο δεδομένων (κάθε σημείο είναι ο λογάριθμος της θνησιμότητας – log(Mortality) σε κάθε ηλικία) χωρίς καμία ακανόνιστη συμπεριφορά (στοχαστικό θόρυβο) ή κενά στη συνέχεια της συνάρτησης.

Η μέθοδος των P-splines (Currie et al., 2004) είναι πλέον καλά εδραιωμένη ως μέθοδος εξομάλυνσης σε γενικευμένα γραμμικά μοντέλα (GLMs). Οι Eilers και Marx, (1996) έδειξαν πώς να εξομαλύνουν τα δεδομένα Poisson σε μία διάσταση. Ο χρήστης των P-splines έχει διάφορες επιλογές τροποποίησης των Splines: (α) μπορεί να αλλάξει τον αριθμό των κόμβων, τον βαθμό της P-spline και τη σειρά της ποινής, και (β) επίσης να τροποποιήσει την παράμετρο εξομάλυνσης (παράρτημα A_4, παραδείγματα στην ***R*** με μεθόδους *Spline*).

Η μέθοδος των Splines δεν θα ήταν απαραίτητη αν ήταν απλό να προσδιοριστεί μια καλή προσαρμογή μιας συνάρτησης ώστε να ταιριάζει σε οποιοδήποτε σύνολο δεδομένων. Έτσι, η μέθοδος της παραπάνω τεχνικής χρησιμοποιείται για να δημιουργηθεί μια συνάρτηση η οποία θα κάνει «εφαρμογή» (adapt) στα δεδομένα. Πλήθος μαθηματικών μοντέλων ή νόμων θνησιμότητας μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως εναλλακτικές μέθοδοι για την εξομάλυνση των πινάκων θνησιμότητας. Η μέθοδος spline είναι ένα ισχυρό εργαλείο ανάλυσης δεδομένων και πιο συγκεκριμένα εξομάλυνσης δεδομένων (αντίστοιχο παράδειγμα στο γράφημα 20). Οι splines συσχετίζουν αποτελεσματικά τα δεδομένα, ανεξάρτητα από το πόσο τυχαία τα δεδομένα μπορεί να φαίνονται σε ένα γράφημα. Μόλις παραχθεί ο αλγόριθμος με την παραγωγή των κατάλληλων splines, η αντιστοίχιση των δεδομένων με τη συνάρτηση γίνεται εύκολη (βλέπε παράρτημα A_5, τον κώδικα της θνησιμότητας Natural Spline).



Γράφημα 20. Γραφική παράσταση των αρχικών εκτιμήσεων (κόκκινο) με τις εξομαλυμένες πλέον τιμές (πράσινο) ακολουθώντας μέθοδο Splines. Τα δεδομένα αφορούν άνδρες το 2011 για την Ελλάδα (*πηγή: ΕΛ.ΣΤΑΤ.*)

Τρία **ποσοτικά (στατιστικά) κριτήρια** που αξιολογούν την ισορροπία ανάμεσα στην καλή προσαρμογή και την ομαλότητα, όπως το κριτήριο πληροφοριών Akaike (**AIC**), το κριτήριο πληροφοριών Bayes (**BIC**) και η λογαριθμική πιθανοφάνεια (**Loglik**) (Cairns, 2000) επελέγησαν για τα εφαρμοσμένα μοντέλα θνησιμότητας σε αυτή την έρευνα.

Το στατιστικό κριτήριο $\boldsymbol{AIC}$ ενός μοντέλου, ορίζεται ως εξής:

$$AIC = 2k - 2\ln(L)$$

όπου $ln(L)$ είναι η μέγιστη πιθανοφάνεια καταγραφής του μοντέλου και k είναι ο αριθμός των ελεύθερων παραμέτρων του μοντέλου. Τα μοντέλα με τη χαμηλότερη τιμή AIC προτιμώνται έναντι εκείνων με μεγαλύτερη τιμή AIC.

Το στατιστικό κριτήριο $\boldsymbol{BIC}$ ενός μοντέλου, ορίζεται ως εξής:

$$BIC = -2\ln(L) + k\ln(n)$$

όπου $ln(L)$ είναι η μέγιστη πιθανοφάνεια καταγραφής του μοντέλου, η παράμετρος n αντιστοιχεί στο μέγεθος του δείγματος και k είναι ο αριθμός των ελεύθερων παραμέτρων του μοντέλου.

Η λογαριθμική πιθανότητα $\boldsymbol{log-likelihood}$ ή $\boldsymbol{logLik}$ ενός μοντέλου (Myumg, 2003), ορίζεται ως εξής:

$$L = \prod_{x=1}^{n} \binom{l_x}{d_x} {q_x}^{d_x} (1-q_x)^{l_x - d_x}$$

όπου το πλήθος των θανάτων στην ηλικία x ακολουθεί την διωνυμική κατανομή, η παράμετρος l_x αντιπροσωπεύει τον αριθμό των ατόμων που απειλούνται στην ηλικία των x και q_x αντιπροσωπεύει το αντίστοιχο πραγματικό ποσοστό θνησιμότητας, υποθέτοντας ότι οι θάνατοι στις διάφορες ηλικιακές ομάδες είναι ανεξάρτητοι ο ένας από τον άλλο.

Στην παράγραφο 4.4 της παρούσης διατριβής, παρουσιάστηκαν αναλυτικά οι παραπάνω τρεις στατιστικές μέθοδοι.

Επιλογή κατάλληλου μοντέλου Θνησιμότητας

Στο κεφάλαιο 2, παρουσιάστηκε αναλυτικά η πορεία και η εξέλιξη των μοντέλων θνησιμότητας διεθνώς και στην παράγραφο 3.4 παρουσιάστηκε η προτεινόμενη Beta Gompertz Generalized Makeham distribution (BGGM).

Beta Gompertz Generalized Makeham distribution (BGGM)

$$f_{BGGM}(x) = \frac{(\theta e^{\xi x} + \lambda + \kappa x) e^{-\lambda x - \frac{\theta}{\xi}(e^{\xi x}-1)}}{B(\alpha,\beta)} \cdot \left[(1 - e^{-\frac{\kappa}{\lambda}x^2 - \lambda x - \frac{\theta}{\xi}(e^{\xi x}-1)}) \right]^{\alpha-1} \cdot \left[\left(e^{-\frac{\kappa}{\lambda}x^2 - \lambda x - \frac{\theta}{\xi}(e^{\xi x}-1)} \right) \right]^{\beta-1}$$

$$\theta, \xi, \lambda, \kappa, \alpha, \beta > 0, x \geq 0$$

Η παραπάνω κατανομή αποτελεί παράγωγο της μίξης της γενικευμένης Βήτα κατανομής με το γενικευμένο νόμο θνησιμότητας Gompertz-Makeham.

Εφαρμογή σε Ελληνικά δεδομένα θνησιμότητας

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζεται η εφαρμογή της προτεινόμενης συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας (BGGM) σε πραγματικά δεδομένα που αφορούν την Βόρεια και Νότια Ελλάδα, το έτος 2011 και για τα δύο φύλα. Η ανάλυση στηρίζεται στα στατιστικά στοιχεία θνησιμότητας κατά ηλικία, φύλο και αιτία θανάτου, όπως παρέχονται ετησίως από την Ελληνική Στατιστική Αρχή (EL.STAT., 2015). Τα στοιχεία ως προς την ηλικία και το φύλο για τον πληθυσμό, βάσει της Απογραφής του Πληθυσμού του 2011, παρέχονται επίσης από την ΕΛ.ΣΤΑΤ. Η μαθηματική μοντελοποίηση (Team, 2013) των παραπάνω συναρτήσεων κατανομών, έγινε με χρήση του ανοιχτού κώδικα R (www.r-project.org) και τα πακέτα των αλγορίθμων σε επίπεδο

βασικών κατανομών χρησιμοποιήθηκαν από την ψηφιακή βιβλιοθήκη του CRAN (Comprehensive R Archive) http://cran.r-project.org. Περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τον τρόπο κατασκευής του αλγορίθμου παρατίθενται στα παραρτήματα A_4 και A_5.

Υπολογίζονται τα πραγματικά ποσοστά θνησιμότητας που είναι διαθέσιμα σε μορφή πίνακα που ονομάζεται πίνακας θνησιμότητας (Ahmad et al., 2001). Ένας πίνακας θνησιμότητας είναι μια σειρά από πιθανότητες θανάτου $q_x, q_{x+1}, \dots, q_{\omega+1}$ ξεκινώντας από την αρχική ηλικία 0 και φτάνοντας μέχρι ένα ανώτατο όριο θεωρητικής βιολογικής ηλικίας (ετησίως, μηνιαίως ή εβδομαδιαίως) ω όπου κανένα άτομο δεν μπορεί θεωρητικά να επιβιώσει και q_x είναι η πιθανότητα ενός ατόμου ηλικίας x να πεθάνει στο χρονικό διάστημα $[x, x+1)$ για $x = a, a+1, \dots, \omega-1$. Η αντίστοιχη πιθανότητα ενός ατόμου ηλικίας x να πεθάνει σε αυτό το διάστημα δίνεται από τη σχέση:

$$q_x = \frac{d_x}{l_x}$$

όπου d_x αντιστοιχεί στον αριθμό των θανούντων στο ηλικιακό διάστημα $[x, x+1)$ και δίνεται αντίστοιχα από τη σχέση $d_x = l_x - l_{x+1}$, όπου l_x είναι το πλήθος των ατόμων που ζουν στην ηλικία των x. Οι πίνακες θνησιμότητας χρησιμοποιούνται στην καθημερινή μας ζωή για την ανάλυση της θνησιμότητας των πληθυσμών και την εκτίμηση του αντίστοιχου δείκτη θνησιμότητας (CDR) ή άλλων δεικτών ποικίλου ερευνητικού ενδιαφέροντος.

Στους πίνακες Θνησιμότητας περιλαμβάνονται δείκτες (Elandt-Johnson et al., 1980) όπως είναι τα l_x, d_x, q_x, p_x για $x = 1,2,\dots,\omega$, όπου p_x εκφράζει την πιθανότητα επιβίωσης ενός ατόμου ηλικίας x τουλάχιστον κατά το διάστημα $[x, x+1)$. Με την επέκταση του προηγούμενου ορισμού, η πιθανότητα ενός ατόμου ηλικίας x να επιβιώσει σε επιπλέον έτη, δίνεται από τη σχέση:

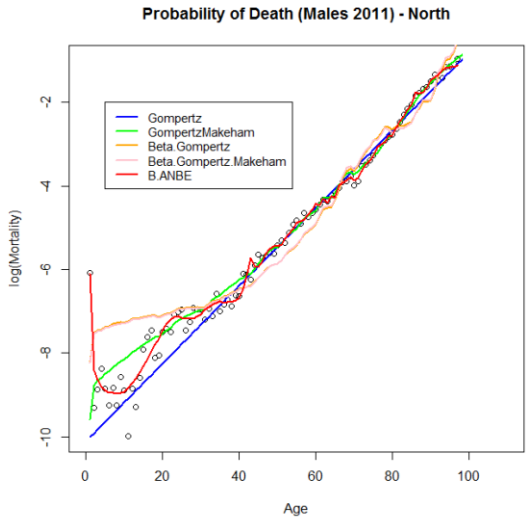
$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

Σύμφωνα με τον London (1985), σε μία ανάλυση δεδομένων θνησιμότητας πρέπει να γίνει μια μορφή εξομάλυνσης προκειμένου να ληφθούν υπόψη τα πραγματικά ποσοστά θνησιμότητας, έχοντας ως υποθέσεις εργασίας ότι το πραγματικό πρότυπο θνησιμότητας είναι (α) ομαλό, (β) μονότονο και (γ) κυρτό.

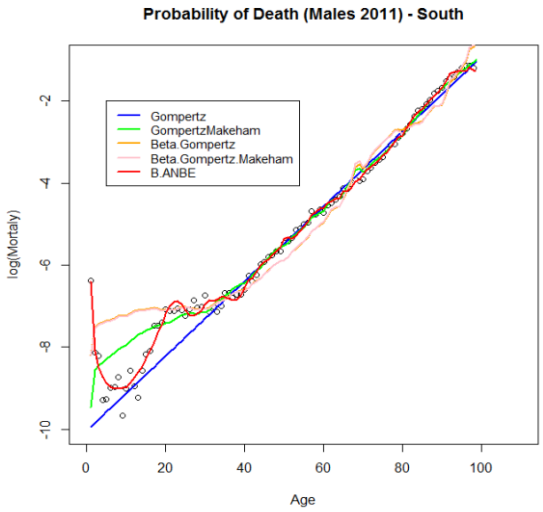
Η παραπάνω ανάλυση επιχειρεί μια απευθείας σύγκριση της νέας προτεινόμενης κατανομής θνησιμότητας (BGGM) με τις πιο συχνά χρησιμοποιούμενες κατανομές, δηλαδή με τις Gompertz, Gompertz - Makeham, Beta - Gompertz και Beta - Gompertz - Makeham. Στα

επόμενα γραφήματα (21^{α}, 21^{β}, 22^{α}, 22^{β}), τα παραπάνω μοντέλα θνησιμότητας παρουσιάζονται σε σχέση με τις κατανομές που χρησιμοποιήθηκαν, καθώς και με βάση το φύλο και την περιοχή (Βόρεια και Νότια Ελλάδα, για το έτος 2011). Η κόκκινη γραμμή αντιστοιχεί στο προτεινόμενο μοντέλο **BGGM** (ή B.ANBE κατανομή, ήταν το όνομα με το οποίο δημοσιεύθηκε στο Communications in Statistics, Theory and Methods το 2018) όπου φαίνεται να προσαρμόζεται καλύτερα στα πραγματικά δεδομένα, τόσο για τους άνδρες όσο και για τις γυναίκες, καθώς και για την περιοχή της βόρειας και της νότιας Ελλάδας.

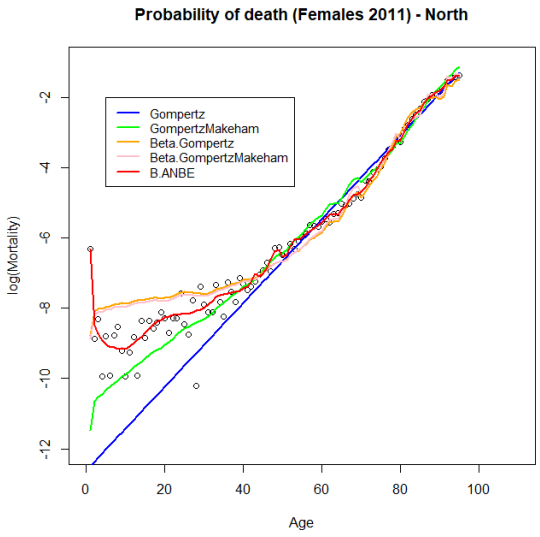
Γραφική απεικόνιση πιθανότητας θανάτου για τη Βόρεια και Νότια Ελλάδα πάνω σε στοιχεία θνησιμότητας του 2011. Πηγή δεδομένων: ΕΛ.ΣΤΑΤ.



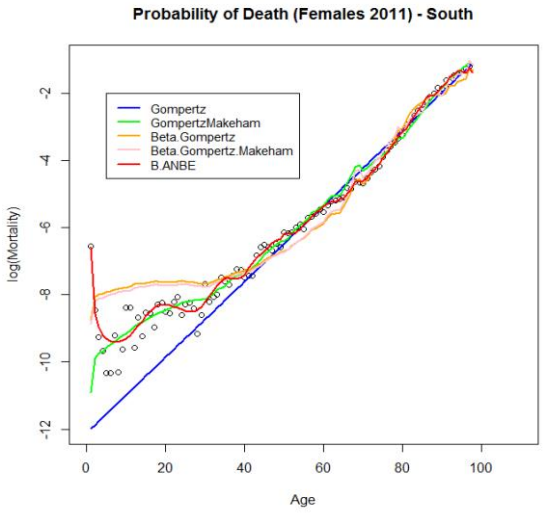
Γράφημα 21α: Η BGGM (ή B.ANBE) κατανομή για άνδρες το 2011. Αφορά δεδομένα Θνησιμότητας της Βόρειας Ελλάδας.



Γράφημα 21β: Η BGGM (ή B.ANBE) κατανομή για άνδρες το 2011. Αφορά δεδομένα Θνησιμότητας της Νότιας Ελλάδας.



Γράφημα 22α: Η BGGM (ή B.ANBE) κατανομή για γυναίκες το 2011. Αφορά δεδομένα Θνησιμότητας της Βόρειας Ελλάδας.



Γράφημα 22β: Η BGGM (ή B.ANBE) κατανομή για γυναίκες το 2011. Αφορά δεδομένα Θνησιμότητας της Νότιας Ελλάδας.

Άνδρες Βόρεια Ελλάδα Έτος 2011	Mortality Models	Log-likelihood	AIC	BIC
	Gompertz	-993.293	1990.586	1995.796
	Gompertz Makeham	-732.300	1470.602	1478.417
	Beta Gompertz	-541.897	1091.795	1102.215
	Beta Gompertz Makeham	-541.761	1090.515	1100.541
	BGGM	**-428.473**	**910.946**	**981.286**

Πίνακας 5. Στατιστικά κριτήρια καλής προσαρμογής για το κάθε μοντέλο Θνησιμότητας. Άνδρες, Βόρεια Ελλάδα

Άνδρες Νότια Ελλάδα Έτος 2011	Mortality Models	Log-likelihood	AIC	BIC
	Gompertz	-1045.399	2094.797	2100.007
	Gompertz Makeham	-771.433	1548.867	1556.683
	Beta Gompertz	-573.462	1154.926	1165.347
	Beta Gompertz Makeham	-573.365	1154.884	1165.145
	BGGM	**-437.861**	**929.722**	**1000.062**

Πίνακας 6. Στατιστικά κριτήρια καλής προσαρμογής για το κάθε μοντέλο Θνησιμότητας. Άνδρες, Νότια Ελλάδα

Γυναίκες Βόρεια Ελλάδα Έτος 2011	Mortality Models	Log-likelihood	AIC	BIC
	Gompertz	-1374.538	2753.076	2758.286
	Gompertz Makeham	-1110.262	2226.524	2234.340
	Beta Gompertz	-487.906	983.813	994.234
	Beta Gompertz Makeham	-486.886	983.772	993.798
	BGGM	**-408.019**	**870.039**	**940.378**

Πίνακας 7. Στατιστικά κριτήρια καλής προσαρμογής για το κάθε μοντέλο Θνησιμότητας. Γυναίκες, Βόρεια Ελλάδα

Γυναίκες Νότια Ελλάδα Έτος 2011	Mortality Models	Log-likelihood	AIC	BIC
	Gompertz	-1714.439	3432.877	3438.088
	Gompertz Makeham	-1316.386	2638.773	2646.588
	Beta Gompertz	-534.007	1076.014	1087.109
	Beta Gompertz Makeham	-532.041	1074.083	1086.435
	BGGM	**-439.235**	**932.470**	**1002.81**

Πίνακας 8. Στατιστικά κριτήρια καλής προσαρμογής για το κάθε μοντέλο Θνησιμότητας. Γυναίκες, Νότια Ελλάδα

Στους παραπάνω πίνακες 5 έως 8, παρουσιάζονται τα κατάλληλα στατιστικά μέτρα όπως η λογαριθμική πιθανοφάνεια, το AIC και το BIC για καθένα από τα προαναφερθέντα μοντέλα, τόσο για τα δύο φύλα, όσο και για τις δύο μεγάλες γεωγραφικές περιοχές, Βόρεια (Θράκη, Μακεδονία, Ήπειρος) και Νότια Ελλάδα (Θεσσαλία, Κεντρική Ελλάδα, Πελοπόννησος, Κρήτη).

Το προτεινόμενο μοντέλο (Andreopoulos et al., 2018), δηλαδή η BGGM κατανομή επιτυγχάνει τη χαμηλότερη τιμή στα στατιστικά κριτήρια που χρησιμοποιήθηκαν. Ένας περιορισμός όμως αυτής της μελέτης είναι ότι συγκρίνονται μοντέλα με διαφορετικό αριθμό παραμέτρων, παραδοχή η οποία και αναλύεται στις επόμενες παραγράφους της διατριβής.

Αποτελέσματα - Συμπεράσματα

Το προτεινόμενο μοντέλο, που ονομάζεται "κατανομή BGGM", εφαρμόστηκε στα ελληνικά δεδομένα θνησιμότητας και φάνηκε ότι προσφέρει μια καλύτερη προσέγγιση των πραγματικών δεδομένων θνησιμότητας, σε σχέση με τους άλλους νόμους θνησιμότητας που συγκρίθηκε, τόσο για άνδρες όσο και για γυναίκες, καθώς και για τις περιοχές του Βορρά και του Νότου. Ένα επιπλέον σημείο που πρέπει να τονιστεί για την BGGM κατανομή είναι ότι εφαρμόζεται (goodness of fit) πολύ καλά σε ηλικίες άνω των 85 έως 90+, όπου όλες οι άλλες κατανομές αδυνατούν να ακολουθήσουν την καθοδική τάση της πραγματικής θνησιμότητας.

Τα ποσοστά θνησιμότητας μειώνονται αμέσως μετά την ολοκλήρωση του πρώτου έτους ζωής και παραμένουν σε πολύ χαμηλά επίπεδα για παιδιά ηλικίας 5 έως 10 ετών (γραφήματα 21^{α} ως 22^{β}). Στη συνέχεια αυξάνονται απότομα κατά την εφηβεία και παραμένουν σταθερά ως την ενηλικίωση. Μετά την ηλικία των 30 ετών η θνησιμότητα αυξάνεται εκθετικά μέχρι τα τέλη της δεκαετίας των '80. Στην παγκόσμια επιστημονική κοινότητα, εξακολουθεί να υπάρχει ανοικτή συζήτηση σχετικά με το ποια κατανομή ή ποιος νόμος θνησιμότητας εφαρμόζεται καλύτερα στις διάφορες ηλικιακές ομάδες. Ωστόσο, η δυνατότητα ακριβών εκτιμήσεων της θνησιμότητας σε μεγάλες και πολύ μεγάλες ηλικίες, όταν παρατηρούνται αποκλίσεις από την εκθετική πορεία, είναι καθοριστική για τη βελτίωση των προβολών του μεγέθους του πληθυσμού και της ηλικιακής κατανομής. Σε σύγκριση με τις τρεις διαφορετικές κατανομές που δοκιμάζονται εδώ, η **Beta Gompertz Generalized Makeham** πληροί καλύτερα όλα τα βασικά κριτήρια ευελιξίας. Αν και αυτό το πλεονέκτημα μπορεί να αντισταθμιστεί εν μέρει από τον μεγαλύτερο αριθμό παραμέτρων που ενσωματώνονται σε αυτό το μοντέλο, η σημασία του δεν πρέπει να υποβαθμίζεται. Η αναγνώριση ενός μοντέλου που ταιριάζει καλύτερα στην δυναμική

της θνησιμότητας σε μεγαλύτερες ηλικίες έχει μεγάλη σημασία στις χώρες χαμηλής θνησιμότητας, όπου η μακροζωία είναι η κύρια κινητήρια δύναμη πίσω από τις τάσεις θνησιμότητας. Επιπλέον, η μεγαλύτερη ακρίβεια στην πρόβλεψη του μεγέθους του πληθυσμού των μεγαλύτερων ηλικιακών ομάδων είναι σημαντική όχι μόνο στη δημογραφία αλλά και στη δημόσια οικονομία καθώς και στην αναλογιστική επιστήμη.

Η εφαρμογή σε πραγματικά δεδομένα έδειξε τα πλεονεκτήματα της συνάρτησης πιθανοτήτων BGGM σε έναν ανθρώπινο πληθυσμό. Αυτό το μοντέλο συγκρίθηκε με μια σειρά άλλων παραμετρικών μοντέλων που χρησιμοποιήθηκαν για την προσαρμογή των πραγματικών δεδομένων θνησιμότητας. Διαπιστώθηκε ότι το προτεινόμενο μοντέλο έχει συγκριτικά πλεονεκτήματα σε σχέση με άλλα μοντέλα, καθώς έχει την ευελιξία να προσαρμόζεται σε διαφορετικά σύνολα δεδομένων (άνδρες – γυναίκες) και ως εκ τούτου παρέχει την καλύτερη προσαρμογή στα δεδομένα θνησιμότητας για όλη τη διάρκεια ζωής καθώς και για μεγαλύτερες ηλικίες.

Η μαθηματική μοντελοποίηση των παραπάνω συναρτήσεων κατανομών, έγινε με χρήση του ανοιχτού κώδικα R (www.r-project.org), ενώ ο αντίστοιχος κώδικας που κατασκευάστηκε για την εξαγωγή των αποτελεσμάτων (πίνακες 5 έως 8) και των αντίστοιχων γραφημάτων 21^{α} έως 22^{β} βρίσκεται στο παράρτημα A_6. Στο παράρτημα A_6 παρουσιάζεται ο αλγόριθμος για τους άνδρες με τα αντίστοιχα δεδομένα, όπως πάρθηκαν από την ΕΛ.ΣΤΑΤ. Αφορούν την Βόρεια Ελλάδα για το έτος 2011. Ομοίως έγινε και η ανάλυση για τις άλλες τρεις περιπτώσεις.

5.2 Εφαρμογή της BGGM σε δεδομένα θνησιμότητας 13 ετών: 2001-13

Εισαγωγή

Η εφαρμογή αυτή αποτελεί μια περιγραφική αποτύπωση της θνησιμότητας του πληθυσμού των τελευταίων 13 ετών στην Ελλάδα στις αρχές του 21ου αιώνα. Στόχος είναι να αποτυπωθούν οι τάσεις στους δείκτες θνησιμότητας των συγκεκριμένων ηλικιών, να εκτιμηθεί η επίδραση των επί μέρους ηλικιακών ομάδων στη διαμόρφωση του προσδόκιμου ζωής και να εντοπιστούν ενδεχόμενες αξιόλογες διαφορές μεταξύ των δύο φύλων. Η αξιολόγηση της προσαρμογής των μοντέλων έγινε με χρήση γνωστών μέτρων προσαρμογής (AIC, BIC, log – likelihood και R^2_{pseudo}) τα οποία παρουσιάστηκαν και αναλύθηκαν στην παράγραφο 4.4 και στη παράγραφο 5.1 της παρούσας διατριβής. Τα αποτελέσματα δίνουν προβάδισμα στο νέο μοντέλο έχοντας συνολικά καλύτερη προσαρμογή στα δεδομένα σε σχέση με τα παραδοσιακά (όπως είναι των Gompertz - Makeham).

Ιστορικά στοιχεία

Η μοντελοποίηση της θνησιμότητας χρονολογείται από το δεύτερο μισό του 18^{ου} αιώνα, με την πρόγνωση / πρόβλεψη του φαινομένου να αποτελεί πρόσφατη προσπάθεια. Μόλις πριν από τρεις δεκαετίες, οι χρησιμοποιούμενες μέθοδοι ήταν σχετικά απλές και είχαν έναν βαθμό υποκειμενικότητας (Pollard, 1987). Στη *δημογραφία* καθώς και στις ιατρικές επιστήμες, η ανάλυση της θνησιμότητας χρησιμοποιείται για να περιγράψει το προσδόκιμο ζωής των πληθυσμών και να διερευνήσει τα βιολογικά όρια της ανθρώπινης ζωής. Η θνησιμότητα είναι ένα βιολογικό φαινόμενο με πολλές κοινωνικές και οικονομικές προεκτάσεις. Συγκεκριμένα, η μελέτη της θνησιμότητας είναι απαραίτητη για την εκτίμηση του επιπέδου υγείας του πληθυσμού και τη διαμόρφωση της πολιτικής δημόσιας υγείας. Η μελέτη της θνησιμότητας, σε συνδυασμό με τη μελέτη της αναπαραγωγικότητας, αποτελεί τη βάση για την εκτίμηση του μεγέθους του πληθυσμού στο μέλλον, στοιχείων που είναι απαραίτητα για τη διαμόρφωση της πολιτικής, κοινωνικής και οικονομικής ανάπτυξης μιας χώρας.

Η στατιστική με την κατασκευή πιθανοθεωρητικών μοντέλων θνησιμότητας που περιγράφουν το αντίστοιχο πρότυπο πραγματικής θνησιμότητας θα μπορούσε να συμβάλλει στον σχεδιασμό ενός συστήματος δημόσιας υγείας και συνταξιοδότησης μιας χώρας. Οι δημογράφοι έχουν κάνει όλο και συχνότερα χρήση τέτοιων ή παρόμοιων τυποποιημένων στατιστικών μεθόδων. Στην παρούσα έρευνα, πραγματοποιήθηκαν αναλύσεις για 13 χρόνια

από το 2001-13, οι οποίες αφορούν την Ελλάδα, αλλά το αντικείμενο της έρευνας αυτής είναι κυρίως μεθοδολογικό. Η έρευνα επικεντρώνεται στην εφαρμογή του νέου μοντέλου θνησιμότητας BGGM σε διαφορετικά σύνολα δεδομένων από διαφορετικές χρονιές με περιορισμένο χρονικό εύρος. Το μοντέλο φαίνεται να παρέχει κι εδώ καλύτερη προσαρμογή, ειδικά σε μεγαλύτερες ηλικίες. Σε αντίθεση με το μοντέλο των Gompertz – Makeham όπου μέσω των κατάλληλων στατιστικών κριτηρίων ευελιξίας (AIC, BIC, log – likelihood και R^2_{pseudo}) φαίνεται ότι πράγματι η **Beta Gompertz Generalized Makeham** (BGGM) κατανομή εμφανίζει συγκριτικό πλεονέκτημα, τόσο για άνδρες όσο και για γυναίκες σε όλο το ηλικιακό εύρος.

Μεθοδολογία

Υπάρχουν δύο βασικές μέθοδοι για την κατασκευή ενός μοντέλου θνησιμότητας που επιχειρεί να περιγράψει και να αξιολογήσει το πραγματικό πρότυπο θνησιμότητας (βλέπε παράγραφο $1.2.2_{\beta}$): Η *μη παραμετρική* μέθοδος, με την οποία κατασκευάζεται ένας πίνακας θνησιμότητας που περιγράφει τον λόγο θνησιμότητας ανά ομάδες ηλικιών, και η *παραμετρική* μέθοδος, η οποία περιγράφει το πραγματικό πρότυπο θνησιμότητας χρησιμοποιώντας μια συνάρτηση (probalistic). Η δεύτερη προσέγγιση που εξετάζεται, είναι μια μέθοδος παραμετρικής εξομάλυνσης από τους London, (1985) και Haberman (1998), όπου υιοθετείται μια μαθηματική συνάρτηση σε όλο το εύρος των ηλικιών για την περιγραφή των αρχικών εκτιμήσεων των ποσοστών θνησιμότητας ή της έντασης θνησιμότητας, που υπάρχει μεταξύ τους.

Εφαρμογή σε Ελληνικά δεδομένα θνησιμότητας από το 2001 έως και το 2013

Η ανάλυση βασίζεται σε στατιστικά στοιχεία θνησιμότητας στην Ελλάδα κατά ηλικία, φύλο και αιτία θανάτου, όπως παρέχεται ετησίως από την Ελληνική Στατιστική Αρχή (EL.STAT., 2016). Συγκρίνεται η προτεινόμενη κατανομή BGGM με την ήδη γνωστή κατανομή των Gompertz - Makeham. Στους παρακάτω πίνακες 9 και 10 παρουσιάζονται για κάθε ένα από τα προαναφερθέντα μοντέλα τα στατιστικά μέτρα αξιολόγησης. Συγκεκριμένα τα AIC, BIC, log – likelihood και R^2_{pseudo} και για τα δύο φύλα για τα έτη 2001 έως και το 2013. Στο γράφημα 23, παρουσιάζονται οι αντίστοιχες γραφικές απεικονίσεις των δεδομένων θνησιμότητας για κάθε έτος ξεχωριστά, τόσο για άνδρες όσο και για γυναίκες.

Males 2001 – 2013 Statistical Criteria Goodness of fit								
		2001	**2002**	**2003**	**2004**	**2005**	**2006**	**2007**
AIC	**BGGM**	1077.3	1103.5	1091.6	1096.8	1086.3	1101.9	1096.4
	GM	4717.7	4749.7	3688.8	3605.0	3521.0	3384.9	3384.4
BIC	**BGGM**	1092.4	1118.6	1106.6	1111.8	1101.4	1116.9	1111.5
	GM	4725.2	4757.2	3696.3	3612.6	3528.6	3392.5	3391.9
logLik	**BGGM**	-532.6	-545.7	-539.8	-542.4	-537.1	-544.9	-542.2
	GM	-2355.8	-2371.8	-1841.4	-1799.5	-1757.5	-1689.4	-1689.2
R^2_{pseudo}	**BGGM**	0.9952	0.9937	0.9945	0.9940	0.9947	0.9936	0.9939
	GM	0.9811	0.9821	0.9867	0.9868	0.9870	0.9875	0.9875
		2008	**2009**	**2010**	**2011**	**2012**	**2013**	
AIC	**BGGM**	1111.2	1079.6	1099.4	1107.0	1088.6	1101.3	
	GM	2887.4	3307.2	3412.8	3069.8	2953.8	3567.1	
BIC	**BGGM**	1126.2	1094.6	1114.5	1122.0	1103.6	1116.4	
	GM	2895.0	3314.8	3420.3	3077.4	2961.3	3574.6	
logLik	**BGGM**	-549.6	-533.8	-543.7	-547.5	-538.3	-544.6	
	GM	-1440.7	-1650.6	-1703.4	-1531.9	-1473.9	-1780.5	
R^2_{pseudo}	**BGGM**	0.9929	0.9949	0.9937	0.9932	0.9944	0.9934	
	GM	0.9897	0.9875	0.9870	0.9886	0.9893	0.9860	

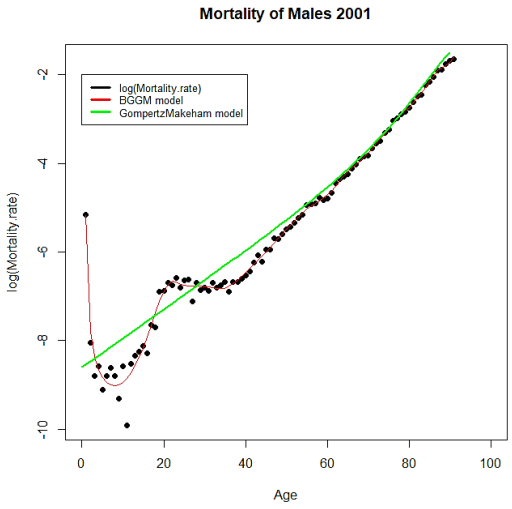
Πίνακας 9. Στατιστικά κριτήρια καλής προσαρμογής AIC, BIC, log – likelihood και R^2_{pseudo} για τα δύο μοντέλα Θνησιμότητας BGGM και GM. Αφορά θνησιμότητα ανδρών για τα έτη 2001 ως 2013, Ελλάδα.

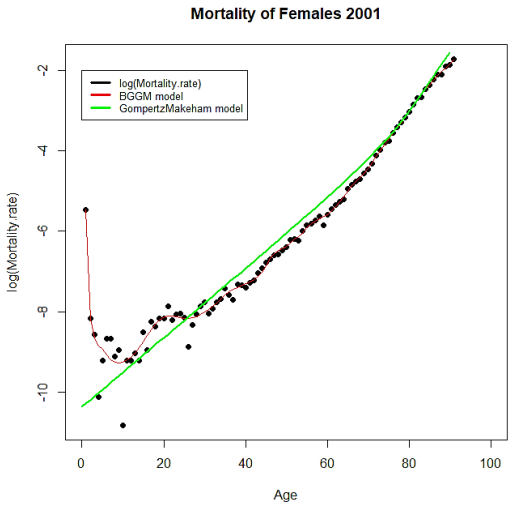
Females 2001 – 2013 Statistical Criteria Goodness of fit								
		2001	**2002**	**2003**	**2004**	**2005**	**2006**	**2007**
AIC	**BGGM**	1094.6	1095.4	1090.5	1081.1	1194.7	1100.8	1191.2
	GM	5753.6	5639.9	4858.2	5238.3	5260.8	5061.3	4756.1
BIC	**BGGM**	1109.7	1110.5	1105.5	1096.2	1209.8	1115.9	1206.3
	GM	5761.2	5647.4	4865.7	5245.9	1090.0	5068.8	4763.6
logLik	**BGGM**	-541.3	-541.7	-539.2	-534.5	-591.3	-544.4	-589.6
	GM	-2873.8	-2816.9	-2426.1	-2616.1	-2627.4	-2527.6	-2375.0
R^2_{pseudo}	**BGGM**	0.9957	0.9958	0.9961	0.9963	0.9873	0.9955	0.9882
	GM	0.9789	0.9796	0.9830	0.9808	0.9805	0.9813	0.9829
		2008	**2009**	**2010**	**2011**	**2012**	**2013**	
AIC	**BGGM**	1107.7	1100.3	1122.4	1078.0	1065.9	1064.3	
	GM	3906.1	4687.5	4951.6	4951.6	3843.0	4196.0	
BIC	**BGGM**	1122.8	1115.3	1137.4	1092.1	1081.0	1079.3	
	GM	3913.6	4695.1	4959.1	4959.1	3850.5	4203.5	
logLik	**BGGM**	-547.8	-544.1	-555.2	-555.2	-534.0	-539.1	
	GM	-1950.0	-2340.7	-2472.8	-2472.8	-1918.5	-2095.0	
R^2_{pseudo}	**BGGM**	0.9952	0.9954	0.9943	0.9944	0.9965	0.9959	
	GM	0.9862	0.9823	0.9814	0.9814	0.9864	0.9841	

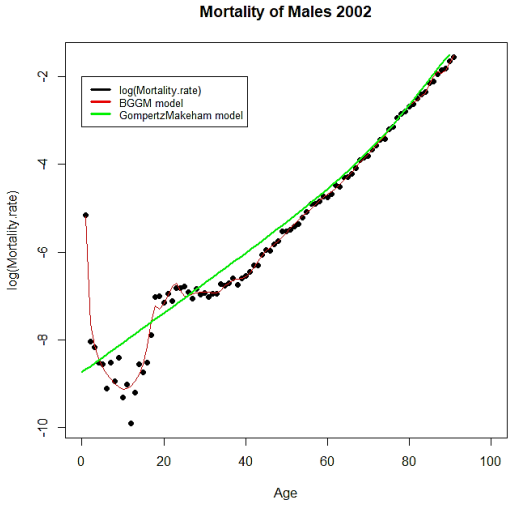
Πίνακας 10. Στατιστικά κριτήρια καλής προσαρμογής AIC, BIC, log – likelihood και R^2_{pseudo} για τα δύο μοντέλα Θνησιμότητας BGGM και GM. Αφορά θνησιμότητα γυναικών για τα έτη 2001 ως 2013, Ελλάδα.

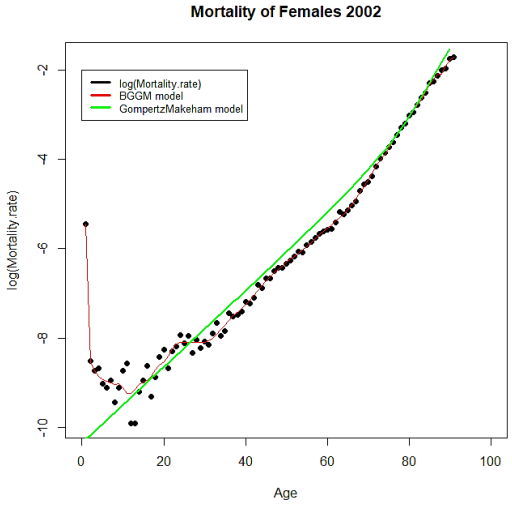
Γραφική απεικόνιση του λογαρίθμου θνησιμότητας για τα έτη 2001 έως 2013 της Ελλάδας.

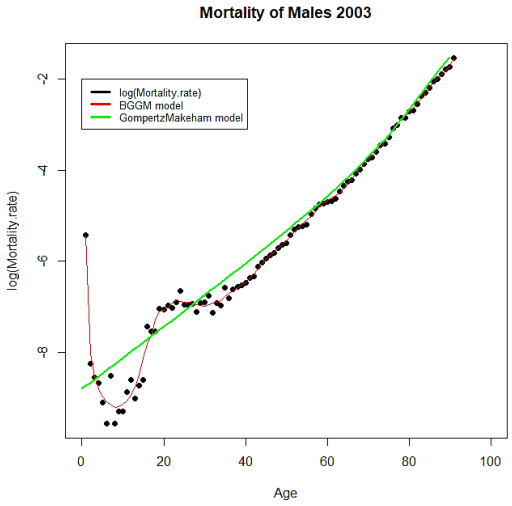
Πηγή δεδομένων: ΕΛ.ΣΤΑΤ.

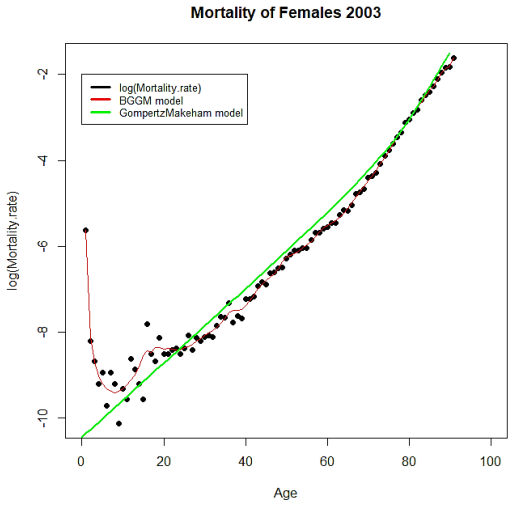


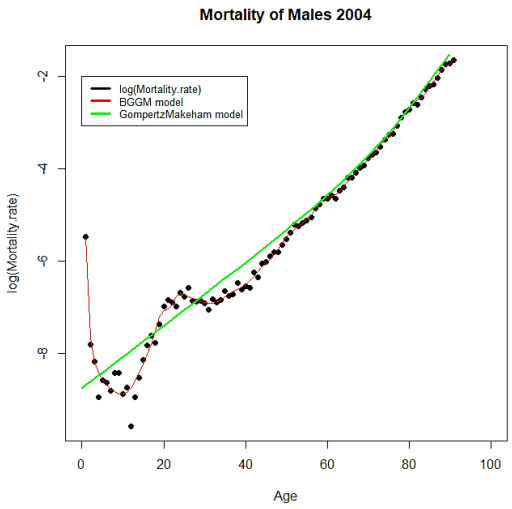


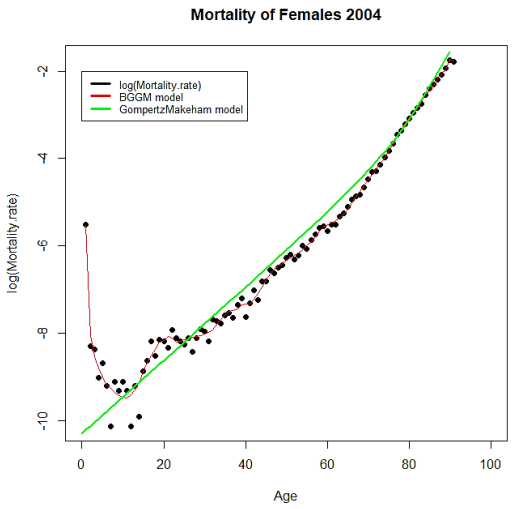


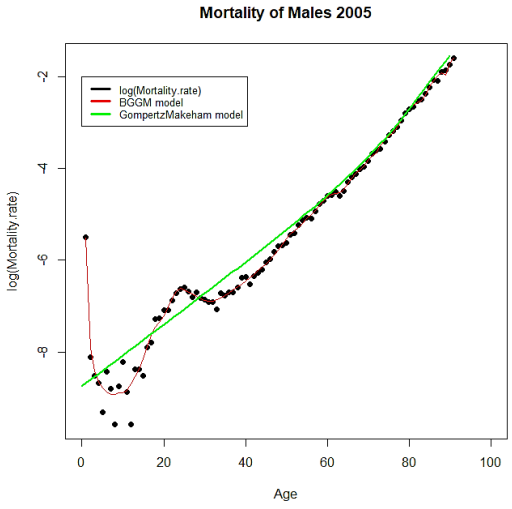


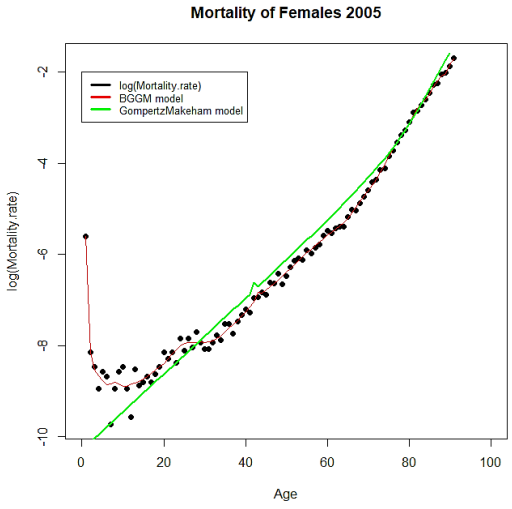


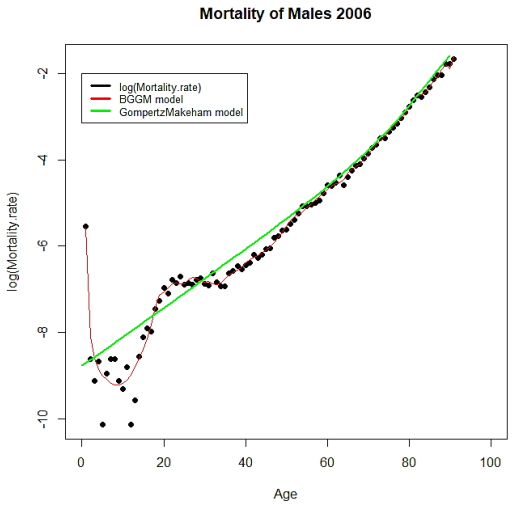


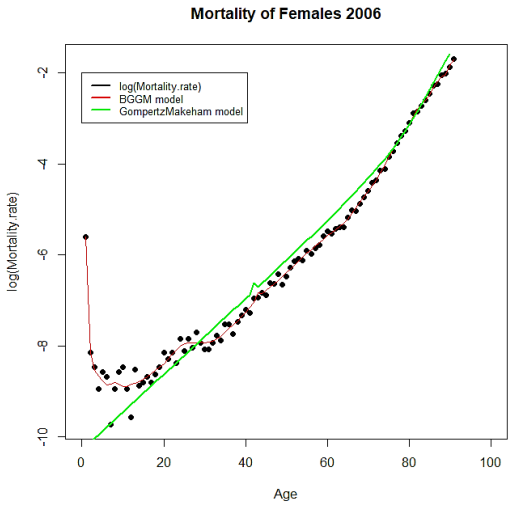

Mortality of Males 2004
log(Mortality.rate)
BGGM model
GompertzMakeham model
log(Mortality.rate)
Age

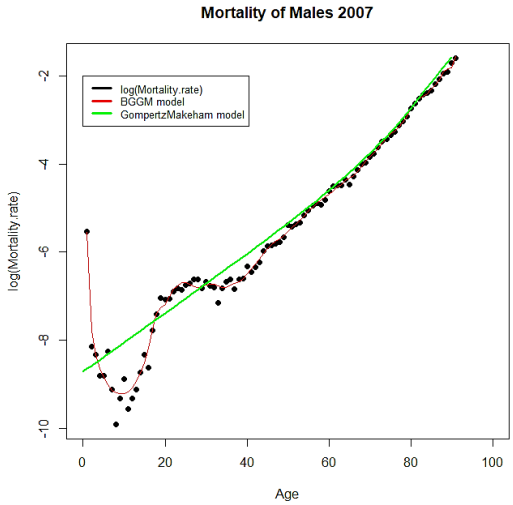

Mortality of Females 2004
log(Mortality.rate)
BGGM model
GompertzMakeham model
log(Mortality.rate)
Age

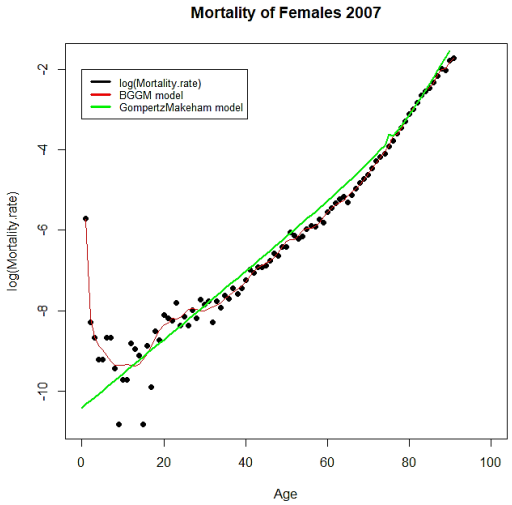

Mortality of Males 2005
log(Mortality.rate)
BGGM model
GompertzMakeham model
log(Mortality.rate)
Age

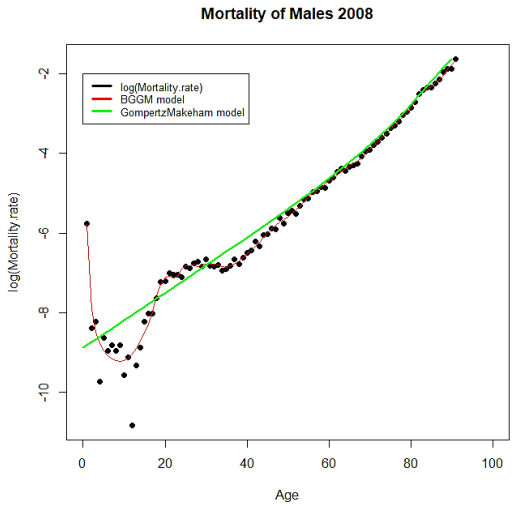

Mortality of Females 2005
log(Mortality.rate)
BGGM model
GompertzMakeham model
log(Mortality.rate)
Age

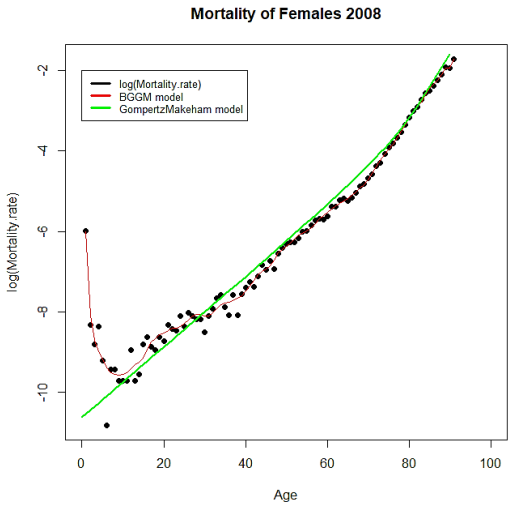

Mortality of Males 2006
log(Mortality.rate)
BGGM model
GompertzMakeham model
log(Mortality.rate)
Age

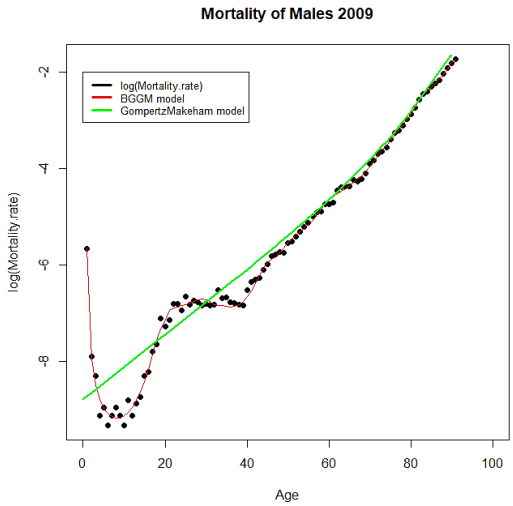

Mortality of Females 2006
log(Mortality.rate)
BGGM model
GompertzMakeham model
log(Mortality.rate)
Age

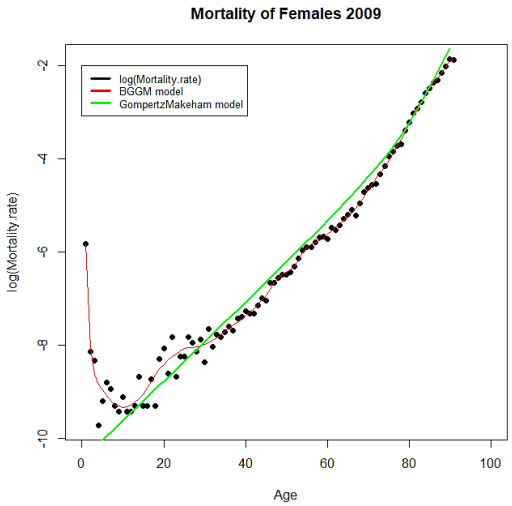

Mortality of Males 2007
log(Mortality.rate)
BGGM model
GompertzMakeham model
log(Mortality.rate)
Age

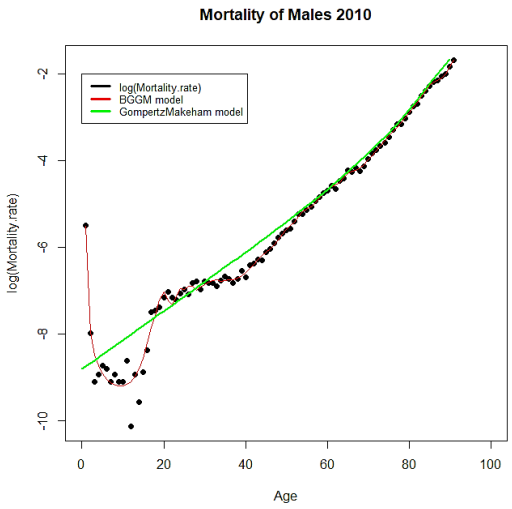

Mortality of Females 2007
log(Mortality.rate)
BGGM model
GompertzMakeham model
log(Mortality.rate)
Age

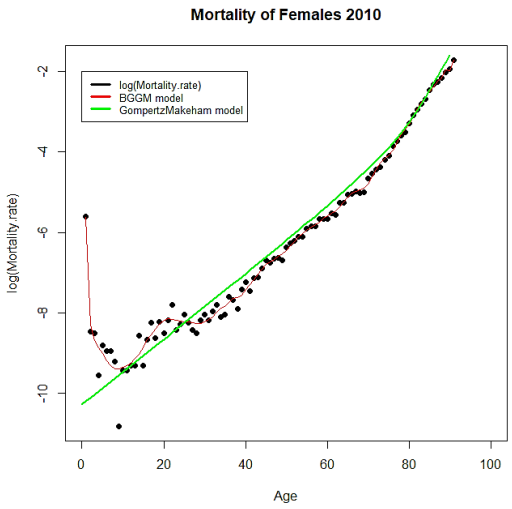

Mortality of Males 2008
log(Mortality.rate)
BGGM model
GompertzMakeham model
log(Mortality.rate)
Age

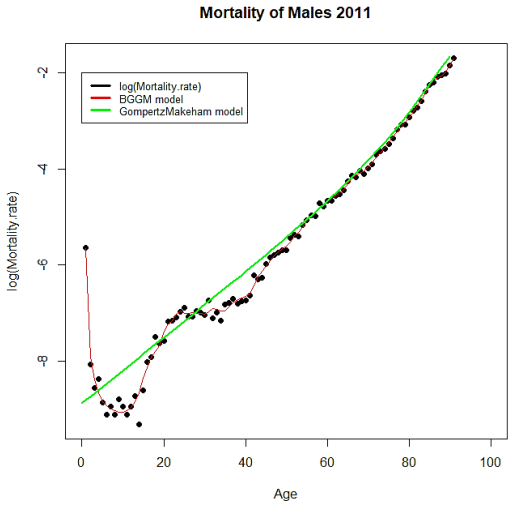

Mortality of Females 2008
log(Mortality.rate)
BGGM model
GompertzMakeham model
log(Mortality.rate)
Age

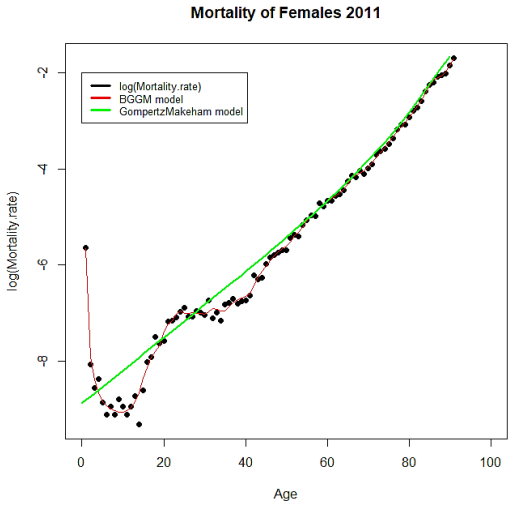

Mortality of Males 2009
log(Mortality.rate)
BGGM model
GompertzMakeham model
log(Mortality.rate)
Age

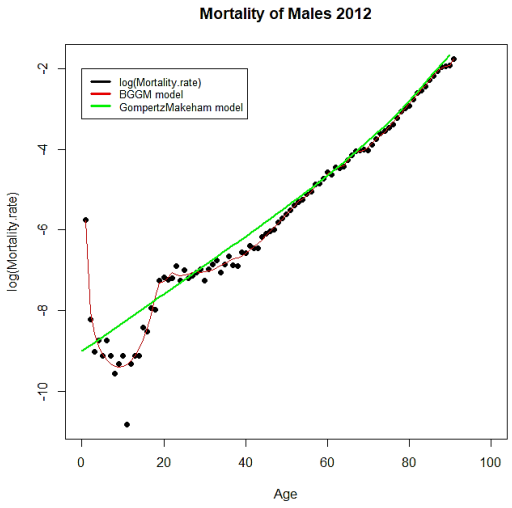

Mortality of Females 2009
log(Mortality.rate)
BGGM model
GompertzMakeham model
log(Mortality.rate)
Age

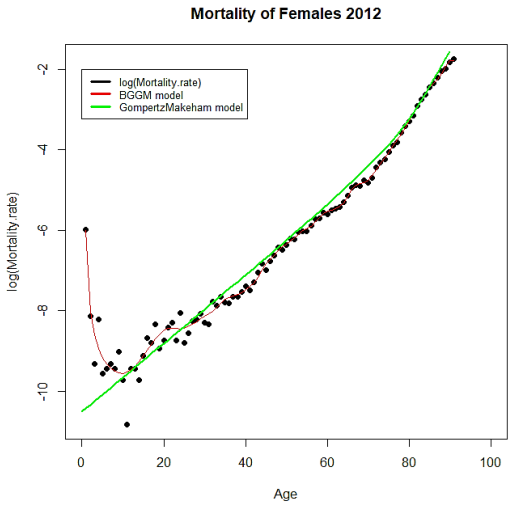

Mortality of Males 2010
log(Mortality.rate)
BGGM model
GompertzMakeham model
log(Mortality.rate)
Age

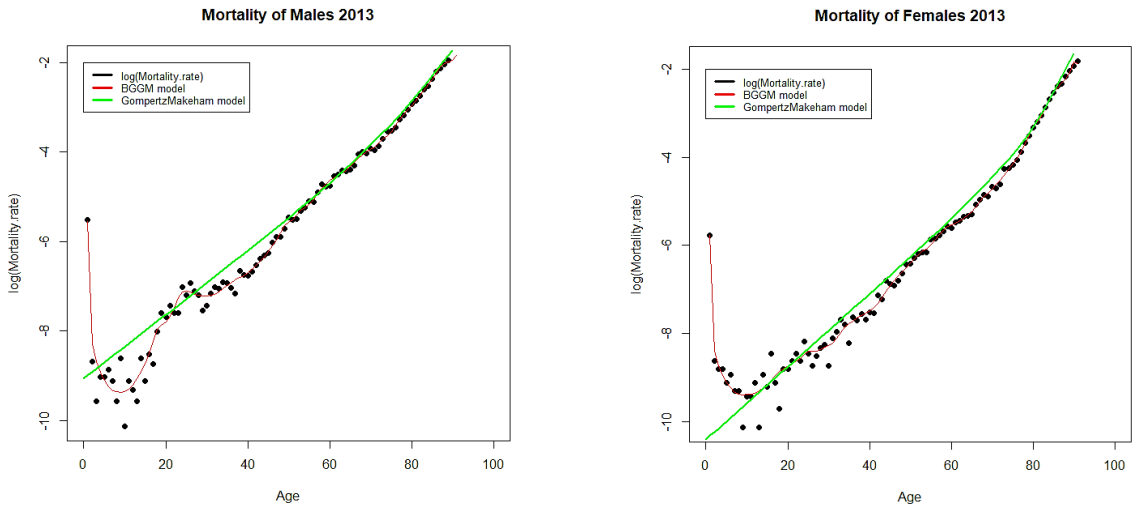

Mortality of Females 2010
log(Mortality.rate)
BGGM model
GompertzMakeham model
log(Mortality.rate)
Age


Mortality of Males 2011
log(Mortality.rate)
BGGM model
GompertzMakeham model
log(Mortality.rate)
Age


Mortality of Females 2011
log(Mortality.rate)
BGGM model
GompertzMakeham model
log(Mortality.rate)
Age


Mortality of Males 2012
log(Mortality.rate)
BGGM model
GompertzMakeham model
log(Mortality.rate)
Age


Mortality of Females 2012
log(Mortality.rate)
BGGM model
GompertzMakeham model
log(Mortality.rate)
Age



Γράφημα 23: Γραφικές απεικονίσεις των δεδομένων θνησιμότητας της Ελλάδας, τόσο για άνδρες (males) όσο και για γυναίκες (females). Η *BGGM* κατανομή (κόκκινο χρώμα) σε σύγκριση με την *Gompertz - Makeham* κατανομή (πράσινο χρώμα) για τα έτη 2001 - 13. Η προσαρμογή (goodness of fit) της BGGM κατανομής στα δεδομένα είναι πολλή υψηλή για όλα τα έτη ανάλυσης και για μεγάλο ηλικιακό εύρος. Η ανάλυση έγινε με χρήση του κώδικα ***R***.

Αποτελέσματα – Συμπεράσματα

Από τους παραπάνω ελέγχους προκύπτει πως τα δεδομένα προσεγγίζονται ικανοποιητικά από την προτεινόμενη κατανομή (BGGM), που εξετάζεται. Η συγκεκριμένη κατανομή BGGM φαίνεται να προσφέρει καλύτερη προσέγγιση τόσο για τους άνδρες όσο και για τις γυναίκες. Επιχειρήθηκε, η σύγκριση της (προτεινόμενης) **BGGM** κατανομής με την κατανομή **GM** (Gompertz - Makeham) εξαιτίας της «καλής συμπεριφοράς» που παρουσιάζει η δεύτερη σε δεδομένα θνησιμότητας για τα έτη από το 2001 έως το 2013, που αφορούν και τα δύο φύλα στην Ελλάδα. Με βάση όμως τα στατιστικά κριτήρια αξιολόγησης των AIC, BIC, log – likelihood και R^2_{pseudo}, η νέα κατανομή μπορεί και προσαρμόζεται καλύτερα (goodness of fit) από την κατανομή GM στα προαναφερθέντα δεδομένα για όλα τα έτη.

Η νέα κατανομή χαρακτηρίζεται από την ευελιξία σε επίπεδο εξομάλυνσης (και όχι μόνο) που παρουσιάζει σε διαφορετικές ομάδες δεδομένων. Ο συνδυασμός των γενικευμένων Βήτα κατανομών με αντίστοιχους νόμους θνησιμότητας [*Gompertz (1825), Makeham (1860), Steffenson (1930), Perks (1932), Harper (1936) και Weibull (1939)* και πιο πρόσφατα των *Heligman και Pollard (1980)*] καθιστά πιο αποτελεσματική την επεξήγηση των διαφόρων επιστημονικών φαινομένων (δημογραφικά – βιολογικά φαινόμενα). Δεδομένου ότι καταφέρνει

να συνδυάζει χαρακτηριστικά και ιδιότητες από δύο γνωστές κατανομές. Για παράδειγμα, η συνάρτηση κινδύνου (*hazard* function) της προτεινόμενης κατανομής με τον γενικευμένο νόμο θνησιμότητας Generalized - Gompertz Makeham, την κάνει να εμφανίζεται πιο «ευέλικτη» και σε επίπεδο «αυτόνομων συναρτήσεων», να παίρνει δηλαδή διάφορες μορφές ανάλογα με την επιθυμία του εκάστοτε ερευνητή, είτε αλγεβρικά είτε γραφικά. Το γεγονός αυτό είναι πολύ χρήσιμο σε πραγματικά καθημερινά προβλήματα δημογραφίας (όπως οι γεννήσεις, οι θάνατοι, η γήρανση, η γαμηλιότητα κ.α.).

Σύμφωνα με τα παραπάνω, θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι το μοντέλο BGGM έχει μεγάλη επιδημιολογική και δημογραφική αξία λόγω της ευελιξίας που παρέχει το πλήθος των παραμέτρων του. Αυτό θα μπορούσε να συμβάλει στη δημιουργία στρατηγικών για τη δημόσια υγεία και στην καλύτερη οργάνωση των δημόσιων νοσοκομείων.

Οι παράμετροι της BGGM κατανομής είναι δυνατό να υπολογιστούν / εκτιμηθούν με την μέθοδο της Μέγιστης Πιθανοφάνειας και των Ελαχίστων τετραγώνων (κώδικας ***R*** ή κώδικας excel: ***Solver***). Η BGGM κατανομή επιχειρεί να ξεπεράσει τους διαπιστωμένους περιορισμούς των προηγούμενων κατανομών, καταγράφοντας καλύτερα τις "άτυπες συμπεριφορές" τόσο στις πολύ χαμηλές όσο και στις πολύ υψηλές ηλικίες.

Από την πλευρά των αδυναμιών, θα μπορούσε να αναφερθεί ότι ο αριθμός των παραμέτρων είναι υψηλότερος από ότι σε άλλα μοντέλα. Ωστόσο, κάθε μια από αυτές τις παραμέτρους έχει μια συγκεκριμένη δημογραφική ερμηνεία (παράγραφος 3.4.2) που κάνει τα αποτελέσματα: α) εύκολα στην ανάλυση και β) χρήσιμα για την κατανόηση ηλικιακών και χρονικών ειδικών παρατηρήσεων σχετικά με τη θνησιμότητα.

Στόχος είναι να μπορεί η «νέα» BGGM κατανομή να χρησιμοποιηθεί ως ένα αποτελεσματικό μαθηματικό εργαλείο για την ανάλυση των δεδομένων θνησιμότητας και την εξερεύνηση βιολογικών ή δημογραφικών διεργασιών που αποτελούν τη βάση της γήρανσης και της θνησιμότητας.

5.3 Προσαρμογή των παραμέτρων της BGGM στα ελληνικά δεδομένα

Στην παρούσα ενότητα, γίνεται μια προσπάθεια αποτύπωσης των δημογραφικών τάσεων που ακολουθούν οι 6 παράμετροι της $f_{BGGM}(x;\theta,\xi,\kappa,\lambda,\alpha,\beta)$ στα ελληνικά δεδομένα. Για την αναζήτηση αυτή χρησιμοποιούνται δεδομένα που αφορούν την ηλικιακή κατανομή των θανάτων στην Ελλάδα (*πηγή:* Human Mortality Database), χωριστά για άνδρες και γυναίκες και για τα έτη από το 2001 έως και το 2013. Οι τιμές των εκτιμώμενων παραμέτρων, παρήχθησαν από την κατασκευή του αντίστοιχου κώδικα στην R, υπό την συνάρτηση minpack.lm. Στους ακόλουθους πίνακες 11 και 12 - και στο γράφημα 24, παρουσιάζονται οι εκτιμήσεις των παραμέτρων, καθώς και τα αντίστοιχα γραφήματα αυτών.

Παράμετροι ανδρών - Ελλάδα				
Έτη	**θ**	**ξ**	**λ**	**κ**
2001	0,00003378	0,0923704	0,0000393	0,00209448
2002	0,00003474	0,0922431	0,0000300	0,00155408
2003	0,00003983	0,0939220	0,0000610	0,00275330
2004	0,00003091	0,0935684	0,0000555	0,00202973
2005	0,00004118	0,0963992	0,0000820	0,00335929
2006	0,00000749	0,0959343	0,0000202	0,00041884
2007	0,00002778	0,0959800	0,0000724	0,00211851
2008	0,00003023	0,1032762	0,0001630	0,00881361
2009	0,00003205	0,1027060	0,0001230	0,01118895
2010	0,00003408	0,1003683	0,0000518	0,01697802
2011	0,00002931	0,1002855	0,0000000	0,02178552
2012	0,00003124	0,0998063	0,0000000	0,02247175
2013	0,00003029	0,0990732	0,0000000	0,02313439

Πίνακας 11. Εκτιμήσεις των 4 βασικών παραμέτρων της BGGM κατανομής, $f_{BGGM}(x;\theta,\xi,\kappa,\lambda,\alpha,\beta)$ από τον αντίστοιχο αλγόριθμο που υλοποιήθηκε στην R. Αφορά θνησιμότητα ανδρών για τα έτη 2001 ως 2013, Ελλάδα.

Αρχικά, όσον αφορά στην ανάλυση των παραμέτρων όπως εμφανίζονται στους πίνακες 11 και 12, η τιμή της παραμέτρου $\boldsymbol{\theta}$ διαφοροποιείται και στα δύο φύλα (πίνακες 11 και 12, και γράφημα 24). Στον νόμο Gompertz, η παράμετρος $\boldsymbol{\theta}$ περιγράφει την βρεφική θνησιμότητα του

πληθυσμού της χρονικής περιόδου που εξετάζεται (Jones, 2013). Συγκεκριμένα, αναφέρεται στους θανάτους που λαμβάνουν χώρα στην ηλικία 0 ως 1, για το τρέχον έτος της έρευνας και όπως είναι φυσικό επηρεάζει και την επόμενη χρονιά. Συνεπώς η παράμετρος $\boldsymbol{\theta}$, επηρεάζεται από τους θανάτους νεογνών στην ηλικία 0 έως 1. Δημογραφικά, η μειούμενη τιμή του $\boldsymbol{\theta}$ αντικατοπτρίζει ένα αυξανόμενο προσδόκιμο ζωής.

Στους άνδρες της Ελλάδας η παράμετρος $\boldsymbol{\theta}$ εμφανίζει μικρές αυξομειώσεις στο πέρασμα των χρόνων, δείχνει όμως να διατηρείται στο μέσο όρο της παραμέτρου (κεφάλαιο 6). Στις γυναίκες, σε αυτό το μικρό διάστημα ελέγχου των 13 ετών, ενώ το 2001 εμφανίζονται υψηλές τιμές θανάτων νεογνών κοριτσιών, στο πέρασμα των ετών τα δεδομένα εμφανίζουν μια μείωση, όμως για προσωρινό χρονικό διάστημα, αφού και πάλι το 2010 παρουσιάζεται αύξηση θανάτων. Σε αντίθεση με την περίοδο 2012 και 2013 όπου παρατηρείται μια σημαντική πτώση στην τιμή της παραμέτρου.

Συμπερασματικά, αξίζει να επισημανθεί ότι μία χαμηλή τιμή της παραμέτρου $\boldsymbol{\theta}$, μπορεί να συνδεθεί με βελτίωση στην ποιότητα ζωής της κάθε χώρας. Επίσης, αν και η βρεφική θνησιμότητα των ανδρών είναι υψηλότερη από των γυναικών σε παγκόσμια κλίμακα (Eurostat, 2018), σε αυτό το διάστημα της ανάλυσης και για την Ελλάδα, δεν συμβαίνει αυτό. Σε μεγαλύτερο εύρος ανάλυσης, σε επόμενο κεφάλαιο, η «ιδιαιτερότητα» αυτή αποκαθίσταται.

Η παράμετρος $\boldsymbol{\xi}$ ορίζει το ποσοστό γήρανσης για τις ηλικίες άνω των 70 ετών, η οποία εντοπίζεται στη βιβλιογραφία και ως κλίση Gompertz, και αντανακλά το ποσοστό δημογραφικής γήρανσης ενός πληθυσμού. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα του αντίστοιχου πίνακα 11 (και γράφημα 24), της κατανομής BGGM, για τους άνδρες της Ελλάδας, το $\boldsymbol{\xi}$ σταθεροποιείται στην τιμή γύρω από το 0.1 με μια αυξητική τάση την περίοδο 2001 – 2008, αλλά με μία σαφή σταθεροποίηση ως το 2013. Για τις γυναίκες της Ελλάδας (πίνακας 12 και γράφημα 24) η τιμή του $\boldsymbol{\xi}$ φαίνεται να κινείται σταθερά γύρω από το 0.24 και παρουσιάζει μια μικρή αύξηση από το 2001 μέχρι το 2013.

Αυτό που παρατηρείται στο σύνολο της Ευρώπης, όπως παρουσιάζεται στη συνέχεια στο κεφάλαιο 6, φαίνεται να γίνεται εμφανές και στην Ελλάδα, με συσσώρευση γερασμένων πληθυσμών. Από την ανάλυση της παραμέτρου $\boldsymbol{\xi}$, επιβεβαιώνεται η γενικότερη διαπίστωση των τελευταίων μελετών, πως η αύξηση των ηλικιωμένων οδηγεί σε πληθυσμούς γερασμένους. Τις τελευταίες δεκαετίες, οι θάνατοι στον δυτικό κόσμο συσσωρεύονται μετά τα 85+ έτη, με αποτέλεσμα να αυξάνεται η τιμή του $\boldsymbol{\xi}$. Μεγαλύτερες τιμές της παραμέτρου θα μπορούσαν να οφείλονται στην καλύτερη ποιότητα ζωής.

Όμως και το ποσοστό των ατόμων σε ηλικία εργασίας συρρικνώνεται, ενώ ο σχετικός αριθμός πληθυσμού άνω των 75 ετών διευρύνεται. Το φαινόμενο αυτό, σε συνδυασμό και με την μείωση των γεννήσεων, τείνει να μετασχηματίσει τη σύνθεση της ηλικιακής πυραμίδας στα επόμενα χρόνια.

Παράμετροι γυναικών - Ελλάδα				
Έτη	**θ**	**ξ**	**λ**	**κ**
2001	0,00003619	0,2400841	0,0006428	0,01672262
2002	0,00003563	0,2398197	0,0006640	0,0174926
2003	0,00003594	0,2400246	0,0006601	0,01740111
2004	0,00003566	0,2398388	0,0006636	0,01748608
2005	0,00003571	0,2398735	0,0006631	0,01747077
2006	0,00003565	0,2398526	0,0006550	0,01747164
2007	0,00003589	0,2399997	0,0006570	0,01740144
2008	0,00003590	0,2400053	0,0006563	0,01740623
2009	0,00003581	0,2399514	0,0006560	0,01742915
2010	0,00003611	0,2401346	0,0006574	0,01733885
2011	0,00003615	0,2401640	0,0006570	0,01732117
2012	0,00003558	0,2404169	0,0006568	0,01715049
2013	0,00003531	0,2402578	0,0006567	0,01726345

Πίνακας 12. Εκτιμήσεις των 4 βασικών παραμέτρων της BGGM κατανομής, $f_{BGGM}(x;\theta,\xi,\kappa,\lambda,\alpha,\beta)$ από τον αντίστοιχο αλγόριθμο που υλοποιήθηκε στην R. Αφορά θνησιμότητα γυναικών για τα έτη 2001 ως 2013, Ελλάδα

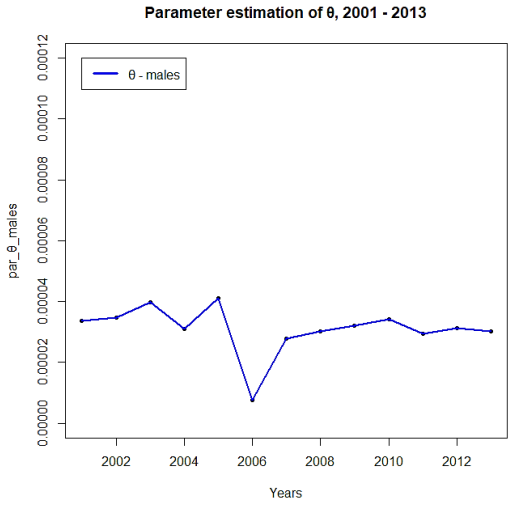
Παρατηρώντας τα αποτελέσματα από τον πίνακα 11 και το αντίστοιχο γράφημα 24, σχετικά με την παράμετρο $\boldsymbol{\lambda}$ για την Ελλάδα, η περίπτωση των ανδρών παρουσιάζει εξαιρετικό ενδιαφέρον. Η παράμετρος $\boldsymbol{\lambda}$ αναφέρεται, σε συμβάντα που επηρεάζουν ολόκληρο τον πληθυσμό μιας χώρας ανεξάρτητα από την ηλικία. Κατά την ανάλυση, παρατηρούνται έντονες διακυμάνσεις που μπορεί να οφείλονται σε διάφορα κοινωνικά (π.χ. πόλεμος, ασθένειες κλπ.) και οικονομικά (π.χ. χαμηλό εισόδημα, οικονομική κρίση κλπ.) γεγονότα που όπως φαίνεται επηρεάζουν την πορεία της θνησιμότητας σε ολόκληρο τον εξεταζόμενο πληθυσμό. Όταν η τιμή της παραμέτρου βρίσκεται κοντά στο μηδέν αποτυπώνεται μια φυσιολογική πορεία στην εξέλιξη του πληθυσμού της κάθε χώρας, μη επηρεαζόμενο από εξωτερικούς παράγοντες. Η

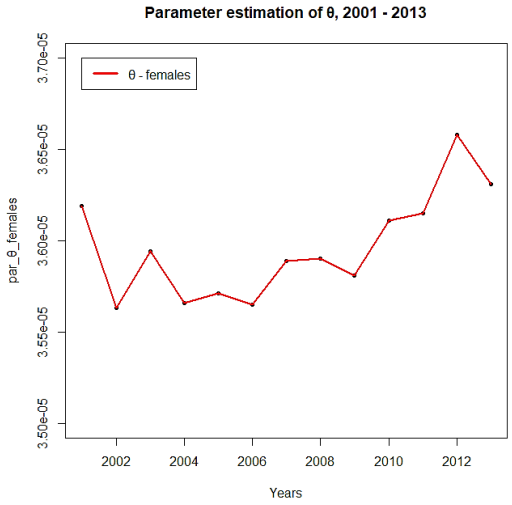
παράμετρος εκφράζει το βαθμό επιτυχίας / αποτυχίας με τον οποίο αντιμετωπίζει ένας πληθυσμός το θάνατο (η $\boldsymbol{\lambda}$ ακολουθεί την Διωνυμική κατανομή Bernoulli, $\boldsymbol{\lambda} \sim Bernoulli(p, q)$) σε κάθε ηλικία: όσο χαμηλότερη η τιμή του $\boldsymbol{\lambda}$ (τιμή κοντά στο 0) τόσο μεγαλύτερη η επιτυχία αντιμετώπισης του θανάτου. Ιστορικά, οι παράγοντες που θα μπορούσαν να συμβάλλουν στην διακύμανση της τιμής του $\boldsymbol{\lambda}$ σχετίζονται με τις κοινωνικοοικονομικές συνθήκες, την τεχνολογική πρόοδο και την βελτίωση της ιατρικής.

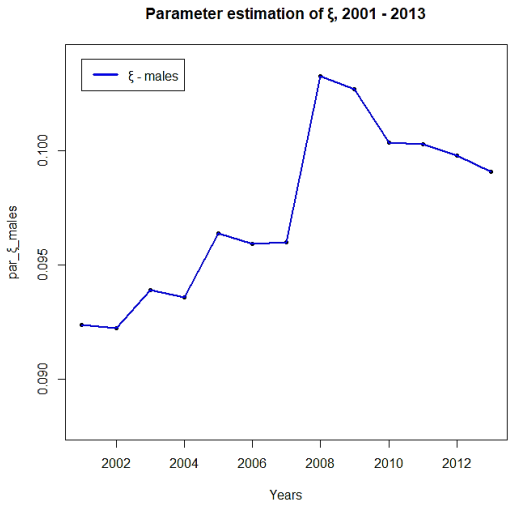
Στην Ελλάδα, από το 2001 έως το 2005 υπάρχει μία ύφεση της παραμέτρου (γράφημα 24) στους άνδρες. Το 2008 φαίνεται πως ο πληθυσμός των ανδρών δέχεται «πιέσεις» από εξωτερικούς παράγοντες που προκαλούν μια μεγάλη άνοδο στη θνησιμότητα. Ίσως τελικά, η κοινωνική αναστάτωση που προκλήθηκε στη χώρα λόγω της οικονομικής κρίσης (Duquenne, M. N. 2014), κυρίως την περίοδο 2008 – 13, να έχει επηρεάσει την θνησιμότητα (π.χ. χαμηλή ποιότητα ιατρικής φροντίδας). Κατά τη ίδια περίοδο και εστιάζοντας στη θνησιμότητα των γυναικών (πίνακας 12), η πορεία της παραμέτρου $\boldsymbol{\lambda}$ θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ακόμα και πτωτική στα τελευταία χρόνια της ανάλυσης με μικρότερες ανά έτος διακυμάνσεις, εκτός από την περίοδο 2001 - 02. Στο γράφημα 24 (κόκκινο χρώμα) φαίνεται έντονα από το 2004 και μετά. Από την εξέλιξη της παραμέτρου $\boldsymbol{\lambda}$, φαίνεται πως οι άνδρες είναι περισσότερο ευάλωτοι σαν πληθυσμός από εξωτερικούς παράγοντες.

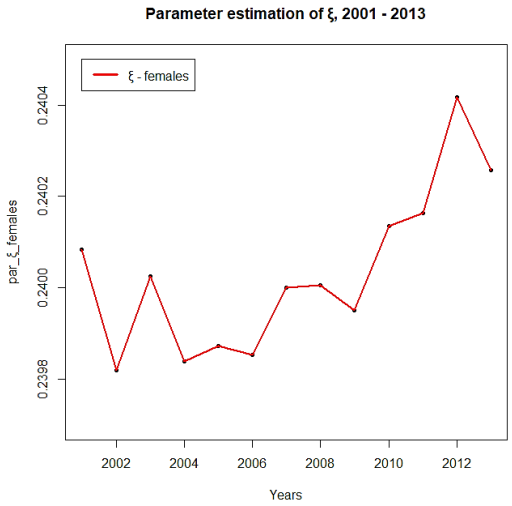
Η παράμετρος $\boldsymbol{\kappa}$ εξετάζει την τυχαιότητα του θανάτου, λόγω είτε της απότομης χειροτέρευσης της υγείας (ενδογενής παράγοντας) είτε εξωγενούς τυχαίου παράγοντα (π.χ. τροχαία ατυχήματα, αυτοκτονία) και εξαρτάται απόλυτα από την ηλικία. Μια τιμή του $\boldsymbol{\kappa}$ κοντά στο μηδέν, υποδηλώνει ότι η πιθανότητα ξαφνικού θανάτου είναι χαμηλή. Όταν η τυχαιότητα αυξάνεται η παράμετρος $\boldsymbol{\kappa}$ μετακινείται από το 0. Έχει παρατηρηθεί ότι η επίδραση της τυχαιότητας στη θνησιμότητα αυξάνεται στους νεαρούς ενήλικες - οι οποίοι συνήθως υιοθετούν έναν πιο επικίνδυνο τρόπο ζωής - καθώς και για τις ηλικίες μεταξύ 50 και 75 ετών, λόγω ειδικών περιπτώσεων ή ξαφνικών γεγονότων υγείας. Παρατηρώντας την εκτίμηση της παραμέτρου στον αντίστοιχο πίνακα 11 για τους άνδρες της Ελλάδας, καταλήγουμε στο αρχικό συμπέρασμα. Οι άνδρες είναι πιο επιρρεπείς στον τυχαίο παράγοντα θανάτου, εξαιτίας ίσως του τρόπου ζωής (επικίνδυνη οδήγηση, αλκοόλ κλπ.), οπότε και κυρίως μετά το 2006 - 09, παρατηρείται μία άνοδος των θανάτων. Δεν ισχύει όμως το ίδιο για τον γυναικείο πληθυσμό της Ελλάδας, όπου παρατηρείται μία σταθερότητα της επίδρασης του «τυχαίου» σε ένα εύρος τιμών μεταξύ 0.00064 ως 0.00066 στην πορεία της θνησιμότητας. Θετικά εικόνα για τους άνδρες, εμφανίζεται από το 2010 και μετά που δείχνει να ομαλοποιείται η κατάσταση.

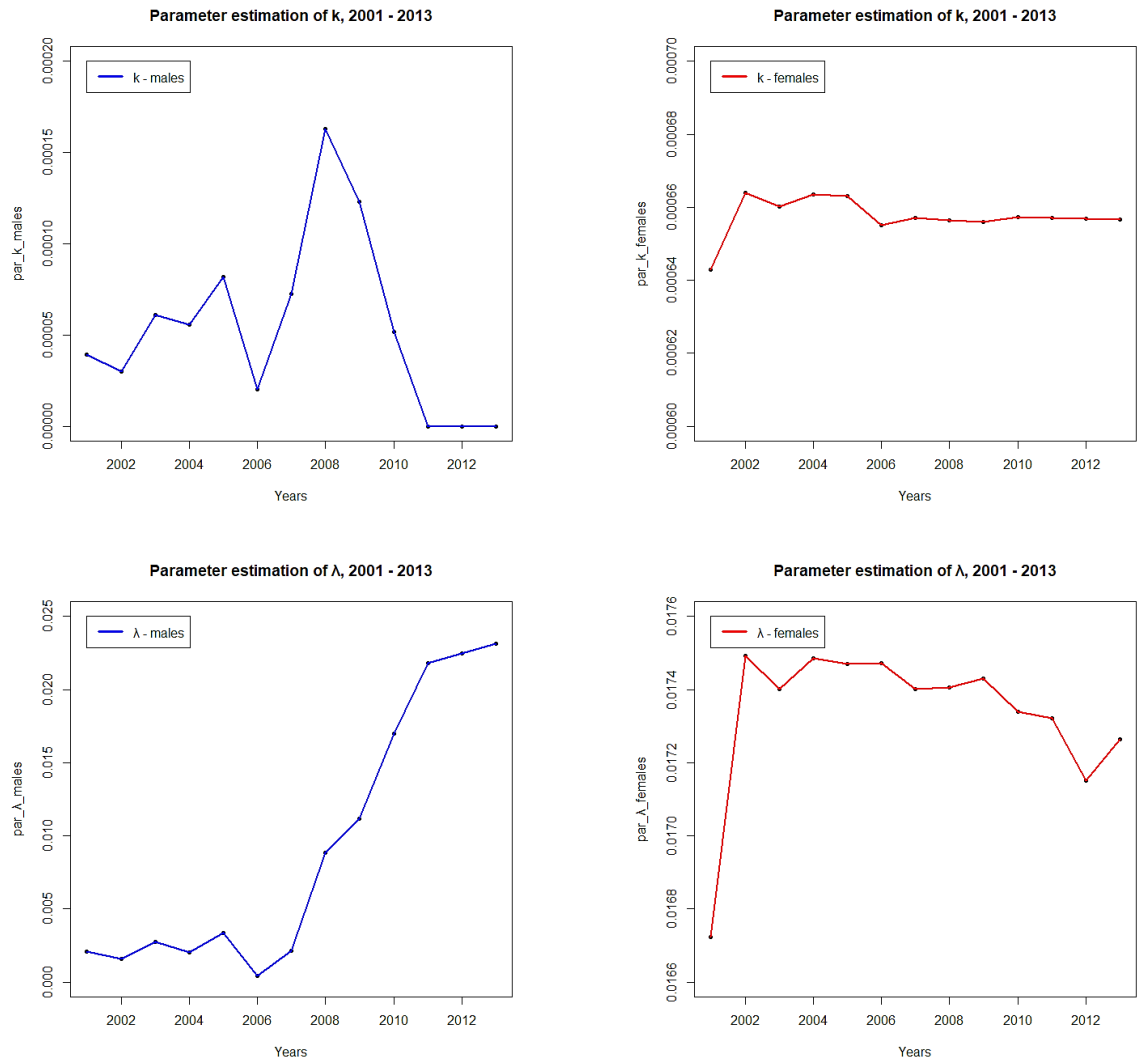
Το εύρος στο οποίο κινούνται οι άλλες παράμετροι φαίνεται στην εικόνα 3 (χαρτογραφική απεικόνιση της κάθε παραμέτρου), στο σχετικό υπόμνημα του κάθε χάρτη, τόσο για άνδρες όσο και για γυναίκες.











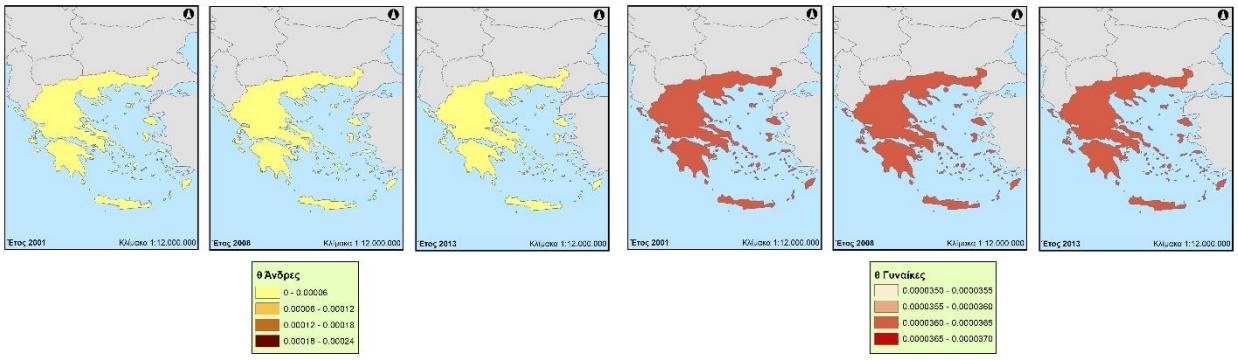
Γράφημα 24: Γραφικές απεικονίσεις των εκτιμήσεων των παραμέτρων για τα δεδομένα θνησιμότητας της Ελλάδας, τόσο για άνδρες (males, μπλε χρώμα) όσο και για γυναίκες (females, κόκκινο χρώμα), για τα έτη 2001 ως και το 2013. Η προσαρμογή (goodness of fit) της BGGM κατανομής στα δεδομένα είναι πολλή υψηλή για όλα τα έτη ανάλυσης και για μεγάλο ηλικιακό εύρος. Η ανάλυση έγινε με χρήση του κώδικα ***R***.

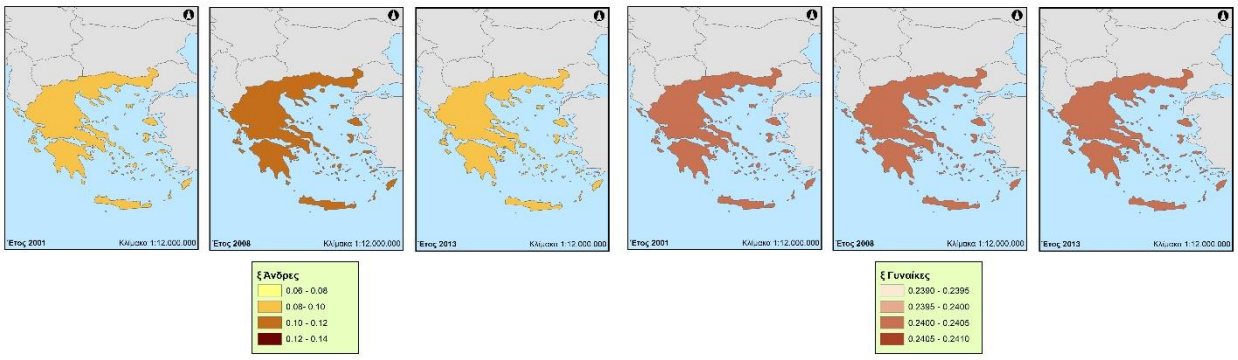
Ολοκληρώνοντας την ενότητα για τον Ελλαδικό χώρο, τα όσα διαπιστώθηκαν από την παραπάνω στατιστική ανάλυση σε κώδικα στην R για τις εκτιμήσεις των παραμέτρων, τόσο για άνδρες όσο και για γυναίκες, οπτικοποιούνται και στους παρακάτω χάρτες (εικόνα 3), για τα έτη 2001, 2008 και 2013 που έγιναν στο λογισμικό (ArcGIS). Επιλέχθηκαν οι συγκεκριμένες χρονικές στιγμές με βάση τις αλλαγές που σημείωσαν οι παράμετροι κατά την στατιστική ανάλυση.

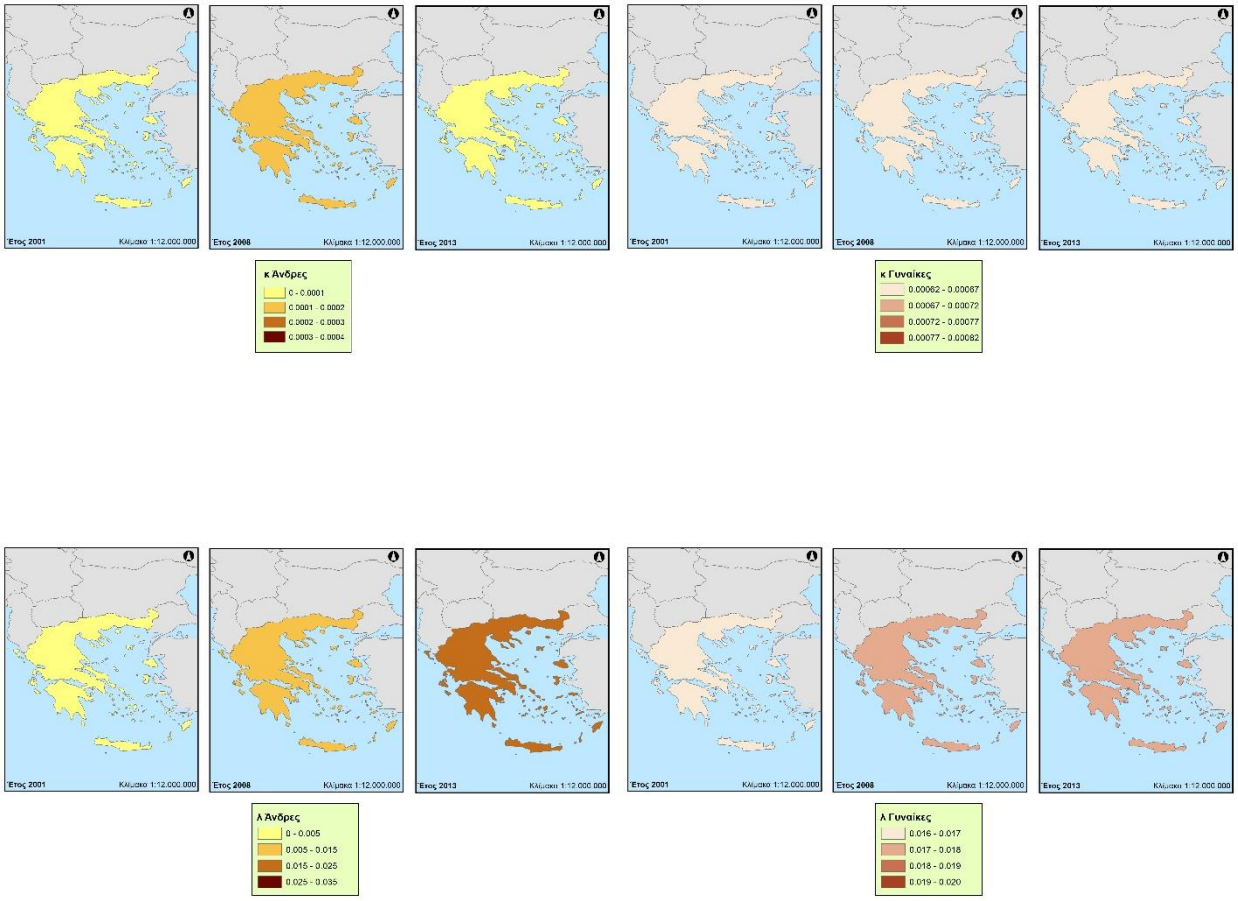
Στην εικόνα 3, αποτυπώνεται η μικρή οπτική διαφοροποίηση για τα 13 έτη της ανάλυσης (2001 – 2013) που αφορά τον Ελλαδικό χώρο (άνδρες – γυναίκες), για την κάθε παράμετρο.

Όπως μπορεί εύκολα να διαπιστωθεί, κρίνεται αναγκαία η ανάλυση της κάθε παραμέτρου σε ένα μεγαλύτερο χρονικό εύρος, όπως παρουσιάζεται στο επόμενο κεφάλαιο, για να εξαχθούν πιο ασφαλή συμπεράσματα τόσο σε οπτικό επίπεδο διαφοροποίησης όσο και σε επίπεδο στατιστικής επεξεργασίας.

Οι παράμετροι $\boldsymbol{\alpha}$ (shape) και $\boldsymbol{\beta}$ (scale) αφορούν τη Βήτα κατανομή και διατηρούν τις γνωστές στατιστικές ιδιότητες (Zografos et al., 2009). Δεν επηρεάζουν τις δημογραφικές ιδιότητες της κατανομής και ορίζονται από αρχικές τιμές που τέθηκαν σύμφωνα με τις στατιστικές ιδιότητες της Βήτα κατανομής (κεφάλαιο 4).







Εικόνα 3: Χαρτογραφικές απεικονίσεις των εκτιμήσεων των παραμέτρων για τα δεδομένα θνησιμότητας της Ελλάδας, τόσο για άνδρες (males, αποχρώσεις κίτρινου) όσο και για γυναίκες (females, αποχρώσεις κόκκινου), για τα έτη 2001, 2008 και 2013. Οι χρωματικές διαβαθμίσεις των εκτιμήσεων για την κάθε παράμετρο, δίνουν τις ανάλογες ενδείξεις για το «πιθανό» μονοπάτι που ακολουθεί η ανθρώπινη θνησιμότητα. Το περιορισμένο χρονικό εύρος κάνει σαφής τους περιορισμούς για ασφαλή συμπεράσματα, αφού σε ορισμένες περιπτώσεις η οπτική διαφοροποίηση είναι ελάχιστη. Η δημιουργία των χαρτών έγινε με το λογισμικό ArcGIS.

Συνοψίζοντας…

Στο κεφάλαιο 5 η νέα κατανομή (BGGM distribution) εφαρμόστηκε στα Ελληνικά δεδομένα θνησιμότητας της περιόδου 2001 – 2013. Εφαρμόζοντας την κατανομή σε πραγματικά δεδομένα διερευνήθηκε η καταλληλότητά της και έγινε η προσαρμογή και ερμηνεία των παραμέτρων της BGGM κατανομής στα ελληνικά δεδομένα τόσο για άνδρες όσο και για γυναίκες. Μέσω του παραπάνω εγχειρήματος που είχε ως στόχο τη διερεύνηση των δυνατοτήτων προσέγγισης της θνησιμότητας από τη νέα κατανομή και την εκτίμηση της απόκλισης της από τα παρατηρούμενα μεγέθη, η συμπεριφορά της κατανομής Beta Gompertz Generalized Makeham κατανομής κρίθηκε παραπάνω από ικανοποιητική.

ΚΕΦ.6: Εφαρμογή σε Ευρωπαϊκά δεδομένα

Τις τελευταίες δύο δεκαετίες, έρχονται στο επιστημονικό προσκήνιο μελέτες που αναλύουν τη δυναμική της θνησιμότητας σε όλη τη διάρκεια ζωής του ανθρώπου. Με την πληθυσμιακή γήρανση να αποτελεί μια αναπόφευκτη και μη αναστρέψιμη πραγματικότητα για το σύνολο του Ευρωπαϊκού πληθυσμού, οι προσπάθειες για την καλύτερη μοντελοποίηση της πιθανότητας θανάτου σε διάφορες ηλικίες βρίσκονται σήμερα στην αιχμή του πεδίου της βιο-δημογραφίας.

Στόχος της μελέτης, είναι η εφαρμογή και ο έλεγχος του νέου μοντέλου μαθηματικής θνησιμότητας (*BGGM κατανομή*) σε δεδομένα διαφορετικών χωρών και σε διαφορετικές χρονικές περιόδους 1993 – 2013, 1900 – 2013 και 1957 – 2017, ανάλογα με την καταγραφή των δεδομένων που έχει πραγματοποιήσει η κάθε χώρα, ώστε (α) να ελεγχθεί περαιτέρω ως προς τις ιδιότητές της η νέα κατανομή και να αξιολογηθεί η καλή προσαρμογή της και (β) να υπολογισθούν οι διαφορετικές τιμές των παραμέτρων της με στόχο να διερευνηθεί η χωρική και διαχρονική διαφοροποίησή τους.

Οι ακριβείς προβλέψεις για τη θνησιμότητα αποτελούν βασική προϋπόθεση για τις προβολές των οικονομικών στην ανάπτυξη των συνταξιοδοτικών συστημάτων και τον προγραμματισμό της υγείας και της κοινωνικής πολιτικής. Τόσο οι κυβερνήσεις όσο και οι ασφαλιστικές εταιρείες σε όλο τον κόσμο βασίζονται στις προβλέψεις αυτές για την αποτελεσματική διαχείριση των συνταξιοδοτικών δεσμεύσεών τους, για τον προϋπολογισμό και ορθό καταμερισμό των δαπανών υγείας και τη διασφάλιση μιας αποτελεσματικής κοινωνικής πολιτικής. Ωστόσο, τις τελευταίες δεκαετίες, οι δημογράφοι υποτιμούν συστηματικά τις βελτιώσεις στο προσδόκιμο ζωής, ιδίως για άτομα ηλικίας 60 ετών και άνω.

Οι σημαντικές εξελίξεις στη θνησιμότητα και οι διαρκείς προς τα πάνω αναθεωρήσεις του προσδόκιμου ζωής αναδεικνύουν την ανάγκη διαρκούς επικαιροποίησης των μεθόδων εκτίμησης και πρόβλεψης της θνησιμότητας και εμπλουτισμού των σχετικών βάσεων δεδομένων. Η δυνατότητα της πρόβλεψης έχει αυξηθεί σημαντικά τις τελευταίες δεκαετίες μέσω του υψηλού επιπέδου ερευνητικής δραστηριότητας και την επακόλουθη αξιοποίηση των αποτελεσμάτων. Σε αυτό συνέβαλε καθοριστικά η βελτίωση της πρόσβασης σε δεδομένα υψηλής ποιότητας μέσω της κατασκευής πλούσιων και ποιοτικών βάσεων δεδομένων (π.χ., η βάση δεδομένων ανθρώπινης θνησιμότητας, http://www.mortality.org/) και η ανάπτυξη εξειδικευμένου λογισμικού εκτίμησης της θνησιμότητας χρησιμοποιώντας την ***R*** (βλέπε

παράρτημα A_7, τον κώδικα της θνησιμότητας για την εκτίμηση των παραμέτρων για τις 22 χώρες της Ε.Ε).

Άλλωστε, αποτελεί γενική παραδοχή η ανάγκη διεύρυνσης του πεδίου έρευνας με τη συγκριτική μελέτη διαφορετικών μαθηματικών μοντέλων και η ανάπτυξη νέων (*BGGM κατανομή*) που θα προσφέρουν μεγαλύτερη ακρίβεια, ιδιαίτερα στην εκτίμηση της πιθανότητας θανάτου τόσο στις πολύ νεαρές όσο και τις πολύ υψηλές ηλικιακές ομάδες. Η ορθή μοντελοποίηση της πιθανότητας θανάτου ανά ηλικία και αιτία θα προσφέρει σωστή γνώση της δημογραφικής εξέλιξης του πληθυσμού και κατά συνέπεια θα συμβάλει στον καλύτερο οικονομικό και κοινωνικό προγραμματισμό της κάθε χώρας.

6.1 Εφαρμογή της BGGM σε 22 χώρες της Ευρώπης

Η ανάλυση και κατ΄επέκταση η εφαρμογή βασίζεται σε δεδομένα θνησιμότητας που συλλέχθηκαν και παρασχέθηκαν από την Eurostat και την βάση δεδομένων: Human Mortality Database για διαφορετικές χρονικές περιόδους 1993 – 2013, 1900 – 2013 και 1957 – 2017, ανάλογα με την καταγραφή των δεδομένων που έχει πραγματοποιήσει η κάθε χώρα. Χρησιμοποιήθηκαν δεδομένα πληθυσμού για τον υπολογισμό του ποσοστού θνησιμότητας με βάση την ηλικία και το φύλο. Ομαδοποιήθηκε ο πληθυσμός σε μονοετείς ηλικιακές ομάδες για όλα τα έτη της ανάλυσης και κατασκευάστηκε ο αντίστοιχος Αδρός Δείκτης Θνησιμότητας (CDR). Σύμφωνα με τα ευρήματα, το μοντέλο θνησιμότητας **BGGM** παρουσιάζει ικανοποιητικά αποτελέσματα προσαρμογής (Andreopoulos et al., 2019) ακολουθώντας τα κατάλληλα κριτήρια αξιολόγησης (AIC, BIC) και σε σύγκριση με άλλα μοντέλα θνησιμότητας (έγινε σχετική ανάλυση στο κεφάλαιο 5).

Η έρευνα στα παραπάνω σύνολα δεδομένων, περικλείει ένα σαφώς μεγαλύτερο γεωγραφικό και χρονικό εύρος και στοχεύει στο να συμβάλει στην παγκόσμια επιστημονική συζήτηση γύρω από τα μοντέλα θνησιμότητας και την καταλληλότητά τους, εισάγοντας μια νέα κατανομή θνησιμότητας με 6 παραμέτρους, $f_{BGGM}(x;\theta,\xi,\kappa,\lambda,\alpha,\beta)$. Η μέχρι τώρα ανάλυση της BGGM κατανομής, φαίνεται να είναι σε θέση να παρέχει μια καλή προσαρμογή, ειδικά σε προχωρημένες ηλικίες.

Εφαρμογή σε Ευρωπαϊκά δεδομένα θνησιμότητας από το 1993 έως το 2013

Σε αυτή την ενότητα, παρουσιάζεται η εφαρμογή της προτεινόμενης συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας (BGGM) σε πραγματικά δεδομένα που αφορούν 22 χώρες της Ευρώπης, για τα έτη από το 1993 έως το 2013 με αναφορά και στα δύο φύλα. Η ανάλυση στηρίζεται στα στατιστικά στοιχεία θνησιμότητας κατά ηλικία, φύλο και αιτία θανάτου, όπως παρέχονται από την Ευρωπαϊκή Στατιστική Αρχή (Eurostat., 2018). Τα στοιχεία ως προς την ηλικία και το φύλο για τον πληθυσμό της Ελλάδας, βάσει της Απογραφής του Πληθυσμού του 2011, παρέχονται επίσης από την ΕΛ.ΣΤΑΤ. Η μαθηματική μοντελοποίηση (Team, 2013) των παραπάνω συναρτήσεων κατανομών, έγινε με χρήση του ανοιχτού κώδικα R (www.r-project.org) και τα πακέτα των αλγορίθμων σε επίπεδο βασικών κατανομών χρησιμοποιήθηκαν από την ψηφιακή βιβλιοθήκη του CRAN (Comprehensive R Archive) http://cran.r-project.org. Έγινε επίσης χρήση του πακέτου minpack.lm για τις αντίστοιχες εκτιμήσεις των 6 παραμέτρων, $f_{BGGM}(x;\theta,\xi,\kappa,\lambda,\alpha,\beta)$, του μοντέλου. Περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τον τρόπο κατασκευής του αλγορίθμου παρατίθενται τα παραρτήματα A_4 και A_5 στο τέλος της διατριβής.

Ακολουθείται η ίδια διαδικασία, όπως παρουσιάστηκε και στις προηγούμενες παραγράφους. Υπολογίζονται τα πραγματικά ποσοστά θνησιμότητας της Ευρώπης που είναι διαθέσιμα σε μορφή πίνακα και ονομάζονται πίνακες θνησιμότητας (Ahmad et al., 2001). Ένας πίνακας θνησιμότητας είναι μια σειρά από πιθανότητες θανάτου $q_x, q_{x+1}, \ldots, q_{\omega+1}$ ξεκινώντας από την αρχική ηλικία 0 και φτάνοντας μέχρι ένα ανώτατο όριο θεωρητικής βιολογικής ηλικίας (ετησίως, μηνιαίως ή εβδομαδιαίως) ω όπου κανένα άτομο δεν μπορεί θεωρητικά να επιβιώσει και q_x είναι η πιθανότητα ενός ατόμου ηλικίας x να πεθάνει στο χρονικό διάστημα $[x, x+1)$ για $x = a, a+1, \ldots, \omega-1$. Η αντίστοιχη πιθανότητα ενός ατόμου ηλικίας x να πεθάνει σε αυτό το διάστημα δίνεται από τη σχέση:

$$q_x = \frac{d_x}{l_x}$$

όπου d_x αντιστοιχεί στον αριθμό των θανούντων στο ηλικιακό διάστημα $[x, x+1)$ και δίνεται αντίστοιχα από τη σχέση $d_x = l_x - l_{x+1}$, όπου l_x είναι το πλήθος των ατόμων που ζουν στην ηλικία των x.

Στους πίνακες Θνησιμότητας περιλαμβάνονται ορισμένοι δείκτες (Elandt-Johnson et al., 1980) όπως είναι τα l_x, d_x, q_x, p_x για $x = 1,2,\ldots,\omega$, όπου ο συμβολισμός p_x αντιπροσωπεύει την πιθανότητα επιβίωσης ενός ατόμου ηλικίας x να μην πεθάνει στο διάστημα $[x, x+1)$. Με

την επέκταση του προηγούμενου ορισμού, η πιθανότητα ενός ατόμου ηλικίας x να επιβιώσει σε επιπλέον έτη, δίνεται από τη σχέση:

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

Η ανάλυση της θνησιμότητας στις 22 χώρες της Ευρώπης, γίνεται με τη νέα κατανομή θνησιμότητας που προέρχεται από τον συνδυασμό των Beta και Gompertz Generalized Makeham κατανομών. Το σημείο που πρέπει να τονιστεί ως βασικό συμπέρασμα και στα νέα δεδομένα για την BGGM κατανομή είναι ότι φαίνεται να προσαρμόζεται (goodness of fit) πολύ καλά σε ηλικίες άνω των 85 έως 90+, όπου όλες οι άλλες κατανομές (π.χ., Gompertz - Makeham) αδυνατούν να ακολουθήσουν την καθοδική τάση της πραγματικής θνησιμότητας (plateau) που συμβαίνει στις μεγάλες και πολύ μεγάλες ηλικίες.

Η πορεία που ακολουθεί η θνησιμότητα διαφοροποιείται ανάλογα με την ηλικία. Τα ποσοστά θνησιμότητας μειώνονται αμέσως μετά την ολοκλήρωση του πρώτου έτους ζωής και παραμένουν σε πολύ χαμηλά επίπεδα στις ηλικίες 5 έως 10 ετών (κεφάλαιο 5). Στη συνέχεια αυξάνονται απότομα κατά την περίοδο της εφηβείας και παραμένουν σταθερά ως τα πρώτα χρόνια της ενηλικίωσης. Μετά την ηλικία των 30 ετών η θνησιμότητα αυξάνεται εκθετικά μέχρι τα τέλη της δεκαετίας των 80 χρόνων. Στην παγκόσμια επιστημονική κοινότητα, εξακολουθεί να υπάρχει ανοικτή συζήτηση σχετικά με το ποια κατανομή ή ποιος νόμος θνησιμότητας εφαρμόζεται καλύτερα σε αυτές τις ηλικίες. Ωστόσο, η δυνατότητα ακριβών εκτιμήσεων της θνησιμότητας σε μεγάλες και πολύ μεγάλες ηλικίες, όταν παρατηρούνται αποκλίσεις από την εκθετική πορεία, είναι καθοριστική για τη βελτίωση των προβολών του μεγέθους του πληθυσμού και της ηλικιακής κατανομής.

Η **Beta Gompertz Generalized Makeham** κατανομή πληροί καλύτερα όλα τα βασικά κριτήρια ευελιξίας. Αν και αυτό το πλεονέκτημα μπορεί να αντισταθμιστεί εν μέρει από τον μεγαλύτερο αριθμό παραμέτρων που ενσωματώνονται σε αυτό το μοντέλο, όπως έχει αναφερθεί στις ενότητες 4 και 5 της διατριβής, η σημασία του δεν πρέπει να υποβαθμίζεται. Η αναγνώριση ενός μοντέλου που ταιριάζει καλύτερα στην δυναμική της θνησιμότητας σε μεγαλύτερες ηλικίες έχει μεγάλη σημασία στις χώρες χαμηλής θνησιμότητας, όπου η μακροζωία είναι η κύρια κινητήρια δύναμη πίσω από τις τάσεις θνησιμότητας. Επιπλέον, η μεγαλύτερη ακρίβεια στην πρόβλεψη του μεγέθους του πληθυσμού των μεγαλύτερων ηλικιακών ομάδων είναι σημαντική όχι μόνο στη δημογραφία αλλά και στη δημόσια οικονομία.

Με την παραπάνω ανάλυση επιχειρείται μια αποτύπωση των παραμέτρων της νέας προτεινόμενης κατανομής θνησιμότητας (BGGM) σε μεγαλύτερο εύρος δεδομένων. Μέσω των εκτιμήσεων των 6 παραμέτρων της γίνεται προσπάθεια κατανόησης της πορείας που ακολουθεί η ανθρώπινη θνησιμότητα, προκειμένου να επιτευχθεί μια ασφαλής μελλοντική πρόβλεψη της πορείας του φαινομένου και του τι τελικά το επηρεάζει.

Στον πίνακα 13, που βρίσκεται στο παράρτημα A_8, παρουσιάζονται οι τιμές των εκτιμήσεων των παραμέτρων της BGGM κατανομής για τις 22 χώρες της Ευρώπης ενδεικτικά για τα έτη από το 1993 έως το 2013, για τους άνδρες, ενώ για τις γυναίκες τα διαθέσιμα δεδομένα βρίσκονται στην αντίστοιχη ιστοσελίδα https://veegee.shinyapps.io/panagiotis_phd/, η οποία δημιουργήθηκε με σκοπό την συγκεντρωτική οπτικοποίηση των αποτελεσμάτων χαρτογραφικά για μεγάλο χρονικό εύρος (1960 – 2045) και για όλες τις χώρες της ανάλυσης. Η ιστοσελίδα επικαιροποιείται και εμπλουτίζεται συνεχώς με νέα δεδομένα και νέες τεχνικές ανάλυσης. Οι εκτιμήσεις εξήχθησαν από την κατασκευή του κατάλληλου αλγορίθμου στο λογισμικό R (παράρτημα A_7, πακέτο: minpack.lm).

Παρατηρώντας την διαγραμματική αποτύπωση των εκτιμήσεων των παραμέτρων από τον πίνακα 13 και το γράφημα 25 (παράγραφος 6.2), τα συμπεράσματα που προκύπτουν είναι ιδιαίτερα σημαντικά. Στο συγκεκριμένο γράφημα, που έγινε με το λογισμικό της *R*, μπορεί να φανεί η εξέλιξη / τάση που ακολουθεί η κάθε παράμετρος στα 21 χρόνια της χρονοσειράς, μέσω του κυλιόμενου μέσου, ξεχωριστά για άνδρες και γυναίκες.

Παράμετρος $\boldsymbol{\theta}$ – πορεία *βρεφικής θνησιμότητας* $[\mathbf{0}, \mathbf{1})$ *έτη*

Όπως και στο κεφάλαιο 5, επιλέγεται η ανάλυση της κάθε παραμέτρου με τη σειρά που εμφανίζονται στον πίνακα 13 και στην ιστοσελίδα https://veegee.shinyapps.io/panagiotis_phd/, του παραρτήματος A_8. Η τιμή της παραμέτρου $\boldsymbol{\theta}$ διαφοροποιείται και στα δύο φύλα (πίνακας 13 και ιστοσελίδα, γράφημα 25). Υπενθυμίζεται ότι στον νόμο Gompertz, η παράμετρος $\boldsymbol{\theta}$ εκφράζει την βρεφική θνησιμότητα του πληθυσμού της συγκεκριμένης χρονικής περιόδου που εξετάζεται (Jones, 2013). Συνεπώς η παράμετρος $\boldsymbol{\theta}$, επηρεάζεται από τους θανάτους νεογνών στην ηλικία 0 έως 1. Για την ανάλυση των 22 χωρών της Ευρώπης η μέση τιμή της παραμέτρου $\boldsymbol{\theta}$ διαμορφώθηκε για τους άνδρες να είναι στο $0{,}0000349$ και στο $0{,}0000361$ για τις γυναίκες αντίστοιχα. Ως μέση τιμή θεωρήθηκε όλο το εύρος των ετών 1993 έως 2013. Εξαιτίας της περιορισμένης χρονοσειράς (20 έτη) θεωρείται αμελητέα η όποια έλλειψη στατιστικής πληροφορίας από έτος σε έτος.

Ομαδοποιώντας τα αποτελέσματα για τις 22 χώρες της Ευρώπης που έλαβαν μέρος στην έρευνα προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα για την κάθε χώρα με τον αντίστοιχο πληθυσμό της ξεχωριστά για άνδρες και γυναίκες.

Στους άνδρες της **Γερμανίας** η παράμετρος $\boldsymbol{\theta}$ εμφανίζει μικρές αυξομειώσεις στο πέρασμα των χρόνων, με μία όμως τάση μείωσης. Στη **Γαλλία** εμφανίζονται πιο ήπια αποτελέσματα, με σταθερά χαμηλές τιμές θανάτων σε όλα τα χρόνια της ανάλυσης γύρω από την θνησιμότητα των νεογνών. Στη **Σουηδία**, χώρα πρότυπο ανάπτυξης και καλής διαχείρισης του συστήματος υγείας της, η βρεφική θνησιμότητα είναι πολύ χαμηλή, με εξαίρεση την χρονιά 1993 – 94 όπου εμφανίζει μία μικρή αύξηση. Η **Φινλανδία**, δεν ξεφεύγει από την πορεία των βόρειων χωρών, εμφανίζει χαμηλή βρεφική θνησιμότητα, αποτυπώνοντας το υψηλό βιοτικό επίπεδο της χώρας. Ενδεικτικό της καλής πορείας είναι η χωρίς διακοπές, μείωση της βρεφικής θνησιμότητας. Η **Νορβηγία** παρουσιάζει ένα πολύ μικρό ποσοστό θνησιμότητας νεογνών, με καθοδική τάση όσο περνάνε τα χρόνια. Η **Ισλανδία** το 2001 – 02, εμφανίζει μια απότομη αύξηση της βρεφικής θνησιμότητας, η οποία στην συνέχεια έπεσε κάτω από το μέσο όρο της παραμέτρου για την Ε.Ε. Η **Εσθονία** αδυνατεί να ακολουθήσει το πρότυπο των Σκανδιναβικών χωρών, αν και πολύ κοντά γεωγραφικά, παρουσιάζοντας έντονες διακυμάνσεις. Αυτό ίσως οφείλεται στην ταραγμένη πολιτική ιστορία της χώρας σε συνδυασμό με τον μικρό πληθυσμό της που επηρεάζει την ευαισθησία της παραμέτρου. Ομοίως και η **Λετονία**, όπου εμφανίζει και αυτή έντονες διακυμάνσεις της παραμέτρου. Το ανησυχητικό για την εξέλιξη του πληθυσμού είναι πως σε όλη την ανάλυση η βρεφική θνησιμότητα βρίσκεται συνεχώς πάνω από το μέσο όρο της παραμέτρου. Η γειτονική **Λιθουανία**, εμφανίζει σταθερά χαμηλές τιμές και μάλιστα μετά το 2004 έχει ελαφρά πτωτική πορεία (πίνακας 13 & γράφημα 24). Η **Πολωνία** έχει καταφέρει μια σημαντική μείωση της βρεφικής θνησιμότητας στο πέρασμα των χρόνων. Ενθαρρυντική εικόνα στη μείωση της παραμέτρου παρουσιάζει η **Ελβετία**, η οποία από το 1994 και μετά έχει καταφέρει να μειώσει σε πολύ χαμηλό επίπεδο την τιμή της παραμέτρου. Ομοίως το **Βέλγιο** και η **Δανία**, όπου η πρώτη από το 1998 και μετά μειώνει στο ελάχιστο δυνατό τους θανάτους νεογνών, αντίθετα οι Δανοί κινούνται οριακά πιο πάνω από τους Βέλγους αλλά με εξίσου χαμηλά ποσοστά. Η **Ολλανδία** παρουσίαζε το 1993 μέχρι το 1997 πολλές διακυμάνσεις που όμως φαίνεται να αντιμετωπίζονται σημαντικά, τουλάχιστον στο επίπεδο του ανδρικού πληθυσμού.

Συνεχίζοντας την ανάλυση για την περιοχή του **Ηνωμένου Βασίλειου**, παρουσιάζεται μια ιδιαιτερότητα ως προς την παράμετρο από το 1999 ως το 2006, όπου φαίνεται πως εκείνη την περίοδο είχε αύξηση θανάτων νεογνών. Γεγονός που επαληθεύεται από τα δημογραφικά στοιχεία (Eurostat 2018). Αν και η τιμή $\boldsymbol{\theta}$ γενικά στο χρονικό διάστημα της ανάλυσης παρουσιάζει σημαντικό στοχαστικό θόρυβο, φαίνεται να ομαλοποιείται από το 2007 και μετά. Προχωρώντας δυτικότερα, στην **Ιρλανδία**, η γενική εικόνα είναι οι χαμηλές τιμές θνησιμότητας νεογνών. Όμως το 2001 - 2002 παρουσιάζεται μία απότομη αύξηση και μία διαρκής μείωση με διακυμάνσεις. Τα αντίστοιχα δεδομένα για την **Ισλανδία**, την περίοδο 1993 – 1997, δείχνουν έντονες αλλαγές με μια τάση ομαλοποίησης.

Προχωρώντας στην κεντρική Ευρώπη, η **Τσεχία** παρουσιάζει μια όμοια εικόνα με την Ισλανδία, όπου και εδώ το 2001 - 02 παρουσιάζεται μια απότομη αύξηση. Ενώ η **Αυστρία**, βρίσκεται τα τελευταία χρόνια πολύ κάτω από τον μέσο όρο της παραμέτρου της Ευρώπης η βελτίωση στην υποδομή της υγειονομικής περίθαλψης στα νεογνά αποδίδει.

Κλείνοντας για τους θανάτους νεογνών στον ανδρικό πληθυσμό, οι Μεσογειακές χώρες εμφανίζουν σημαντικά ευρήματα. Η **Ελλάδα** (παράγραφος 5.3) βρίσκεται στο μέσο όρο της παραμέτρου με σταθεροποιητικές τάσεις ως προς την βρεφική θνησιμότητα. Η **Ιταλία**, ενώ ξεκίνησε με υψηλές τιμές, με σημείο αναφοράς το 2000 όπου σημειώθηκαν υψηλές τιμές θνησιμότητας - σταδιακά από το 2006 σημειώνει συνεχή πτώση του ποσοστού αυτού. Η **Ισπανία** ενώ στην αρχή η τιμή της ακολουθούσε ανοδική πορεία, στην συνέχεια μειώνεται σημαντικά. Αντίθετα, η γειτονική **Πορτογαλία** έχει συνεχώς υψηλότερη τιμή βρεφικής θνησιμότητας από την Ισπανία, όμως και εδώ εμφανίζει πτωτική τάση στο πέρασμα των χρόνων.

Από την άλλη, η περίπτωση των κοριτσιών διαφοροποιεί λίγο τα συμπεράσματα για την παράμετρο $\boldsymbol{\theta}$ εμφανίζοντας συνολικά χαμηλότερες τιμές για όλες τις χώρες της Ευρώπης. Στις γυναίκες της **Γερμανίας** η παράμετρος $\boldsymbol{\theta}$ εμφανίζεται με μια αύξηση τα πρώτα χρόνια που όμως αυτή δείχνει να μειώνεται κατακόρυφα από το 2011 και μετά. Όμοια συμπεράσματα και για την **Γαλλία** όπου φαίνεται ξεκάθαρα πως το έτος 2011 είναι κομβικής σημασίας για τις δύο χώρες. Στη **Σουηδία** η θνησιμότητα των νεογνών κινείται στη μέση τιμή της παραμέτρου (*0,0000361*), δείχνοντας μια αξιοσημείωτη σταθερότητα. Μάλιστα καταφέρνει να μειώσει σε μεγάλο ποσοστό την βρεφική θνησιμότητα ακόμα περισσότερο από το 2006 και μετά. Ομοίως, η **Νορβηγία** γενικά παρουσιάζει σταθεροποιητικές τάσεις οι οποίες βρίσκονται λίγο πάνω από το μέσο όρο. Καταφέρνουν όμως από το 2010 και μετά να μειώσουν εκπληκτικά τους πρόωρους θανάτους. Αντίθετα η γειτονική **Φινλανδία** παρουσιάζει μεγάλες διακυμάνσεις κυρίως το

χρονικό εύρος από το 2000 έως το 2004, οι οποίες διακυμάνσεις συνεχίζονται και αργότερα αλλά με σαφή πτωτική πορεία. Η παράμετρος στην **Ισλανδία**, ενώ το 1993 ξεκίνησε από χαμηλή τιμή, στη συνέχεια μετά από κάποιες διακυμάνσεις, φαίνεται να παρουσιάζει αυξητικές τάσεις την περίοδο 1996 - 98. Οι διακυμάνσεις συνεχίζονται με σταθεροποιητικές τάσεις οριακά πάνω από την μέση τιμή της παραμέτρου. Η γυναικεία βρεφική θνησιμότητα της **Εσθονίας** φαίνεται να παρουσιάζει πολλές αστάθειες σε όλο το εύρος της χρονοσειράς, όμως το αποτέλεσμα της παραμέτρου παραμένει σταθερά κάτω από τον μέσο όρο της Ευρώπης. Εστιάζοντας την έρευνα στην **Λετονία,** τα δεδομένα δείχνουν πως η χώρα εμφανίζει τις πιο σταθεροποιητικές τάσεις από όλα τα μέλη της Ε.Ε. Η **Λιθουανία** παρουσιάζει τιμές ακριβώς στο μέσο όρο της Ε.Ε., με κάποιο στοχαστικό θόρυβο την περίοδο 2009 – 12.

Συνεχίζοντας την ανάλυση προς την κεντρική Ευρώπη, η περίοδος 2001 - 2008 για την **Πολωνία**, εμφανίζει ραγδαία αύξηση των θανάτων νεογνών. Η κατάσταση φαίνεται να εξομαλύνεται από το 2010 ως σήμερα. Στην **Ελβετία**, η παράμετρος εμφανίζει τάσεις "σταθεροποίησης" - περιορισμένες αυξομειώσεις στην πορεία της ανάλυσης. Η **Ολλανδία** είναι από τις ελάχιστες χώρες της Ε.Ε. που αν και οριακά εμφανίζει αυξητική τάση, η οποία μάλιστα θα μπορούσε να έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον στο μέλλον. Ομοίως και στο **Βέλγιο**, όπου εμφανίζονται οριακά αυξητικές τάσεις αν και τα τελευταία 4 χρόνια δείχνουν να σταθεροποιούνται. Στη **Δανία**, η παράμετρος αν και βρίσκεται σε χαμηλά επίπεδα εμφανίζει έντονο στοχαστικό θόρυβο με μεγάλες διακυμάνσεις από διετία σε διετία.

Το **Ηνωμένο Βασίλειο**, παρουσιάζει και στο γυναικείο πληθυσμό εξαιρετικό ενδιαφέρον. Από το 1995 ως το 2002 υπάρχει μια γεωμετρική αύξηση της τιμής, το 2002 πέφτει κατακόρυφα όμως και πάλι αυξάνεται οριακά ως το 2013. Αντιστοίχως η **Ιρλανδία**, ξεκινώντας από υψηλή τιμή καταφέρνει να μειώσει την θνησιμότητα σημαντικά την διετία 1996 - 98, όμως από το 2002 παρουσιάζει μία ανησυχητικά αυξητική τάση ως σήμερα. Όμοια συμπεράσματα με την Ιρλανδία και η **Τσεχία**. Ανησυχητική αύξηση της παραμέτρου από το 2002 και μετά. Στην **Αυστρία**, ενώ ξεκινούν με μια ελαφριά αυξητική τάση στη συνέχεια η κατάσταση στη χώρα αλλάζει κυρίως από το 2002 και μετά.

Ολοκληρώνοντας την ανάλυση της παραμέτρου $\boldsymbol{\theta}$ με τις χώρες της Μεσογείου, η **Ελλάδα** το 1993 παρουσιάζει χαμηλή τιμή θνησιμότητας στα κορίτσια, από το 1997 όμως αυτό αρχίζει να αυξάνεται και από το 2009 δείχνει να σταθεροποιείται στην μέση τιμή της παραμέτρου για την Ευρώπη. Η **Ιταλία** παρουσιάζει πολλές διαβαθμίσεις, όμως βρίσκεται σταθερά κάτω από την

μέση τιμή της παραμέτρου, κυρίως από το 2004 και μετά. Η **Ισπανία**, έχει καταφέρει μια αξιοσημείωτη πτώση στην τιμή της βρεφικής θνησιμότητας, η οποία όμως συνεχίζει να κινείται και τελικώς να σταθεροποιείται στην μέση τιμή της παραμέτρου. Η **Πορτογαλία**, ξεκινώντας από υψηλή τιμή θνησιμότητας νεογνών καταφέρνει να την μειώσει σημαντικά. Αυτό όμως δεν κρατάει για πολύ, αφού από το 2000 υπάρχει μια αυξητική τάση των θανάτων που όμως πάλι μειώνεται από το 2008 και μετά για να καταλήξει και εδώ στην μέση τιμή της παραμέτρου.

Από την παραπάνω εξέλιξη, εξάγεται τελικά το συμπέρασμα πως οι άνδρες είναι πιο ευάλωτοι από τις γυναίκες στην ηλικία 0 έως 1. Τα ευρήματα από την ανάλυση, δείχνουν πως περισσότερα είναι τα νεογνά του ανδρικού φύλου που δεν επιβιώνουν στην κρίσιμη ηλικία των $[0\ ,\ 1)$ ετών.

Παράμετρος ξ – πορεία δημογραφικής γήρανσης *(κλίση Gompertz)*

Η γήρανση ορίζεται από το πηλίκο του πληθυσμού που βρίσκεται άνω των 70 ετών προς το σύνολο του πληθυσμού και συνήθως στη διεθνή βιβλιογραφία αναφέρεται ως κλίση Gompertz. Ουσιαστικά, η παράμετρος $\boldsymbol{\xi}$ είναι ένας παράγοντας που επηρεάζεται από την πορεία της δημογραφικής γήρανσης ενός πληθυσμού. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα του πίνακα 13 και των δεδομένων στην αντίστοιχη ιστοσελίδα https://veegee.shinyapps.io/panagiotis_phd/, του παραρτήματος A_8, της κατανομής BGGM, για τους άνδρες και τις γυναίκες της Ευρώπης, το $\boldsymbol{\xi}$ αποκτά μία μέση τιμή γύρω από το $0.1\ (\cong 0.096)$ για τους άνδρες και $0.2\ (\cong 0.240)$ για τις γυναίκες, αντίστοιχα. Και στη συγκεκριμένη περίπτωση, λόγω του περιορισμένου χρονολογικού εύρους της ανάλυσης, προτιμάται μία κεντρική μέση τιμή, θεωρώντας αμελητέο το αποτέλεσμα της μέσης τιμής από έτος σε έτος.

Τις τελευταίες δεκαετίες, οι θάνατοι στον δυτικό κόσμο συσσωρεύονται μετά τα 85+ έτη, με αποτέλεσμα να αυξάνεται και η αντίστοιχη τιμή του $\boldsymbol{\xi}$. Αυτό που παρατηρείται στο σύνολο της Ευρωπαϊκής Ένωσης είναι ότι το ποσοστό των ατόμων που βρίσκονται σε ηλικία εργασίας συρρικνώνεται, ενώ ο σχετικός αριθμός ατόμων άνω των 75 ετών διευρύνεται.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα των αντίστοιχων αναλύσεων για τις 22 χώρες της Ευρώπης από το 1993 έως το 2013, που έγιναν με το λογισμικό της **R** για την παράμετρο $\boldsymbol{\xi}$, της κατανομής BGGM, για τους άνδρες της **Γερμανίας**, η παράμετρος σταθεροποιείται στην τιμή γύρω από το 0.1 με μια αυξητική τάση από το 2006 και μετά. Ομοίως και για την **Γαλλία** το ποσοστό γήρανσης δείχνει να αυξάνεται. Μάλιστα όσο περνούν τα έτη ανάλυσης όλο και περισσότερο δείχνει να εμφανίζει ανοδική τάση. Τα δεδομένα για την **Σουηδία** δείχνουν πως

από το 1995 ως το 2001 η αύξηση της παραμέτρου οδηγεί σε περισσότερους υπερήλικες, με θετική αποτύπωση στη μακροζωία της χώρας. Από το 2002 όμως η αύξηση αυτή επιβραδύνεται και επιστρέφουν οι τιμές στον μέσο όρο της παραμέτρου. Οι άνδρες στη **Φινλανδία**, φαίνεται να έχουν μια σταθερά αυξητική τάση σε επίπεδο ποσοστού γήρανσης, με τους **Νορβηγούς** να έχουν καταφέρει να διατηρήσουν το ποσοστό γήρανσης ακριβώς στο μέσο όρο της Ε.Ε. Αντίθετα στην **Ισλανδία** οι άνδρες κινούνται γύρω από την μέση τιμή της παραμέτρου. Η διακύμανση από το 2005 ως το 2008 θα μπορούσε να θεωρηθεί ισορροπία της φύσης ή απλά μια στοχαστική διακύμανση της παραμέτρου με μεγάλο εύρος (έντονος στοχαστικός θόρυβος). Στην **Εσθονία**, ο ανδρικός πληθυσμός εμφανίζει το χαμηλότερο ποσοστό δημογραφικής γήρανσης, φαίνεται ως χώρα να έχει έναν νεανικό πληθυσμό που ουσιαστικά δεν φτάνει πολύ πέρα από τα 85 έτη. Η τάση όμως δείχνει πως όλο αυτό αντιστρέφεται με μία πορεία ανόδου της μεταβλητής. Η **Λετονία** έχει συνεχώς την χαμηλότερη τιμή στον παράγοντα «γήρανση», μαζί με την Εσθονία. Το γεγονός αυτό αποτυπώνεται από το πλήθος θανάτων, όπου ουσιαστικά από το 2009 και μετά «υπερβαίνουν» οι άνδρες το φράγμα των 90 ετών. Ομοίως και η **Λιθουανία**, μία χώρα όπου παρουσιάζει έναν από τους πιο νεανικούς πληθυσμούς της Ευρώπης με χαμηλά έως πολύ χαμηλά ποσοστά δημογραφικής γήρανσης. Η **Πολωνία**, δεν διαφοροποιείται από τον πληθυσμό γήρανσης των υπόλοιπων χωρών, εμφανίζοντας έναν γερασμένο πληθυσμό που βρίσκεται στον μέσο όρο της Ευρώπης. Η μακροζωία που απολαμβάνουν οι κάτοικοι στην **Ελβετία** έχει ως αντίκτυπο την αύξηση του πληθυσμού γήρανσης, με υψηλές τιμές της παραμέτρου. Το **Βέλγιο**, από το 2005 και μετά έχει μια συνεχώς αυξητική τάση του ποσοστού γήρανσης, με την **Δανία** και την **Ολλανδία,** να εμφανίζει πολλές αυξομειώσεις σε όλη τη χρονοσειρά της ανάλυσης.

Στο **Ηνωμένο Βασίλειο**, ο αντίστοιχος πληθυσμός έχει καταφέρει παρά την πολύ καλή ποιότητα ζωής να κρατήσει μια πολύ καλή ισορροπία ανάμεσα στους νέους και στους ηλικιωμένους, διατηρώντας ένα καλό πρότυπο ηλικιακής πυραμίδας. Ομοίως η **Ιρλανδία**, η οποία αποδίδει στην παράμετρο χαμηλές τιμές δημογραφικής γήρανσης με έναν νεανικό πληθυσμό χωρίς πολλούς υπερήλικες στο σύνολο της. Η **Τσεχία** παρουσιάζει από το 2001 ως το 2006 μια αύξηση υπερηλίκων, με θανάτους μετά τα 93 έτη, δείχνοντας μια ανθεκτικότητα του πληθυσμού της στο θάνατο, που όμως το 2007 επανέρχεται στο εύρος των υπόλοιπων χωρών. Στην **Αυστρία** οι άνδρες παρουσιάζουν μια αυξητική τάση που σίγουρα μελλοντικά θα απασχολήσει σε κοινωνικοοικονομικό επίπεδο. Η **Ελλάδα**, έχει μια αυξητική τάση σε επίπεδο γήρανσης, αν και κινείται εναλλάξ πάνω ή κάτω από τον μέσο όρο της παραμέτρου. Η **Ιταλία**

εμφανίζει σταθερότητα ως προς την σχετική θέση σε όλο το εύρος της χρονοσειράς. Στην **Ισπανία** και την **Πορτογαλία**, η δημογραφική γήρανση εμφανίζεται με ανοδική τάση, επίσης σε όλη τη χρονοσειρά.

Η περίπτωση των γυναικών διαφοροποιείται ως προς την παράμετρο ξ εμφανίζοντας συνολικά υψηλότερες τιμές για όλες τις χώρες της Ευρωπαϊκής Ένωσης κάτι αναμενόμενο αφού ο γυναικείος πληθυσμός εμφανίζει μια αντίσταση στη θνησιμότητα φτάνοντας συνολικά σε υψηλότερα ποσοστά ηλικιακών ομάδων.

Στη **Γερμανία** οι γυναίκες παρουσιάζουν μια αυξητική τάση σε επίπεδο δημογραφικής γήρανσης. Περισσότερες γυναίκες πλέον ζουν πολύ πάνω από τα 85 έτη ζωής. Στη **Γαλλία**, ενώ από το 1993 έως το 2011 η αύξηση του πληθυσμού των γυναικών που ξεπερνούν τα 85 έτη είναι εντυπωσιακή, από το 2011 και μετά παρατηρείται μία μεγάλη πτώση. Στη **Σουηδία**, παρατηρείται μια ισορροπία με μέση τιμή πάνω από το μέσο όρο. Από το 2006 και μετά εμφανίζεται μια εντυπωσιακή πτώση, δείχνοντας μια επαναφορά της ισχύος των νεαρών ατόμων. Τα δεδομένα στη **Φινλανδία** εμφανίζουν μία διαφοροποίηση στο μέσο όρο της παραμέτρου, από το 2006 καταφέρνουν να μειώσουν περαιτέρω την αύξηση του γερασμένου πληθυσμού. Στη **Νορβηγία**, παρουσιάζεται μία αυξητική τάση δημογραφικής γήρανσης με απότομη μείωση από το 2010 ως σήμερα. Η **Ισλανδία**, είναι η χώρα με τις πιο έντονες διακυμάνσεις, από έτος σε έτος με πολλές αυξήσεις και μειώσεις. Ομοίως οι γυναίκες στην **Εσθονία** παρουσιάζουν πολλές διακυμάνσεις, όμως και εδώ η επαναφορά στην "ισορροπία" είναι εμφανής από το 2004 και μετά. Στη **Λετονία**, όπως και στη **Λιθουανία**, ο γυναικείος πληθυσμός βρίσκεται σε ισορροπία όμως από το 2000 και μετά έχει μια τάση έντονων διακυμάνσεων, γεγονός το οποίο δείχνει να επηρεάζει την εξέλιξη. Η **Πολωνία** ενώ το 2001 παρουσιάζει κατακόρυφη αύξηση, από το 2002 έως το 2007 εμφανίζει κατακόρυφη πτώση και εν συνεχεία ισορροπία από το 2008 και μετά. Τα δεδομένα για τον γυναικείο πληθυσμό στην **Ελβετία**, αν και έχουν έντονες διακυμάνσεις - στοχαστικός θόρυβος[1], παραμένουν στο μέσο όρο της Ευρώπης με το **Βέλγιο** να εμφανίζει ανοδικές τάσεις από το 1993 με μία ξαφνική πτώση/άνοδο την 3ετία 2002 – 2004. Στη **Δανία** υπάρχει μια ισορροπία. Η **Ολλανδία** με το **Ηνωμένο Βασίλειο**, αν και πρόκειται για χώρες με διαφορετικό φυσικό και γεωγραφικό χαρακτήρα, εμφανίζουν αυξητική τάση γήρανσης του πληθυσμού και μια ένδειξη μείωσης της τιμής από το 2003 έως το 2013.

[1] Όταν η παράμετρος σε μία χρονοσειρά εμφανίζει απότομα «όροι» και «κοιλάδες» που δεν δικαιολογείται από την διαδικασία της ανάλυσης.

Η **Ιρλανδία** και η **Τσεχία**, εμφανίζουν έντονες διακυμάνσεις στα πρώτα χρόνια της ανάλυσης, ίσως οφείλεται και σε στοχαστικό θόρυβο, που όμως από το 1998 και 1996 αντίστοιχα, δείχνει μια σαφή τάση αύξησης της δημογραφικής γήρανσης. Στην **Αυστρία**, ενώ από το 1994 η αύξηση του ηλικιωμένου πληθυσμού αυξάνεται απότομα έως το 2003, από το 2004 και μετά έχει επανέλθει στην ισορροπία της μέσης τιμής της παραμέτρου. Τα δεδομένα για τον γυναικείο πληθυσμό της **Ελλάδας** παρουσιάζουν μια ισορροπία γύρω από την μέση τιμή της παραμέτρου. Από το 1993 έως το 2000 η αύξηση είναι σημαντική, όμως από το 2000 και μετά παρουσιάζεται πτώση με τις τιμές να επανέρχονται στην μέση τιμή. Στην **Ιταλία** η δημογραφική γήρανση εξελίσσεται με πολύ ενδιαφέροντα τρόπο: ενώ στην αρχή υπάρχει μία έντονη αυξητική τάση, στην πορεία αυτό αντιστρέφεται στα χρόνια της οικονομικής κρίσης 2003 - 08. Ομοίως η **Ισπανία** και η **Πορτογαλία,** που ενώ εμφανίζουν έντονες διακυμάνσεις έως το 2008, από το 2009 επέρχεται ισορροπία.

Ένα γενικό συμπέρασμα για την παράμετρο $\boldsymbol{\xi}$ στις 22 χώρες της Ευρώπης είναι πως ο γυναικείος πληθυσμός δείχνει να έχει μια σαφή ανθεκτικότητα ως προς το θάνατο. Οι γυναίκες εμφανίζονται συνολικά με «περισσότερο χρόνο ζωής», με αποτέλεσμα να προκαλείται αντίστοιχη αύξηση σε επίπεδο υπερήλικων γυναικείων πληθυσμών στις αντίστοιχες χώρες. Αξίζει όμως να αναφερθεί, πως διαχρονικά, η μέση τιμή του ανδρικού πληθυσμού μετατοπίζει τη μέση ηλικία θανάτου προς τα δεξιά – προστίθενται περισσότερα χρόνια ζωής - με αποτέλεσμα να δημιουργείται τελικά ένας γερασμένος πληθυσμός στο σύνολο της Ευρώπης που αφορά και τα δύο φύλα εξίσου.

Παράμετρος κ – συμβάντα που επηρεάζουν την πιθανότητα θανάτου σε ατομικό επίπεδο και εξαρτάται από την ηλικία

Η παράμετρος $\boldsymbol{\kappa}$ εξετάζει τον τυχαίο παράγοντα θανάτου, λόγω είτε της απότομης χειροτέρευσης της υγείας (ενδογενής παράγοντας) είτε εξωγενούς τυχαίου παράγοντα (π.χ. τροχαία ατυχήματα, αυτοκτονία). Μια τιμή του $\boldsymbol{\kappa}$ κοντά στο μηδέν, υποδηλώνει ότι η πιθανότητα ξαφνικού θανάτου είναι χαμηλή. Έχει παρατηρηθεί ότι η επίδραση της τυχαιότητας στη θνησιμότητα αυξάνεται στους νεαρούς ενήλικες - οι οποίοι συνήθως υιοθετούν έναν πιο επικίνδυνο τρόπο ζωής - καθώς και για τις ηλικίες μεταξύ 50 και 75 ετών, λόγω ειδικών περιπτώσεων ή ξαφνικών γεγονότων υγείας. Η παράμετρος $\boldsymbol{\kappa}$ είναι συνάρτηση της ηλικίας και επηρεάζεται άμεσα σε κάθε ανάλυση.

Ακολουθούν κάποια συμπεράσματα για τους ανδρικούς πληθυσμούς των 22 χωρών, αν και αποτελούν απλές υποκείμενες ενδείξεις, αφού πρόκειται για προσωπικά στοιχεία και είναι δύσκολο να εντοπιστούν και να αναλυθούν από τις αρμόδιες στατιστικές αρχές.

Στη **Γερμανία**, φαίνεται πως οι άνδρες υιοθετούν έναν επικίνδυνο τρόπο ζωής από το 2008 και μετά, με εμφάνιση έντονων αλλαγών στην «κίνηση» της παραμέτρου. Αυτό πιθανόν να αποτελεί δείγμα της οικονομικής ευμάρειας, όπου απαλλαγμένοι από το άγχος της επιβίωσης κινούνται ρισκάροντας περισσότερο στον τρόπο ζωής τους. Τα στοιχεία στη **Γαλλία** πριν από το 2002, φαίνεται να επηρεάζονται από τυχαίους παράγοντες που αυξάνουν την θνησιμότητα. Αξιόλογη πορεία εμφανίζει η **Σουηδία**, η οποία παρουσιάζει χαμηλά ποσοστά τυχαίου παράγοντα θνησιμότητας. Η εξέλιξη του *κ* στην **Φινλανδία** ακολουθεί μία "άστατη" πορεία από χρονιά σε χρονιά, διαφοροποιώντας τους Φινλανδούς από το προφίλ των σκανδιναβικών χωρών. Η **Νορβηγία** ακολουθεί το "σωστό" πρότυπο χαμηλής θνησιμότητας. Όπως και στις άλλες παραμέτρους και η τυχαιότητα παραμένει σε χαμηλά ποσοστά. Αν και το 2010 και μετά δείχνει σημάδια "επικίνδυνής" ζωής. Τα δεδομένα στην **Ισλανδία** εμφανίζουν μια απότομη αύξηση της τυχαιότητας που οδηγεί σε αύξηση θανάτων την περίοδο 2002 - 2006, με μια τάση εκ των υστέρων για ομαλοποίηση. Ίσως όμως η «έντονη» κίνηση της παραμέτρου να οφείλεται και σε στοχαστικό θόρυβο. Τα δεδομένα στην **Εσθονία**, δίνουν σταθερά σχεδόν μηδενικά ποσοστά σε επικίνδυνο τρόπο ζωής ή σε οτιδήποτε θα μπορούσε να έχει αρνητική εξέλιξη στην υγεία. Ομοίως και η **Λετονία**, με την **Λιθουανία**, εμφανίζουν πολύ χαμηλά ποσοστά τυχαιότητας. Ακολούθως και η **Πολωνία**, με τη διαφορά πως την περίοδο από το 2005 και μετά εμφανίζονται κάποιες εξάρσεις, οι οποίες όμως φαίνονται να επανέρχονται, αλλά αυτό δεν μειώνει το πόσο επηρεάζονται ως πληθυσμός. Η **Ελβετία**, από το 2002 και μετά, δείχνει να επηρεάζεται έντονα από τον τυχαίο παράγοντα κινδύνου. Ίσως οι εισροές διαφόρων εθνικοτήτων παρασύρουν τα δεδομένα του πληθυσμού σε πιο υψηλές τιμές. Στο **Βέλγιο,** τα δεδομένα το 1993 -1996, εμφανίζουν υψηλά ποσοστά θανάτων από τυχαίο παράγοντα, ομοίως και από το 2005 και μετά, το ποσοστό αυτό αυξάνεται μέχρι το 2011 και έκτοτε αποτυπώνει μια σχετική ισορροπία. Τα δεδομένα στην **Δανία** αποτυπώνουν μία "άστατη" συμπεριφορά. Χρόνο με τον χρόνο, η καθημερινότητα των Δανών φαίνεται να επηρεάζεται έντονα από τυχαίους παράγοντες κινδύνου και άλλες χρονιές να μην επηρεάζεται καθόλου, μεταβάλλοντας συνεχώς το ποσοστό θνησιμότητας. Στην **Ολλανδία**, αν και η χώρα έχει "ενοχοποιηθεί" για άσκηση ελεύθερης πολιτικής, αυτό δεν αντικατοπτρίζεται στην καθημερινότητα των Ολλανδών. Φαίνεται πως το 2010 μόνο υπάρχει μια αύξηση, η οποία μπορεί να θεωρηθεί και αμελητέα.

Ο πληθυσμός στο **Ηνωμένο Βασίλειο** δείχνει να επηρεάζεται λιγότερο από τυχαίους παράγοντες αύξησης της θνησιμότητας. Στην **Ιρλανδία,** οι κάτοικοι αντιμετωπίζουν ήπια τον τυχαίο παράγοντα κινδύνου στον καθημερινότητά τους, χωρίς απότομες μεταβολές. Ομοίως με τους Ιρλανδούς και η **Τσεχία** η οποία εμφανίζει μοναδική αύξηση την περίοδο 2001 – 2006, εκ των υστέρων υπάρχει μια ομαλοποίηση στην παράμετρο. Στην **Αυστρία** φαίνεται πως από το 2002 και μετά, η οικονομική ευημερία, παρουσιάζεται με μια αυξητική τάση στην παράμετρο κινδύνου και με μία παροδική ανάσχεση το 2010 - 2011. Στην **Ελλάδα** ο πληθυσμός φαίνεται να μην επηρεάζεται ως το 2006 από τυχαίο παράγοντα κινδύνου διατηρώντας μια καλή στάση, ενώ από το 2006 φαίνεται πως ο νεαρός πληθυσμός είναι πιο επιρρεπής. Τα δεδομένα στην **Ιταλία** εμφανίζουν αύξηση της παραμέτρου από το 2008. Τα στοιχεία από την **Ισπανία** και την **Πορτογαλία** ουσιαστικά αποτυπώνουν αύξηση τιμών της παραμέτρου από το 2001, συμπληρώνοντας την οικεία εικόνα όλων των μεσογειακών χωρών.

Συνεχίζοντας με το γυναικείο φύλο, στη **Γερμανία** τα δεδομένα δίνουν υψηλότερες τιμές σε σχέση με τους άνδρες της χώρας. Η σχετική θέση όμως της Γερμανίας παραμένει καλύτερη μεταξύ των γυναικών της υπόλοιπης Ε.Ε. Όμοια περίπτωση και η **Γαλλία,** με την παράμετρο να αποτυπώνει σχετικά χαμηλές τιμές. Ο γυναικείος πληθυσμός στη **Σουηδία**, ενώ αρχικά αναμενόταν με χαμηλότερα ποσοστά σε σύγκριση με τον ανδρικό πληθυσμό, αυτό δε συμβαίνει. Αν όμως περιοριστούν τα αποτελέσματα μεταξύ των γυναικείων πληθυσμών, τότε όντως η θέση της Σουηδίας είναι χαμηλή. Μόνη εξαίρεση την περίοδο από το 2007 και μετά, όπου εμφανίζεται μια αυξητική τάση. Στη **Φινλανδία** οι γυναίκες ακολουθούν έναν "άστατο" τρόπο αντιμετώπισης του τυχαίου κινδύνου με δυσάρεστες συνέπειες. Στην πορεία όμως οι εκτιμήσεις της παραμέτρου την τοποθετούν στον μέσο όρο των 22 χωρών. Η **Νορβηγία** ακολουθεί το σκανδιναβικό πρότυπο, διατηρώντας χαμηλά ποσοστά με κάποιες εξάρσεις στα όρια του στοχαστικού θορύβου. Ομοίως και η **Ισλανδία** που κινείται στη μέση τιμή της παραμέτρου. Σε υψηλότερα ποσοστά από τις προηγούμενες 4 χώρες βρίσκεται η **Εσθονία** αλλά με μία τάση μείωσης των ποσοστών θνησιμότητας που οφείλονται στον τυχαίο παράγοντα κινδύνου. Σε υψηλότερα ποσοστά γενικά αλλά με χαμηλότερες τιμές στην παράμετρο $\boldsymbol{\kappa}$ βρίσκεται η **Λετονία**. Ο γυναικείος πληθυσμός στη **Λιθουανία**, όπως και στην Εσθονία, κινείται σε υψηλότερα ποσοστά από τους άλλους γυναικείους πληθυσμού της Ε.Ε. Η **Πολωνία** εμφανίζει μία σαφή μείωση καθόλη την χρονοσειρά φτάνοντας στο σήμερα, με χαμηλή τιμή. Στο **Βέλγιο** οι γυναίκες βρίσκονται ακριβώς στο μέσο όρο της παραμέτρου με πτωτικές τάσεις στην πορεία

της εξέλιξης, όπως και οι γυναίκες της **Ελβετίας**, με μόνη εξαίρεση την αρχή της ανάλυσης. Στη **Δανία** τα γεγονότα δείχνουν πως ο πληθυσμός επηρεάζεται πολύ από τυχαίους παράγοντες.

Στην **Ολλανδία** και την **Αυστρία**, ομοίως με τον ανδρικό πληθυσμό, οι γυναίκες διατηρούν χαμηλά ποσοστά θνησιμότητας από τυχαίο παράγοντα. Στο **Ηνωμένο βασίλειο**, το 1993 ξεκινάει η παράμετρος με υψηλά ποσοστά, στην πορεία τα δεδομένα δείχνουν να αντιστρέφονται θετικά για τον γυναικείο πληθυσμό. Στην **Ιρλανδία** οι γυναίκες, ενώ το 1993 - 1996 είχαν κάποιες απότομες εξάρσεις στη συνέχεια η παράμετρος ομαλοποιείται. Ομοίως και στα δεδομένα της **Τσεχίας** παρατηρείται η ίδια περίπτωση, διατηρώντας με «σχετική ευκολία» τα χαμηλά ποσοστά τους. Στην **Ελλάδα** το 1993 έως το 2001 υπάρχει πτωτική τάση και μάλιστα σημαντικά χαμηλότερη από όλες τις χώρες της Ευρώπης, ενώ το 2002 είναι μια χρονιά ανόδου και επιστροφής της παραμέτρου στο μέσο όρο των γυναικείων πληθυσμών της Ε.Ε. Η παράμετρος της ατομικής θνησιμότητας στην **Ιταλία** δεν είναι το ίδιο σταθερή σε όλη τη διάρκεια του στατιστικού ελέγχου, αλλά από το 2002 και μετά δείχνει μικρές αυξητικές τάσεις. Στην **Ισπανία**, ο πληθυσμός των γυναικών διατηρεί σχετικά χαμηλά ποσοστά ατομικής θνησιμότητας, ίσως με κάποιες εξάρσεις αλλά μέσα στο εύρος των υπόλοιπων χωρών της Ε.Ε. Η σχετική θέση της **Πορτογαλίας** εμφανίζεται ελαφρώς καλύτερη σε σχέση με της Ισπανίας.

Ολοκληρώνοντας την περιγραφή για την παράμετρο $\boldsymbol{\kappa}$, παρουσιάστηκαν κάποιες τάσεις που έδωσε η στατιστική ανάλυση των χωρών αυτών. Οι εκτιμήσεις που αποτυπώνονται γύρω από τον τυχαίο παράγοντα κινδύνου με δυσάρεστες συνέπειες στην θνησιμότητα σε ατομικό επίπεδο, φανερώνουν το πόσο «ευάλωτος» είναι ο άνθρωπος στην κάθε χώρα, με την ηλικία να παίζει τον καθοριστικό ρυθμιστή στην ένταση του φαινομένου. Συμπερασματικά, ο ανδρικός ευρωπαϊκός πληθυσμός από το 2005 και μετά δίνει ανοδικές τάσεις στο σύνολο των υπό εξέταση χωρών, σε αντίθεση με τους γυναικείους πληθυσμούς αυτών, που παραμένουν σε ένα συγκεκριμένο εύρος της παραμέτρου χωρίς να παρεκκλίνουν σημαντικά.

Παράμετρος λ – συμβάντα που επηρεάζουν το σύνολο του πληθυσμού μια χώρας

Η παράμετρος $\boldsymbol{\lambda}$ αναφέρεται, σε συμβάντα που επηρεάζουν ολόκληρο τον πληθυσμό μιας χώρας έχοντας άμεσο αντίκτυπο στα ποσοστά της θνησιμότητας και είναι ανεξάρτητη της ηλικίας, αφού επιδρά στο σύνολο του πληθυσμού ισομερώς. Κατά την ανάλυση, παρατηρούνται έντονες διακυμάνσεις που ίσως οφείλονται σε διάφορα κοινωνικά (π.χ. πόλεμος, ασθένειες κλπ.) και οικονομικά (π.χ. χαμηλό εισόδημα, οικονομική κρίση κλπ.) γεγονότα που όπως φαίνεται διαμορφώνουν τα ποσοστά θνησιμότητας σε ολόκληρο τον εξεταζόμενο πληθυσμό. Όταν η τιμή της παραμέτρου βρίσκεται κοντά στο μηδέν αποτυπώνεται μια φυσιολογική πορεία στην εξέλιξη του πληθυσμού της κάθε χώρας, μη επηρεαζόμενο από εξωτερικούς παράγοντες. Προσεγγίζοντας το φαινόμενο πιθανοθεωρητικά, η παράμετρος $\boldsymbol{\lambda}$ εκφράζει το βαθμό επιτυχίας / αποτυχίας με τον οποίο αντιμετωπίζει ένας πληθυσμός το θάνατο (η $\boldsymbol{\lambda}$ ακολουθεί την Διωνυμική κατανομή Bernoulli, $\boldsymbol{\lambda} \sim Bernoulli(p, q)$) σε κάθε ηλικία: όσο χαμηλότερη η τιμή της παραμέτρου (τιμή κοντά στο 0) τόσο μεγαλύτερη η «επιτυχία» αντιμετώπισης του θανάτου.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα των αντίστοιχων αναλύσεων για τις 22 χώρες της Ευρώπης από το 1993 έως το 2013, που έγιναν σε περιβάλλον της **R** για την παράμετρο $\boldsymbol{\lambda}$, αρχικά για την **Γερμανία**, φαίνεται πως ο ανδρικός πληθυσμός στο πέρασμα των χρόνων επηρεάζεται σημαντικά από εξωγενείς παράγοντες, εμφανίζοντας την μεγαλύτερη αύξηση από το 2004 έως το 2009, ενώ μετά μειώνεται σημαντικά. Ίσως η οικονομική ευημερία της χώρας παίζει κάποιο ρόλο σε αυτό (υποδομές υγείας και τεχνολογίες πρόβλεψης φαινομένων – καταστροφών). Στη **Γαλλία**, την περίοδο από το 1993 έως το 1999 φαίνεται πως εξωτερικά γεγονότα επηρεάζουν σημαντικά την θνησιμότητα του ανδρικού πληθυσμού, ενώ φαίνεται ότι τα έτη 2000 - 07 δείχνουν να επηρεάζουν τους Γάλλους. Η σχετική θέση της **Σουηδίας** είναι από τις καλύτερες μεταξύ των χωρών υπό την συγκεκριμένη παράμετρο. Η **Φινλανδία** κυρίως από τα έτη 2003 έως το 2007 παρουσιάζει μια πολύ έντονη αύξηση της παραμέτρου που όμως δείχνει να σταθεροποιείται από το 2010 και μετά. Στη **Νορβηγία**, από το 2005, εμφανίζονται οι έντονες διακυμάνσεις με αντίστοιχες παροδικές αυξήσεις και μειώσεις. Στην **Ισλανδία** τις περιόδους από το 1998 έως το 2000 και από το 2005 έως το 2007 φαίνεται πως ο πληθυσμός επηρεάζεται με αντίστοιχη αύξηση της θνησιμότητας. Σε όλες τις υπόλοιπες περιόδους τα δεδομένα εμφανίζονται ελαχιστοποιημένα. Στην **Εσθονία** παρατηρείται ότι ο πληθυσμός επηρεάζεται σε υψηλό βαθμό από εξωτερικούς παράγοντες κινδύνου, αφού καθόλη τη διάρκεια των ετών παρουσιάζονται διακυμάνσεις με ποικίλες εντάσεις. Η **Λετονία** ως χώρα δεν έχει καταφέρει να

"μηδενίσει" ποτέ την τιμή της παραμέτρου, καταφέρνει ωστόσο να κινηθεί μέσα στο εύρος της παραμέτρου για το σύνολο των 22 χωρών. Η **Λιθουανία**, είναι η μόνη χώρα της Ευρώπης που από το 1993 εμφανίζει υψηλά ποσοστά επηρεασμού από εξωτερικούς κοινωνικοοικονομικούς παράγοντες. Ομοίως και η χώρα της **Πολωνίας**, η οποία εμφανίζει έντονες διακυμάνσεις. Το ασταθές ίσως πολιτικό τους σύστημα φαίνεται πως επηρεάζει αρνητικά τον πληθυσμό, μεταβάλλοντας ποικιλόμορφα τα ποσοστά θνησιμότητας. Η **Ελβετία** μαζί με την **Δανία**, εμφανίζουν έντονες έως πολύ έντονες διακυμάνσεις κατά περίπτωση. Στο **Βέλγιο,** ο πληθυσμός από το 1996 έως και σήμερα εμφανίζει ανοδική τάση. Στην **Ολλανδία**, όπως και στην Νορβηγία, παρατηρούνται αυξητικές τάσεις της παραμέτρου από το 2005.

Το **Ηνωμένο Βασίλειο** παρά την αυξητική τάση που έχει σημειώσει στην εισροή οικονομικών μεταναστών, αλλά και τις διάφορες κοινωνικοοικονομικές αλλαγές στη χώρα, έχει καταφέρει να βρει μια ισορροπία. Στην **Ιρλανδία,** ο πληθυσμός βρίσκεται στο καλύτερο δυνατό επίπεδο σε ολόκληρη την Ευρώπη, μαζί με τους Σουηδούς. Τα δεδομένα στην **Τσεχία** φαίνεται να επηρεάζουν τον πληθυσμό από εξωτερικούς παράγοντες κατά τη διετία 1998 - 2000 και 2005 – 2007. Ο ανδρικός πληθυσμός της **Αυστρίας**, εμφανίζει το 2004 μια κατακόρυφη άνοδο και παραμένει σε υψηλά ποσοστά έως το 2012. Η σχετική θέση της **Ελλάδας** εμφανίζεται δυσμενής με υψηλά ποσοστά θνησιμότητας από το 1999 έως και το 2010. Η κοινωνική αναστάτωση που επήλθε στη χώρα λόγω της κρίσης έχει επηρεάσει την θνησιμότητα. Ίσως θα πρέπει να υπολογιστεί και η αύξηση εισροής μεταναστών στην ενδοχώρα, άλλωστε το προσφυγικό αποτελεί θέμα μείζονος σημασίας για τις χώρες της νοτιοανατολικής Ευρώπης. Αλλαγή πορείας εμφανίζεται από το 2011 που δείχνει να ομαλοποιείται η κατάσταση. Η **Ιταλία** παρά τις κοινωνικοοικονομικές επιπτώσεις φαίνεται να μην επηρεάζεται σημαντικά ως προς την μεταβολή των ποσοστών θνησιμότητας, αν και από το 2007 εμφανίζονται κάποιες αλλαγές. Στην **Ισπανία,** ο μεγάλος καύσωνας του 1996 φαίνεται να επηρέασε τον πληθυσμό του 1997, ενώ από το 2001 η οικονομική κρίση δείχνει επίσης τις επιπτώσεις της με αύξηση των ποσοστών θνησιμότητας. Αντιστροφή δεδομένων παρατηρείται από το 2010. Τέλος στην **Πορτογαλία**, παρατηρούνται ελάχιστες μεταβολές, ίσως και λόγω του μικρότερου πληθυσμού, και μόνο τις περιόδους 2001 έως 2007 είχαν μια αξιόλογη αύξηση ποσοστών θνησιμότητας.

Αξιολογώντας την παράμετρο για τον γυναικείο πληθυσμό της κάθε χώρας, στη **Γερμανία** αν και τα ποσοστά θνησιμότητας σε συλλογικό επίπεδο, ανεξάρτητα της ηλικίας δεν μηδενίζονται σχεδόν ποτέ, ο παράγοντας που εξετάζεται δείχνει να ακολουθεί μελλοντικά μια πτωτική τάση. Στη **Γαλλία** ο χρόνος φαίνεται να είναι σύμμαχος των γυναικών, αφού η τάση της

παραμέτρου είναι συνεχώς μειούμενη από εξωτερικούς παράγοντες που επιβαρύνουν την θνησιμότητα. Στη **Σουηδία** ο πληθυσμός συνεχίζει χρόνο με το χρόνο να διατηρεί τα πολύ χαμηλά ποσοστά επηρεασμού της θνησιμότητας από εξωτερικούς παράγοντες. Ομοίως και στην **Φινλανδία**, όπου η πολιτική και κοινωνική σταθερότητα βοηθάει στη μείωση της παραμέτρου. Στη **Νορβηγία**, ο γυναικείος πληθυσμός παρουσιάζει όμοιες τάσεις με τους άλλους πληθυσμούς στην Ευρώπη, όμως από το 2010 και μετά, εμφανίζουν έντονες μειώσεις της λόγω εξωγενών παραγόντων. Ίδια στατιστική εικόνα της παραμέτρου παρουσιάζεται και για την **Ισλανδία**. Αντίθετη εικόνα παρουσιάζει ο γυναικείος πληθυσμός της **Εσθονίας**, που φαίνεται πως κοινωνικοί παράγοντες έχουν προκαλέσει μια αύξηση της θνησιμότητας. Στη **Λιθουανία** τα ποσοστά διατηρούνται ακριβώς στον μέσο όρο της παραμέτρου για το σύνολο της Ευρώπης, ομοίως και στην **Λετονία**. Στην **Πολωνία,** ενώ τα δεδομένα ως το 2006 δείχνουν να ακολουθούν τις ευρωπαϊκές τάσεις, τελικά από το 2007 παρατηρείται μια αυξητική τάση με σταθεροποίηση σε υψηλές όμως τιμές από το 2011 και μετά. Αντίθετα στην **Ολλανδία**, επικρατούν σταθεροποιητικές τάσεις σε όλα τα χρόνια της ανάλυσης. Οι κοινωνικές και οικονομικές επιπτώσεις που παρουσιάζονται δεν φαίνεται να επηρεάζουν σημαντικά τον πληθυσμό. Στην **Ελβετία**, τα δεδομένα συγκριτικά είναι λίγο πιο κάτω από τον Ολλανδικό γυναικείο πληθυσμό, αφού εμφανίζουν όμοια ποιοτικά χαρακτηριστικά. Ομοίως με την Ελβετία και την Ολλανδία, τα δεδομένα του **Βελγίου** παραμένουν σταθερά σε όλη την χρονοσειρά. Στον αντίποδα, η **Δανία,** η οποία το 2011 φαίνεται να επηρεάζεται έντονα και ξαφνικά από εξωτερικούς παράγοντες, με σημαντική μεταβολή στα ποσοστά θνησιμότητας του πληθυσμού.

Στο **Ηνωμένο Βασίλειο**, από το 2000 υπάρχει μία μικρή άνοδος στις τιμές της παραμέτρου η οποία φαίνεται να σταθεροποιείται στη συνέχεια της ανάλυσης. Στην **Ιρλανδία**, αν εξαιρεθεί η άνοδος της θνησιμότητας την περίοδο 1997 - 2000, από εκεί και μετά, η χώρα επανέρχεται σταδιακά στις μέσες τιμές της παραμέτρου της με συνεχή μείωση. Στην **Τσεχία**, μόνο μια μικρή αυξομείωση την περίοδο 1995 – 1997 παρατηρείται, αφού γενικά παρουσιάζει μια ισορροπία η παράμετρος. Στην **Αυστρία** η θετική αλλαγή ως προς την μακροζωία του πληθυσμού γίνεται πιο ξεκάθαρη από το 2000 και μετά με τάσεις μείωσης. Στην **Ελλάδα**, εκτός της περιόδου 1993 - 2002, φαίνεται να μην μεταβάλλονται σημαντικά τα ποσοστά συλλογικής θνησιμότητας, αντίθετα βρίσκονται σε ιδιαίτερα χαμηλές τιμές. Όμοια αποτελέσματα εμφανίζει και η **Ιταλία**. Ο γυναικείος πληθυσμός της **Ισπανίας** και της **Πορτογαλίας** φαίνεται να βρίσκεται στο μέσο όρο της παραμέτρου, χωρίς ιδιαίτερες αυξομειώσεις.

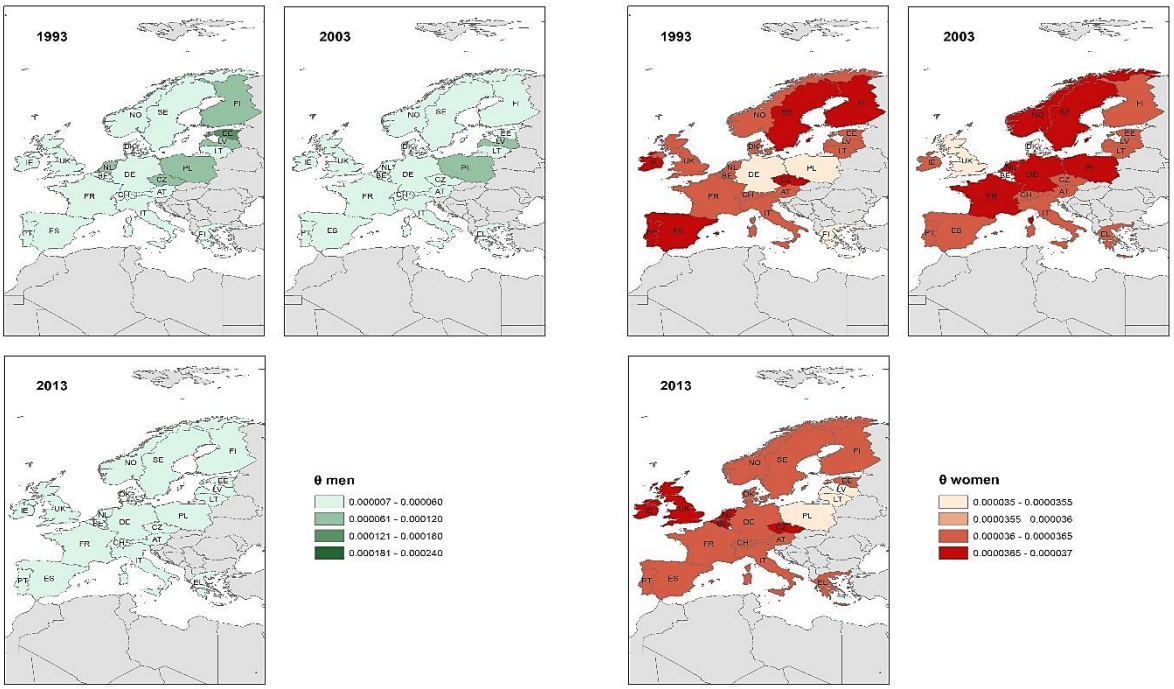
Ολοκληρώνοντας την ενότητα για τον Ευρωπαϊκό χώρο, για τις 22 χώρες και για τα έτη από το 1993 έως το 2013, τα όσα διατυπώθηκαν από την παραπάνω στατιστική ανάλυση για τις εκτιμήσεις των παραμέτρων, τόσο για άνδρες όσο και για γυναίκες, μπορούν να οπτικοποιηθούν και στους παρακάτω χάρτες (εικόνα 4), για τις χρονικές στιγμές 1993, 2003 και 2013 που έγιναν στο λογισμικό (ArcGIS). Επιλέχθηκαν τα συγκεκριμένα έτη με βάση τις πιο έντονες αλλαγές που σημείωσαν οι παράμετροι κατά την στατιστική ανάλυση.

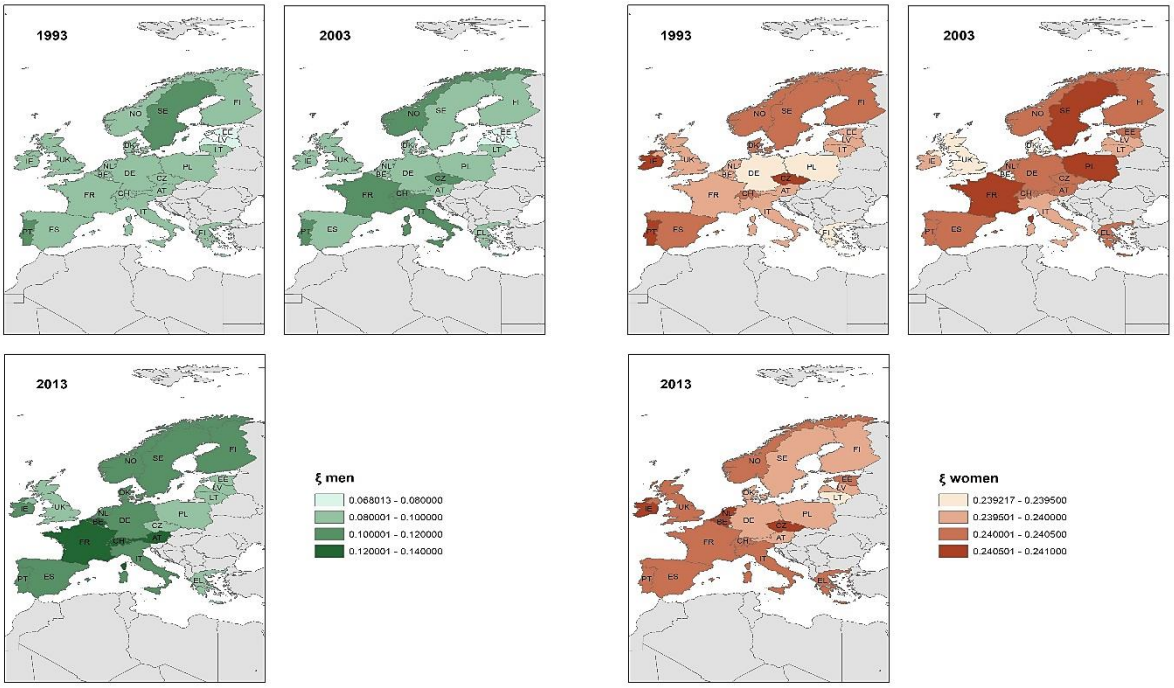
Επισημαίνεται πως η παραπάνω αποτύπωση των δημογραφικών τάσεων για την κάθε χώρα, δεν είχε ως στόχο να εξηγήσει το γιατί συνέβησαν αυτές οι διακυμάνσεις, αλλά να αποτυπώσει με μαθηματικό τρόπο τα συμβάντα, μέσω των παραμέτρων, που συνέβησαν στα 20 χρόνια και οδήγησαν στην αύξηση ή μείωση της ανθρώπινης θνησιμότητας ανά χώρα και ανά φύλο αντίστοιχα.

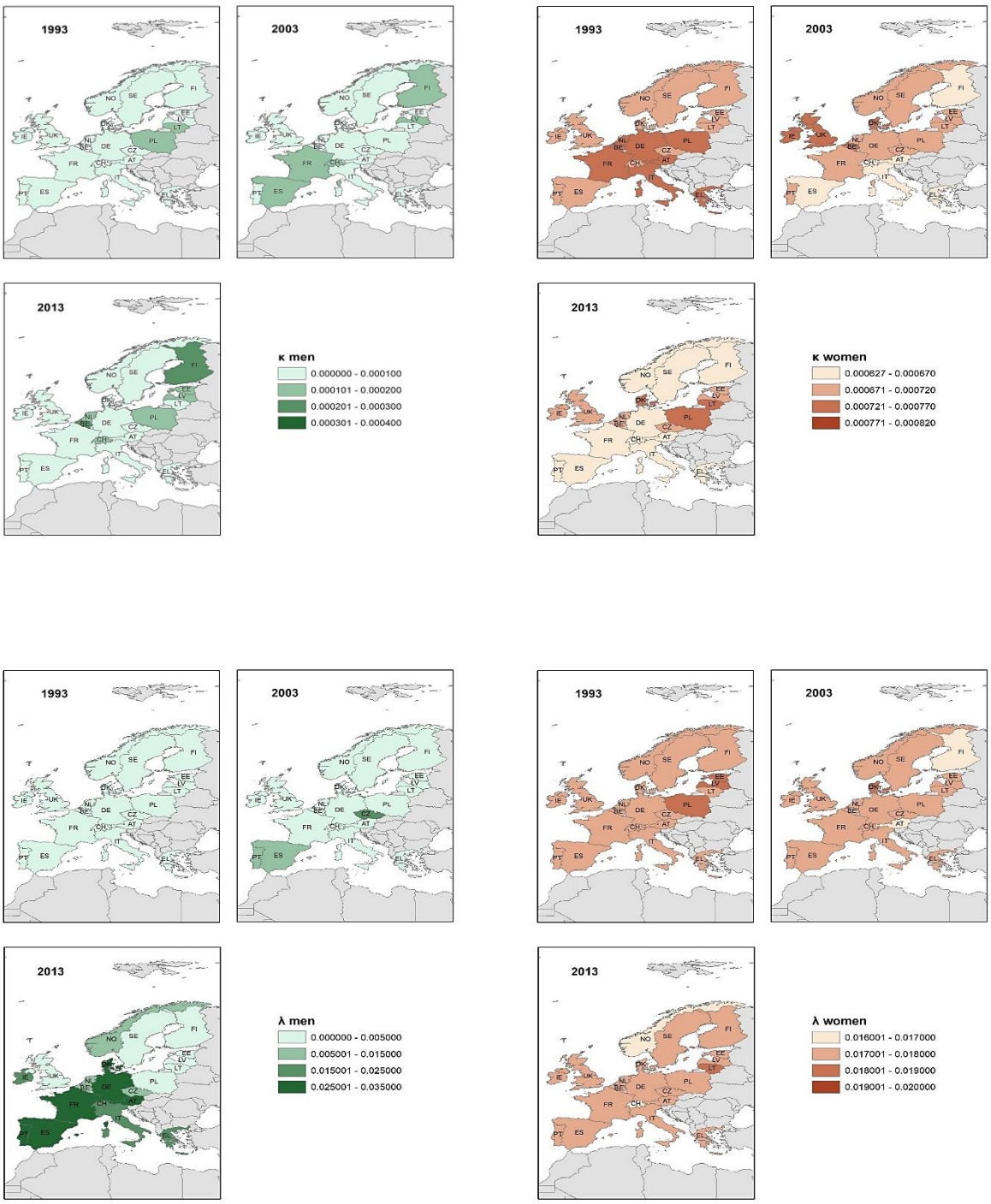
Δεύτερος στόχος της μελέτης ήταν η εφαρμογή του νέου μοντέλου μαθηματικής θνησιμότητας (BGGM distribution) σε δεδομένα διαφορετικών ευρωπαϊκών χωρών και σε διαφορετικές χρονικές στιγμές (1993 – 2013) ώστε

- να αξιολογηθεί η καλή προσαρμογή της νέας κατανομής με μεγαλύτερη αποτελεσματικότητα και
- να υπολογισθούν οι διαφορετικές τιμές των παραμέτρων της με στόχο να διερευνηθεί η χωρική και διαχρονική διαφοροποίησή τους.

Στους παρακάτω χάρτες παρουσιάζεται η οπτική διαφοροποίηση για τα 20 έτη της ανάλυσης (1993 – 2013) που αφορά τον Ευρωπαϊκό χώρο (άνδρες – γυναίκες), για την κάθε παράμετρο. Όπως μπορεί εύκολα να διαπιστωθεί εκ του αποτελέσματος, κρίνεται απαραίτητη μία βαθύτερη ανάλυση της κάθε παραμέτρου σε ένα διαφορετικό κοινωνικό/βιολογικό εύρος για την κάθε χώρα και σε ένα μεγαλύτερο χρονικό διάστημα, για να εξαχθούν πιο ασφαλή συμπεράσματα για το πιθανό «μονοπάτι» που ακολουθεί η θνησιμότητα.


1993
2003
2013
θ men
0.000007 - 0.000060
0.000061 - 0.000120
0.000121 - 0.000180
0.000181 - 0.000240
1993
2003
2013
θ women
0.000035 - 0.0000355
0.0000355 0.000036
0.000036 - 0.0000365
0.0000365 - 0.000037


1993
2003
2013
ξ men
0.068013 - 0.080000
0.080001 - 0.100000
0.100001 - 0.120000
0.120001 - 0.140000
1993
2003
2013
ξ women
0.239217 - 0.239500
0.239501 - 0.240000
0.240001 - 0.240500
0.240501 - 0.241000



Εικόνα 4: Ενδεικτικές χαρτογραφικές απεικονίσεις των εκτιμήσεων των παραμέτρων για τα δεδομένα θνησιμότητας των 22 χωρών της Ευρώπης, τόσο για άνδρες (males, αποχρώσεις πράσινου) όσο και για γυναίκες (females, αποχρώσεις κόκκινου), για τα έτη 1993, 2003 και 2013. Οι χρωματικές διαβαθμίσεις των εκτιμήσεων για την κάθε παράμετρο, δίνουν τις ανάλογες ενδείξεις για το «πιθανό» μονοπάτι που ακολουθεί η ανθρώπινη θνησιμότητα στο χρόνο. Η δημιουργία των χαρτών έγινε με το λογισμικό ArcGIS.

Σε μία προσπάθεια ανάλυσης του οπτικού αποτελέσματος της κάθε παραμέτρου (εικόνα 4), διαπιστώνεται για την παράμετρο $\boldsymbol{\theta}$, στον ανδρικό πληθυσμό, η βρεφική θνησιμότητα να είναι πιο έντονη το 1993. Σταδιακά όμως τα αποτελέσματα παρουσιάζουν σημαντική μείωση φτάνοντας τελικά το 2013 σε χαμηλά επίπεδα συνολικά. Στις ίδιες χρονικές στιγμές, για το γυναικείο πληθυσμό, το 1993 η βρεφική θνησιμότητα ξεκινά από μία υψηλή μέση τιμή, το 2003 αυξάνεται ακόμη περισσότερο σε ορισμένες χώρες (εικόνα 4), για να καταλήξει το 2013 σε μία σημαντική μείωση στο 90% των χωρών της Ευρώπης.

Σχετικά με την πορεία γήρανσης στις χώρες της Ευρώπης – παράμετρος $\boldsymbol{\xi}$ – εμφανίζεται αυτό που ήταν αναμενόμενο. Ο ανδρικός πληθυσμός εμφανίζει έντονη γήρανση, φαινόμενο το οποίο συνεχώς εντείνεται (εικόνα 4) χρονολογικά. Στις γυναίκες εμφανίζεται μεγαλύτερη ισορροπία χωρίς ιδιαίτερες αλλαγές από χρονιά σε χρονιά, διατηρώντας όμως τα ήδη υψηλά ποσοστά ηλικιωμένων γυναικών σε όλες τις χώρες. Το 2003 υπάρχει αύξηση του αριθμού των ηλικιωμένων γυναικών, που όμως το 2013 επανέρχεται στα επίπεδα του 1993.

Αυτό που αξίζει να αναφερθεί για την παράμετρο $\boldsymbol{\kappa}$ στους άνδρες και τις γυναίκες, είναι πως, ενώ το 1993 υπάρχει έξαρση η οποία διογκώνεται το 2003, φτάνει τελικά το 2013 σε χαμηλά επίπεδα, εξαιρώντας από αυτή την τάση τις Βαλτικές χώρες (Εσθονία, Λετονία, Λιθουανία – εικόνα 4) και την Πολωνία, όπου παραμένουν σε σχετικά υψηλά επίπεδα.

Τέλος το $\boldsymbol{\lambda}$, που αφορά το σύνολο του πληθυσμού της κάθε χώρας, στον ανδρικό πληθυσμό, εμφανίζει αύξηση από το 2000 και μετά για τις χώρες της Μεσογείου, με παράλληλη στασιμότητα για τις υπόλοιπες Βόρειες χώρες. Στο γυναικείο πληθυσμό διατηρείται μία μειούμενη τάση, αλλά όχι με ιδιαίτερα χαμηλή τιμή, υποδηλώνοντας μια συνεχή διαχρονική τρωτότητα από εξωτερικούς παράγοντες που επηρεάζει τελικά το γυναικείο φύλο.

6.2 Χωροχρονική ανάλυση των παραμέτρων της BGGM

Οι διαφορές που εμφανίζουν οι γραφικές παραστάσεις των καμπύλων θνησιμότητας αντανακλούν τις μεταβολές των ποσοστών και των αιτιών θνησιμότητας, οι οποίες προφανώς και θα σχετίζονται με τους ενδογενείς και εξωγενείς παράγοντες που επικρατούν στην κάθε χώρα. Η μελέτη των διαφορών στο σχήμα των καμπύλων θνησιμότητας με την πάροδο του χρόνου καθώς και μεταξύ περιφερειών/χωρών μπορεί να συμβάλουν στην αποκρυπτογράφηση της διαδικασίας γήρανσης και έτσι να «οδηγήσουν» σε κοινωνικές και πολιτικές στρατηγικές για την υγεία, ώστε να μειωθεί η πρόωρη θνησιμότητα, να βελτιωθεί η ποιότητα ζωής και - γιατί όχι - να παραταθεί η διάρκεια ζωής.

Σε αυτή την ενότητα, εφαρμόζεται το πιθανοθεωρητικό μοντέλο θνησιμότητας (BGGM distribution) σε Ευρωπαϊκά δεδομένα, για 22 χώρες, αλλά σε μεγαλύτερο χρονικό εύρος τουλάχιστον 50 ετών. Στις χώρες όπου η καταγραφή των δεδομένων θνησιμότητας ήταν εφικτή από το παρελθόν, έχει γίνει ανάλυση για τουλάχιστον 114 χρόνια. Σκοπός αυτής της ανάλυσης είναι να αξιολογηθεί σε όσο το δυνατόν μεγαλύτερο βάθος χρόνου η κατάλληλη προσαρμογή της υπό μελέτης κατανομής, να εκτιμηθούν οι αξίες της και να προσδιοριστούν πιθανές χωρικές και χρονικές διαφοροποιήσεις των χωρών. Η εφαρμογή της προτεινόμενης προσέγγισης απεικονίζεται με τη χρήση ιστορικών δεδομένων που παρέχονται από τη βάση δεδομένων ανθρώπινης θνησιμότητας (Human Mortality Database, 2019). Με τον τρόπο αυτό γίνεται προσπάθεια να υποδειχθούν ιστορικά στοιχεία και διαδρομές της ανθρώπινης θνησιμότητας χρησιμοποιώντας την νέα κατανομή.

Η μείωση της θνησιμότητας σε όλες τις ηλικίες αποτέλεσε τον κινητήριο παράγοντα της ταχείας αύξησης του πληθυσμού τα τελευταία 100 χρόνια (Kaa, 1987). Η θνησιμότητα επηρεάστηκε από διάφορους παράγοντες που πρέπει να ληφθούν υπόψη κατά το σχεδιασμό και την ερμηνεία των μεταβλητών. Η ηλικία και το φύλο είναι τα κύρια δημογραφικά χαρακτηριστικά που μελετώνται σχετικά με την επίδρασή τους στη θνησιμότητα.

Σε όλη την ανθρώπινη ιστορία, τα μειωμένα ποσοστά θνησιμότητας συνδέονται επίσης με την οικονομική ανάπτυξη και την κοινωνικοοικονομική ευημερία. Η αύξηση της μακροζωίας είναι, πέρα από κάθε αμφιβολία, ένα από τα μεγαλύτερα επιτεύγματα της ανθρωπότητας. Ωστόσο, παρά τη γενική θεαματική βελτίωση, εξακολουθούν να υφίστανται διαφοροποιήσεις μεταξύ ανδρών και γυναικών σε διαφορετικές γεωγραφικές περιοχές καθώς και σε σχέση με τις αιτίες θανάτου. Οι περιβαλλοντικές συνθήκες και το κοινωνικοοικονομικό πλαίσιο δεν είναι

ανεξάρτητες με τις διαφοροποιήσεις αυτές. Επιπλέον, καθώς η ηλικιακή δομή ενός πληθυσμού αλλάζει, λόγω της γήρανσης του πληθυσμού διαφοροποιείται και η συχνότητα εμφάνισης ασθενειών που σχετίζονται με τη γήρανση (Tragaki, & Panagiotakos, 2018).

Δεδομένα και Μεθοδολογία

Το πιθανοθεωρητικό μοντέλο που χρησιμοποιείται είναι η Beta Gompertz Generalized Makeham distribution κατανομή θνησιμότητας όπως έχει ήδη περιγραφεί (Andreopoulos et al., 2019) και βασίζεται στην μίξη των Beta και Gompertz γενικευμένων κατανομών Makeham. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δίνεται ως εξής:

$$f_{BGGM}(x) = \frac{(\theta e^{\xi x} + \lambda + \kappa x) e^{-\lambda x - \frac{\theta}{\xi}(e^{\xi x} - 1)}}{B(\alpha, \beta)} \cdot \left[(1 - e^{-\frac{\kappa}{\lambda} x^2 - \lambda x - \frac{\theta}{\xi}(e^{\xi x} - 1)}) \right]^{\alpha - 1} \cdot \left[\left(e^{-\frac{\kappa}{\lambda} x^2 - \lambda x - \frac{\theta}{\xi}(e^{\xi x} - 1)} \right) \right]^{\beta - 1}$$

$$\theta, \xi, \lambda, \kappa, \alpha, \beta > 0, x \geq 0$$

Εφαρμόζεται το νέο μοντέλο θνησιμότητας (κατανομή BGGM) σε δεδομένα πραγματικής θνησιμότητας διαφορετικών γεωγραφικών περιοχών, έτσι ώστε να αξιολογηθεί, πρώτον, η καλή του εφαρμογή και, δεύτερον, να εκτιμηθεί ένα εύρος τιμών για τις παραμέτρους του.

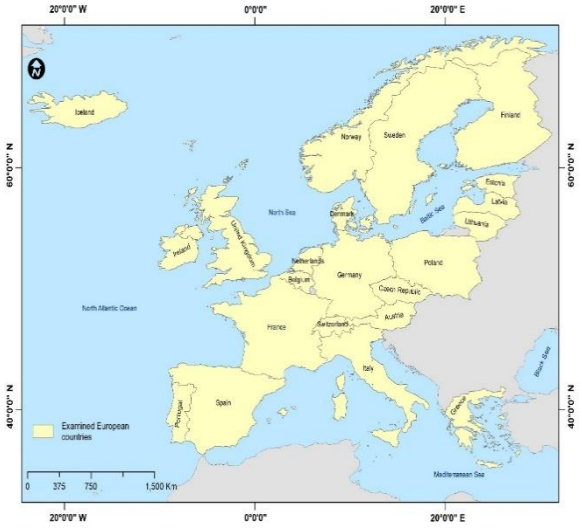
Τα στοιχεία προέρχονται από τη "βάση δεδομένων ανθρώπινης θνησιμότητας (HMD)" (HMD, 2019), η οποία είναι το αποτέλεσμα ενός έργου το οποίο έχει υποστηριχθεί από διάφορες ερευνητικές και επιστημονικές ομάδες από όλο τον κόσμο. Αναπτύχθηκε με στόχο την παροχή ανοικτής, διεθνούς πρόσβασης σε λεπτομερή στοιχεία θνησιμότητας και πληθυσμού για περισσότερες από 40 χώρες παγκοσμίως. Η πληθυσμιακή δημογραφική γήρανση και το φύλο αποκτήθηκαν από το "HMD" για το παρελθόν, ενώ από την Ευρωπαϊκή Στατιστική Αρχή (Eurostat, 2019α) αποκτήθηκαν δεδομένα για το εγγύς παρελθόν.

Η πιθανοθεωρητική μοντελοποίηση των δεδομένων και η αντίστοιχη στατιστική ανάλυση διεξήχθησαν με τη χρήση του ανοικτού κώδικα R (www.r-project.org) και των αντίστοιχων πακέτων αλγορίθμων από την ψηφιακή βιβλιοθήκη CRAN (Comprehensive R Archive).

Το πακέτο minpack.lm χρησιμοποιήθηκε για την εκτίμηση των 6 παραμέτρων της κατανομής $f_{BGGM}(x; \theta, \xi, \kappa, \lambda, \alpha, \beta)$.

Το βασικό σύνολο χωρικών δεδομένων που χρησιμοποιήθηκε για την χαρτογραφική απεικόνιση των εκτιμώμενων παραμέτρων, αλλά και των δεδομένων πρόβλεψης, δόθηκε επίσης από την Ευρωπαϊκή Στατιστική Αρχή (Eurostat, 2019b).

Ως στρώμα φορέα υποστηριζόμενο από Γεωγραφικά Πληροφοριακά Συστήματα (GIS) που αντιπροσωπεύει ευρωπαϊκή κλίμακα, αυτό το σύνολο δεδομένων περιλάμβανε το σύνολο των ευρωπαϊκών χωρών ως χωρικά χαρακτηριστικά πολυγώνου, όπως φαίνεται στη διπλανή εικόνα.



Η **χρονολογική ανάλυση** των 22 χωρών της Ευρώπης που έλαβαν μέρος στη έρευνα για τις παραμέτρους θνησιμότητας, μπορούν να ομαδοποιηθούν ως ακολούθως, πάντα σύμφωνα με την διαθεσιμότητα των δεδομένων, που υπάρχουν προς ανάλυση (*πηγή:* Human Mortality Database, 2020):

- Έτη ανάλυσης 1900 – 2013 (*114 χρόνια*)
  Δανία, Φινλανδία, Γαλλία, Ισλανδία, Ιταλία, Ολλανδία, Νορβηγία, Σουηδία, Ελβετία
- Έτη ανάλυσης 1947 – 2017 (*70 χρόνια*)
  Αυστρία
- Έτη ανάλυσης 1920 – 2015 (*95 χρόνια*)
  Βέλγιο
- Έτη ανάλυσης 1950 – 2014 (*64 χρόνια*)
  Τσεχία, Ιρλανδία
- Έτη ανάλυσης 1959 – 2017 (*58 χρόνια*)

Εσθονία, Λετονία, Λιθουανία

- Έτη ανάλυσης 1990 – 2017 (*27 χρόνια*)

  Γερμανία (*δεδομένα μόνο μετά την πτώση του τείχους του Βερολίνου)
- Έτη ανάλυσης 1981 – 2013 (*32 χρόνια*)

  Ελλάδα
- Έτη ανάλυσης 1958 – 2016 (*58 χρόνια*)

  Πολωνία
- Έτη ανάλυσης 1940 – 2015 (*75 χρόνια*)

  Πορτογαλία
- Έτη ανάλυσης 1908 – 2016 (*108 χρόνια*)

  Ισπανία
- Έτη ανάλυσης 1922 – 2016 (*94 χρόνια*)

  Ηνωμένο Βασίλειο

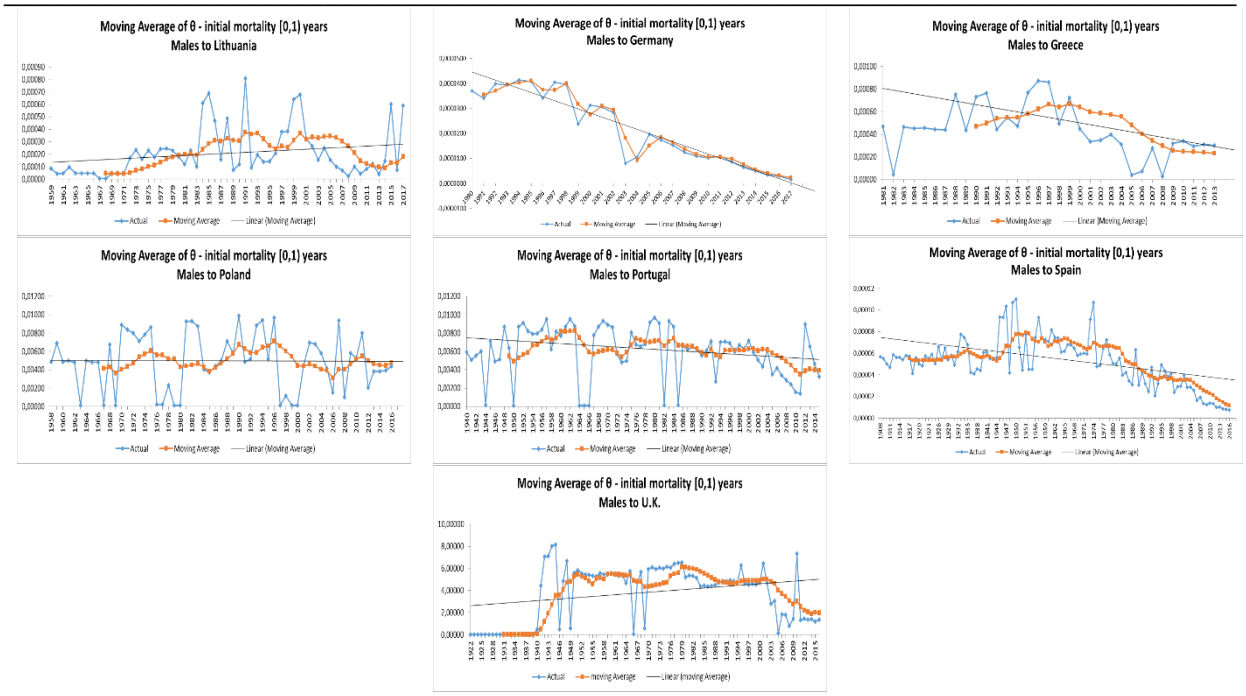
Σε αυτή την ενότητα δίνονται επεξηγήσεις και εκτιμάται το εύρος τιμών για κάθε μια από τις παραμέτρους, η οποία έχει τον ρόλο της αποτύπωσης της πορείας που ακολουθεί η θνησιμότητα και όχι να αναλύσει «γιατί» κινήθηκε με συγκεκριμένο τρόπο η κάθε παράμετρος στο χώρο και στον χρόνο.

Παράμετρος $\boldsymbol{\theta}$ – πορεία της *βρεφικής θνησιμότητας* $[\mathbf{0}, \mathbf{1})$ *έτη*

Η παράμετρος $\boldsymbol{\theta}$ επηρεάζεται από την θνησιμότητα στις μικρές ηλικίες $[0, 1)$ και εν συντομία αναφέρεται ως **βρεφική θνησιμότητα**. Η ανθρώπινη ζωή είναι πολύ εύθραυστη κατά τη στιγμή της γέννησης καθώς και τους πρώτους μήνες που την ακολουθούν. Η κίνηση της παραμέτρου αντανακλάται στην κορυφή που παρατηρείται παραδοσιακά στο αριστερό άκρο της καμπύλης θνησιμότητας. Η νεογνική θνησιμότητα σχετίζεται με τις οικονομικές και κοινωνικές συνθήκες (πόλεμοι, λιμοί) που επικρατούν σε κάθε χώρα και συνδέεται στενά με το βιοτικό επίπεδο του πληθυσμού. Με βάση και τα ιστορικά δεδομένα της κάθε χώρας από το παρελθόν της, το εύρος των τιμών της παραμέτρου $\boldsymbol{\theta}$ είναι κυμαινόμενο και καθορίζει υψηλότερες τιμές για τους αρσενικούς πληθυσμούς σε σύγκριση με τους θηλυκούς πληθυσμούς. Στην **Φινλανδία** και την **Ιταλία**, παρατηρώντας τα 114 χρόνια εξέλιξης, την περίοδο 1960 – 90 παρατηρείται μια αύξηση στους θανάτους νεογνών, η πορεία των ετών στη

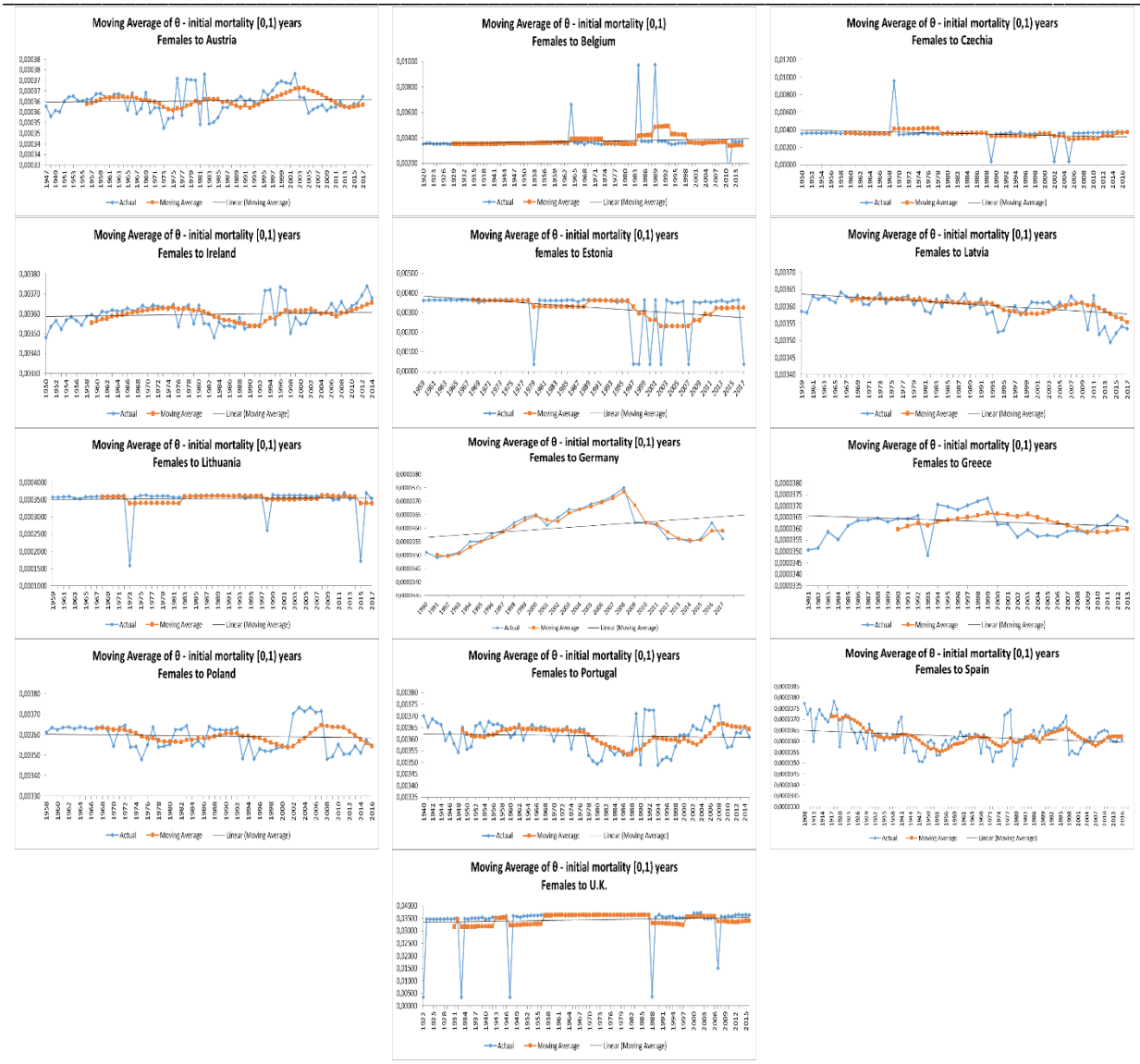
συνέχεια δείχνει μεγάλη πτώση. Η Φινλανδία όμως διατηρεί τα υψηλά ποσοστά. Η **Γαλλία** εμφανίζει έντονες διακυμάνσεις, με σημαντική αύξηση το 1936 έως το 1981 στους νεογνικούς θανάτους. Η εξέλιξη των ετών όμως φανερώνει μηδενική τιμή για την παράμετρο στην πορεία. Η **Ισπανία**, στα 108 χρόνια δεδομένων εμφανίζει πτωτική τάση με μόνη εξαίρεση το 1950 μέχρι το 1980, όπου τα δεδομένα έδειξαν αύξηση θανάτων νεογνών. Για την **Γερμανία** οι πληροφορίες είναι περιορισμένες. Δεδομένα υπάρχουν μόνο για τα τελευταία 27 χρόνια, μετά την πτώση του τείχους του Βερολίνου. Η ανάλυση δείχνει καθαρή πτωτική τάση στην ανδρική βρεφική θνησιμότητα.





Γράφημα 25α: Οι τιμές της εκτιμώμενης παραμέτρου του $\boldsymbol{\theta}$, για τον ανδρικό πληθυσμό. Τα γραφήματα/χρονοσειρές περιγράφουν το ρόλο καθώς και το εύρος τιμών για κάθε μια από αυτές τις παραμέτρους που εξετάζονται. Στοιχεία θνησιμότητας από τις 22 χώρες της Ευρώπης. Η γραμμή με κόκκινο χρώμα απεικονίζει τον κινητό μέσο όρο ανά 10 έτη, ενώ η μαύρη γραμμή παρουσιάζει την *linear forecast(moving average)* (ανάλυση με το λογισμικό της R).



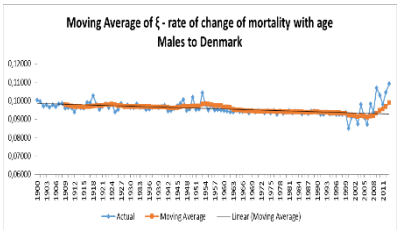


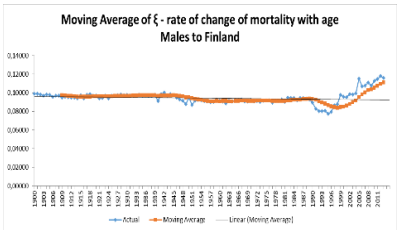
Γράφημα 25b: Οι τιμές της εκτιμώμενης παραμέτρου του $\boldsymbol{\theta}$, για τον γυναικείο πληθυσμό. Τα γραφήματα/χρονοσειρές περιγράφουν το ρόλο καθώς και το εύρος τιμών για κάθε μια από αυτές τις παραμέτρους που εξετάζονται. Στοιχεία θνησιμότητας από τις 22 χώρες της Ευρώπης. Η γραμμή με κόκκινο χρώμα απεικονίζει τον κινητό μέσο όρο ανά 10 έτη, ενώ η μαύρη γραμμή παρουσιάζει την *linear forecast(moving average)* (ανάλυση με το λογισμικό της R).

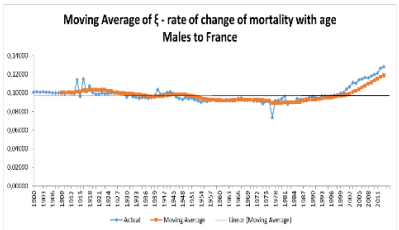
Παράμετρος ξ – *πορεία δημογραφικής γήρανσης (κλίση Gompertz)*

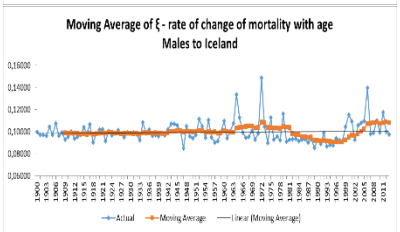
Η τιμή της παραμέτρου $\boldsymbol{\xi}$ επηρεάζεται από το πηλίκο του πληθυσμού άνω των 70 ετών προς το σύνολο του πληθυσμού για το συγκεκριμένο έτος. Ονομάζεται συντελεστής θνησιμότητας ή κλίση Gompertz. Το ποσοστό θνησιμότητας στους ανθρώπινους πληθυσμούς αυξάνεται εκθετικά με την ηλικία για ένα σημαντικό μέρος της διάρκειας ζωής. Θα μπορούσε να ειπωθεί ότι αντικατοπτρίζει το ποσοστό δημογραφικής γήρανσης ενός πληθυσμού. Τα

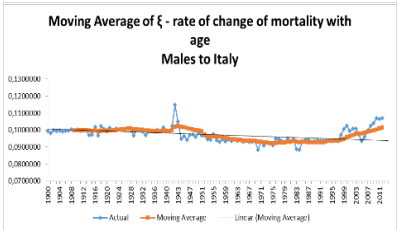
αποτελέσματα δείχνουν ότι η μέση τιμή της παραμέτρου ξ κυμαίνεται γύρω στο 0,1 (≅ 0,097) για τους άνδρες και 0,2 (≅0,240) για τις γυναίκες (γραφήματα 26α και 26b αντίστοιχα).

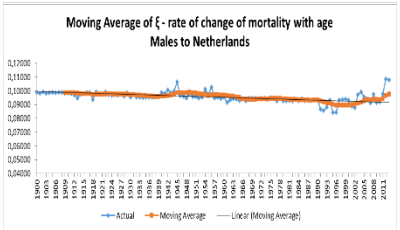


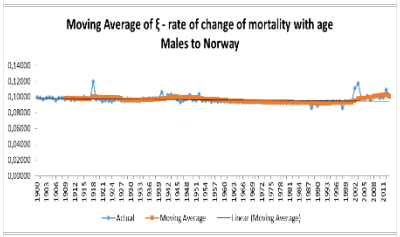


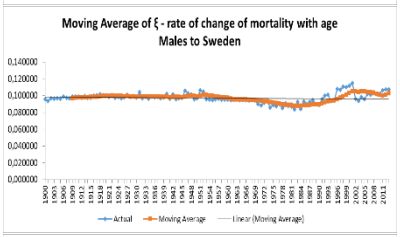


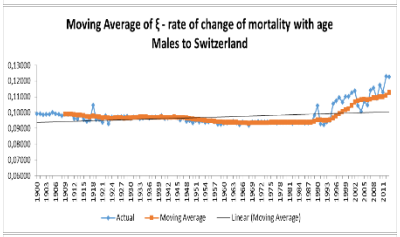


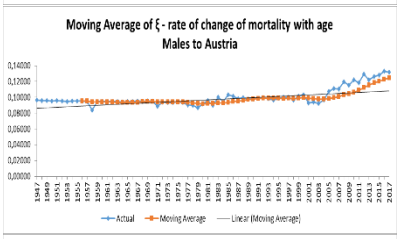


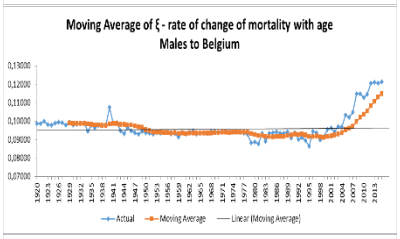


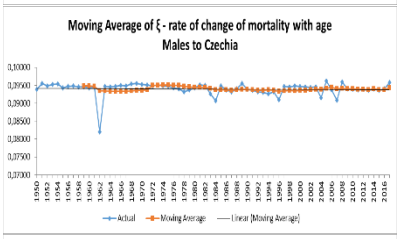


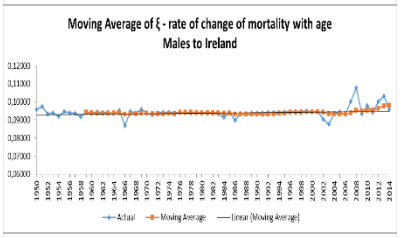


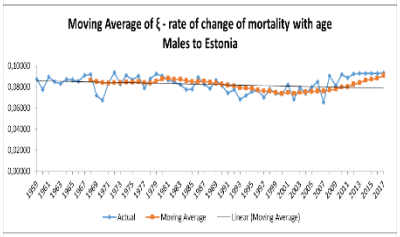


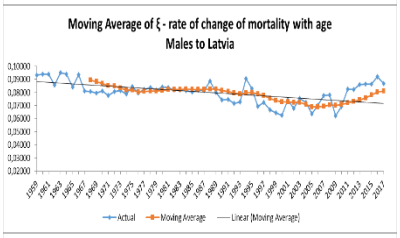


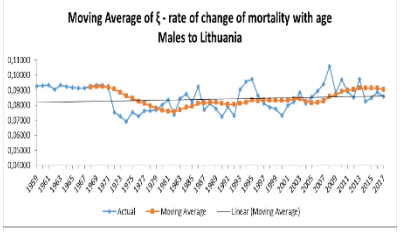


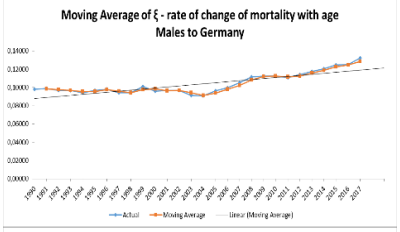


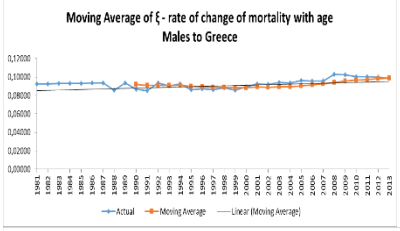


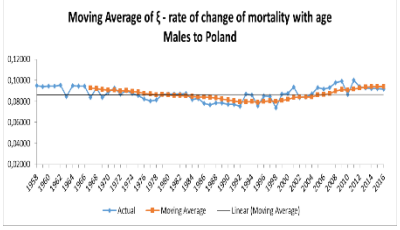


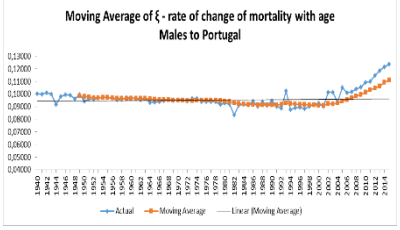


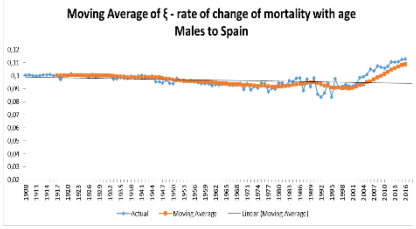


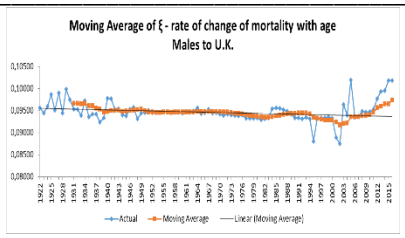






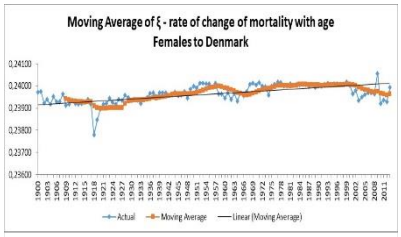


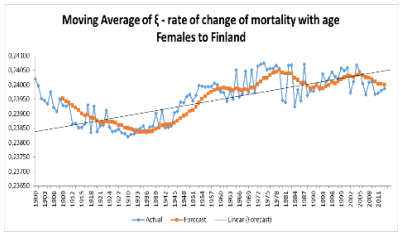


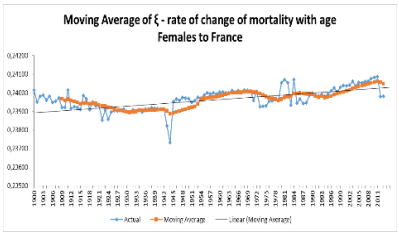


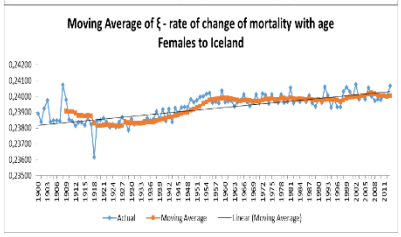
Γράφημα 26α: Οι τιμές της εκτιμώμενης παραμέτρου του ***ξ***, για τον ανδρικό πληθυσμό. Τα γραφήματα/χρονοσειρές περιγράφουν το ρόλο καθώς και το εύρος τιμών για κάθε μια από αυτές τις παραμέτρους που εξετάζονται. Στοιχεία θνησιμότητας από τις 22 χώρες της Ευρώπης. Η γραμμή με κόκκινο χρώμα απεικονίζει τον κινητό μέσο όρο ανά 10 έτη, ενώ η μαύρη γραμμή παρουσιάζει την *linear forecast(moving average)* (ανάλυση με το λογισμικό της R).

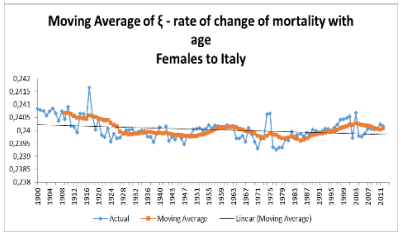
Εξετάζοντας πλέον σε μεγαλύτερο χρονικό βάθος, ο ανδρικός πληθυσμός παρέμεινε σταθερός κατά τη διάρκεια της ανάλυσης, σχεδόν σε όλες τις υπό μελέτη χώρες, γύρω από τη μέση τιμή της παραμέτρου ***ξ***. Στην Ιταλία, κατά την περίοδο 1940-1950, οι άνδρες άνω των 80 ετών έχουν αυξηθεί ως πληθυσμός, ένα φαινόμενο το οποίο θα μπορούσε να αποδοθεί, στη συμμετοχή της χώρας στον Β΄ Παγκόσμιο πόλεμο εκείνη την περίοδο (Andreopoulos et al., 2020). Οι νεαρές ηλικιακές ομάδες κατά τη διάρκεια του πολέμου μειώθηκαν, με αποτέλεσμα μόνο ο πληθυσμός των ηλικιωμένων να εμφανίζει μια μικρή αύξηση. Στον γυναικείο πληθυσμό της Ιταλίας, η δημογραφική γήρανση εξελίσσεται με έναν πολύ ενδιαφέροντα τρόπο, η παράμετρος ***ξ*** αποτυπώνει τα υψηλότερα ποσοστά δημογραφικής γήρανσης των γυναικών από όλες τις χώρες της Μεσογείου. Αντιστροφή της προηγούμενης ανοδικής τάσης παρατηρείται κατά τα έτη της οικονομικής κρίσης (2003-2008) (γράφημα 20b). Παραλληλίζοντας τα Ιταλικά με τα Σουηδικά δεδομένα τα αποτελέσματα είναι παρόμοια αλλά με λιγότερο στοχαστικό θόρυβο (γράφημα 26α και 26b).

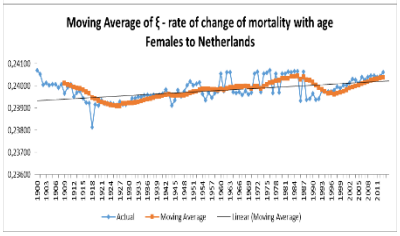














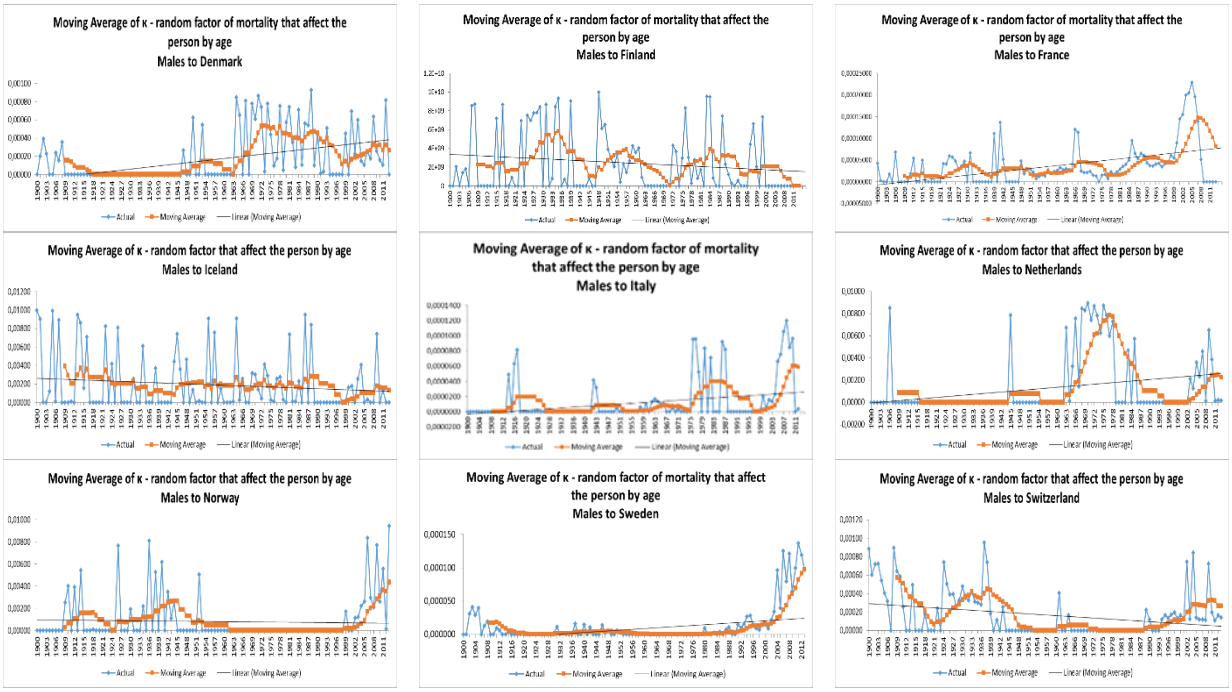
Γράφημα 26b: Οι τιμές της εκτιμώμενης παραμέτρου του ξ, για τον γυναικείο πληθυσμό. Τα γραφήματα/χρονοσειρές περιγράφουν το ρόλο καθώς και το εύρος τιμών για κάθε μια από αυτές τις παραμέτρους που εξετάζονται. Στοιχεία θνησιμότητας από τις 22 χώρες της Ευρώπης. Η γραμμή με κόκκινο χρώμα απεικονίζει τον κινητό μέσο όρο ανά 10 έτη, ενώ η μαύρη γραμμή παρουσιάζει την *linear forecast(moving average)* (ανάλυση με το λογισμικό της R).

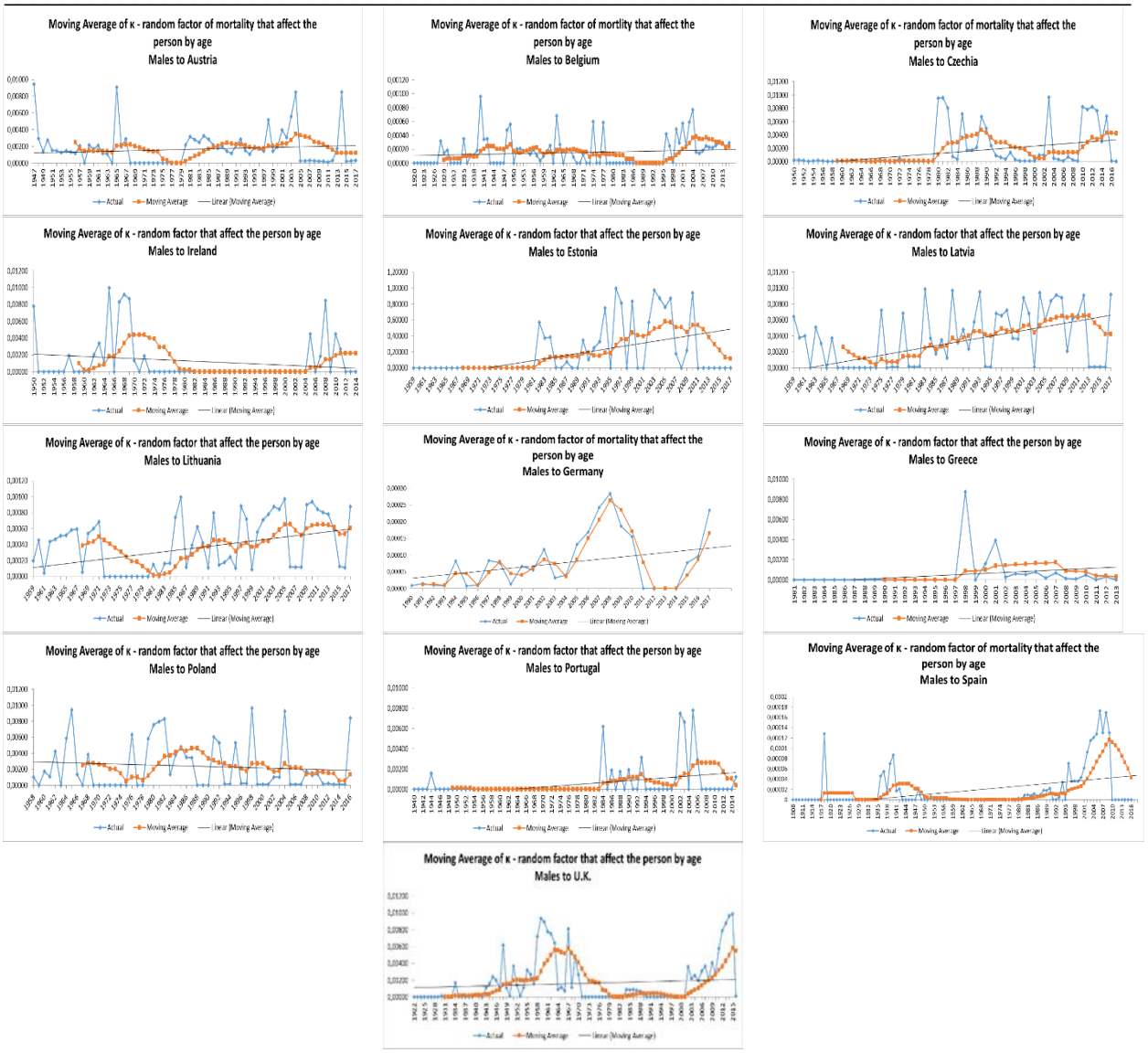
Συμπερασματικά, τόσο οι άνδρες όσο και οι γυναίκες εμφανίζουν μια σταθερή εξέλιξη στη δημογραφική γήρανση, η οποία πιστώνεται καλύτερα από το χρονολογικό βάθος των

δεδομένων. Υπάρχει μια γενικώς ομαλή, αλλά ανοδική τάση τα τελευταία χρόνια και για τα δύο φύλα. Οι μειούμενοι θάνατοι και το αυξανόμενο προσδόκιμο ζωής, για τις χώρες της Ευρώπης, θα μπορούσαν να ορισθούν ως προπομποί των δημογραφικών εξελίξεων για τα επόμενα χρόνια.

Παράμετρος κ – *τυχαίος παράγοντας κινδύνου εξαρτώμενος της ηλικίας*

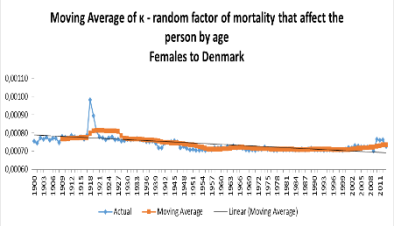
Η παράμετρος $\boldsymbol{\kappa}$ περιγράφει τον κίνδυνο ενός απροσδόκητου θανάτου σε ατομικό επίπεδο και έχει άμεση εξάρτηση από την ηλικία και το φύλο του ατόμου. Μια τιμή του $\boldsymbol{\kappa}$ κοντά στο μηδέν δείχνει ότι η πιθανότητα ξαφνικού θανάτου είναι χαμηλή. Για κάθε νέο άνθρωπο, το $\boldsymbol{\kappa}$ αναμένεται να είναι υψηλό κατά το πρώτο έτος της ζωής του ενώ στη συνέχεια αναμένεται να μειωθεί στην παιδική ηλικία. Οι τιμές της παραμέτρου εμφανίζουν αύξηση στην εφηβεία και την πρώιμη ζωή των ενηλίκων καθώς και σε ηλικίες 50 έως 75 ετών. Η παράμετρος $\boldsymbol{\kappa}$ αντικατοπτρίζει τις επιλογές του τρόπου ζωής, καθώς και τον κίνδυνο μιας οξείας αλλοίωσης της υγείας, ενός αυτοκινητιστικού ατυχήματος ή οποιουδήποτε άλλου απρόβλεπτου θανάτου. Το $\boldsymbol{\kappa}$ επηρεάζεται κατά κύριο λόγο από την ηλικία και λιγότερο από το φύλο. Άλλωστε και οι τιμές δείχνουν ότι υπάρχουν μικρές διαφορές μεταξύ των φύλων σε σύγκριση με άλλες παραμέτρους του μοντέλου (γράφημα 27α και 27b, αντίστοιχα).

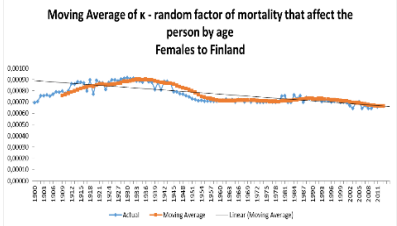


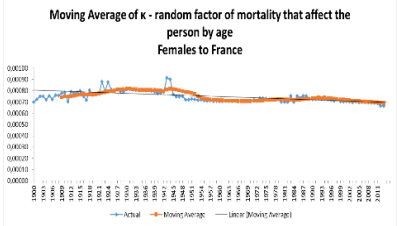


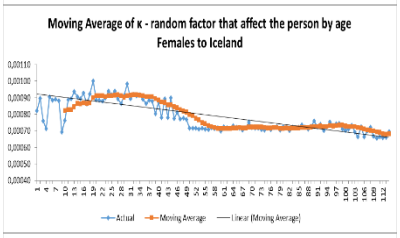
Γράφημα 27α: Οι τιμές της εκτιμώμενης παραμέτρου του ***κ***, για τον ανδρικό πληθυσμό. Τα γραφήματα/χρονοσειρές περιγράφουν το ρόλο καθώς και το εύρος τιμών για κάθε μια από αυτές τις παραμέτρους που εξετάζονται. Στοιχεία θνησιμότητας από τις 22 χώρες της Ευρώπης. Η γραμμή με κόκκινο χρώμα απεικονίζει τον κινητό μέσο όρο ανά 10 έτη, ενώ η μαύρη γραμμή παρουσιάζει την *linear forecast(moving average)* (ανάλυση με το λογισμικό της R).

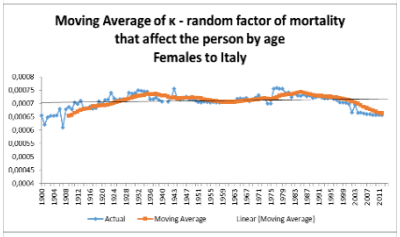
Οι πιο πρόσφατες χρονικά αυξήσεις στην παράμετρο ***κ*** που παρατηρούνται κυρίως στους αρσενικούς πληθυσμούς ενδέχεται να υποδηλώνουν αυξημένο κίνδυνο θανάτου, στοιχείο το οποίο θα μπορούσε να αποδοθεί στο σύγχρονο τρόπο ζωής.

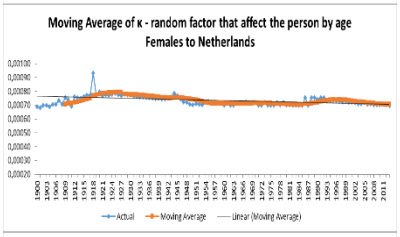

Moving Average of κ - random factor of mortality that affect the person by age
Females to Denmark
Actual
Moving Average
Linear (Moving Average)

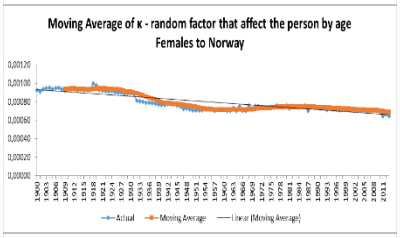

Moving Average of κ - random factor of mortality that affect the person by age
Females to Finland
Actual
Moving Average
Linear (Moving Average)

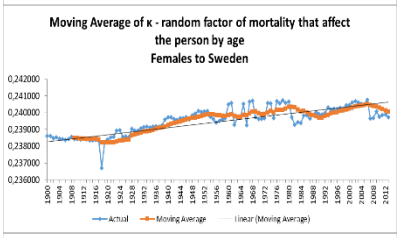

Moving Average of κ - random factor of mortality that affect the person by age
Females to France
Actual
Moving Average
Linear (Moving Average)

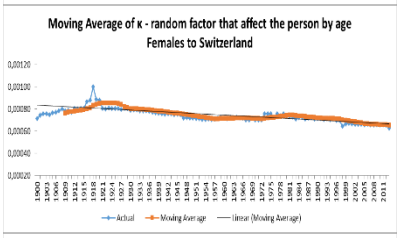

Moving Average of κ - random factor that affect the person by age
Females to Iceland
Actual
Moving Average
Linear (Moving Average)

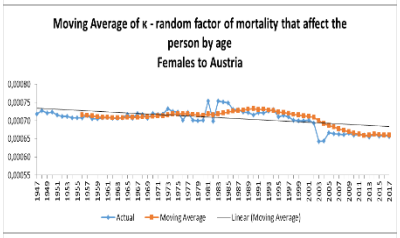

Moving Average of κ - random factor of mortality that affect the person by age
Females to Italy
Actual
Moving Average
Linear (Moving Average)

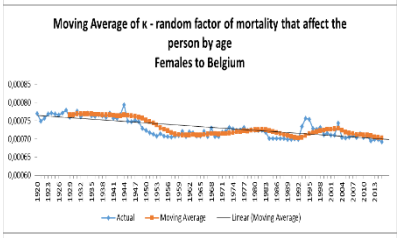

Moving Average of κ - random factor that affect the person by age
Females to Netherlands
Actual
Moving Average
Linear (Moving Average)

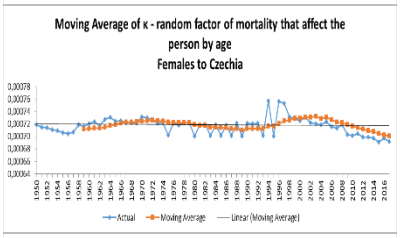

Moving Average of κ - random factor that affect the person by age
Females to Norway
Actual
Moving Average
Linear (Moving Average)

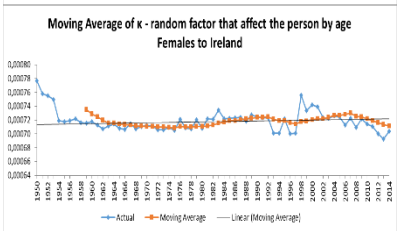

Moving Average of κ - random factor of mortality that affect the person by age
Females to Sweden
Actual
Moving Average
Linear (Moving Average)

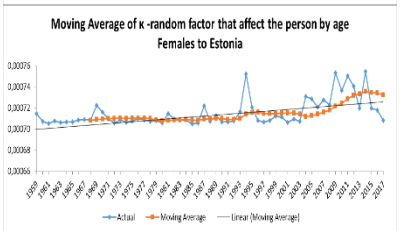

Moving Average of κ - random factor that affect the person by age
Females to Switzerland
Actual
Moving Average
Linear (Moving Average)

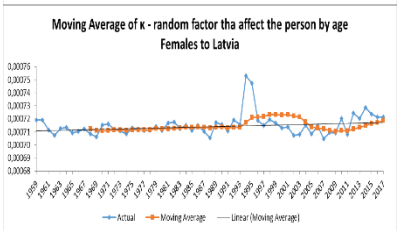

Moving Average of κ - random factor of mortality that affect the person by age
Females to Austria
Actual
Moving Average
Linear (Moving Average)

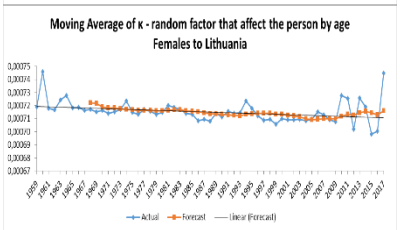

Moving Average of κ - random factor of mortality that affect the person by age
Females to Belgium
Actual
Moving Average
Linear (Moving Average)

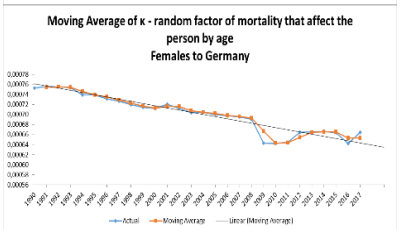

Moving Average of κ - random factor of mortality that affect the person by age
Females to Czechia
Actual
Moving Average
Linear (Moving Average)

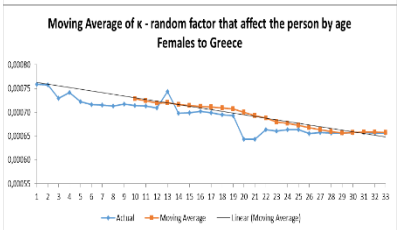

Moving Average of κ - random factor that affect the person by age
Females to Ireland
Actual
Moving Average
Linear (Moving Average)

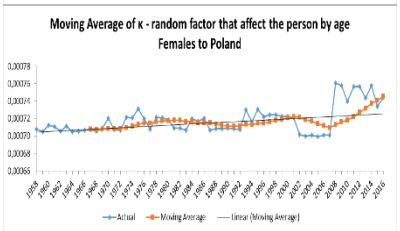

Moving Average of κ -random factor that affect the person by age
Females to Estonia
Actual
Moving Average
Linear (Moving Average)

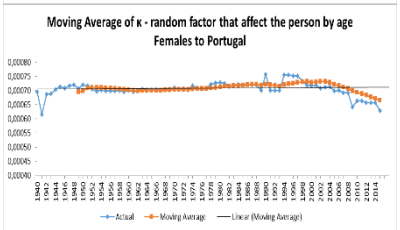

Moving Average of κ - random factor tha affect the person by age
Females to Latvia
Actual
Moving Average
Linear (Moving Average)

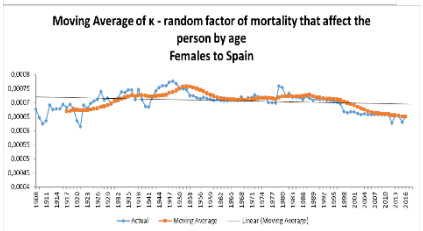

Moving Average of κ - random factor that affect the person by age
Females to Lithuania
Actual
Forecast
Linear (Forecast)

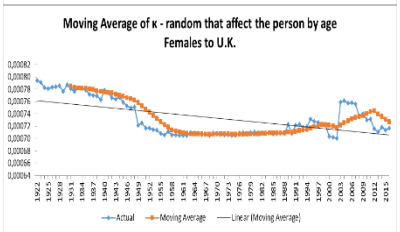

Moving Average of κ - random factor of mortality that affect the person by age
Females to Germany
Actual
Moving Average
Linear (Moving Average)


Moving Average of κ - random factor that affect the person by age
Females to Greece
Actual
Moving Average
Linear (Moving Average)


Moving Average of κ - random factor that affect the person by age
Females to Poland
Actual
Moving Average
Linear (Moving Average)


Moving Average of κ - random factor that affect the person by age
Females to Portugal
Actual
Moving Average
Linear (Moving Average)

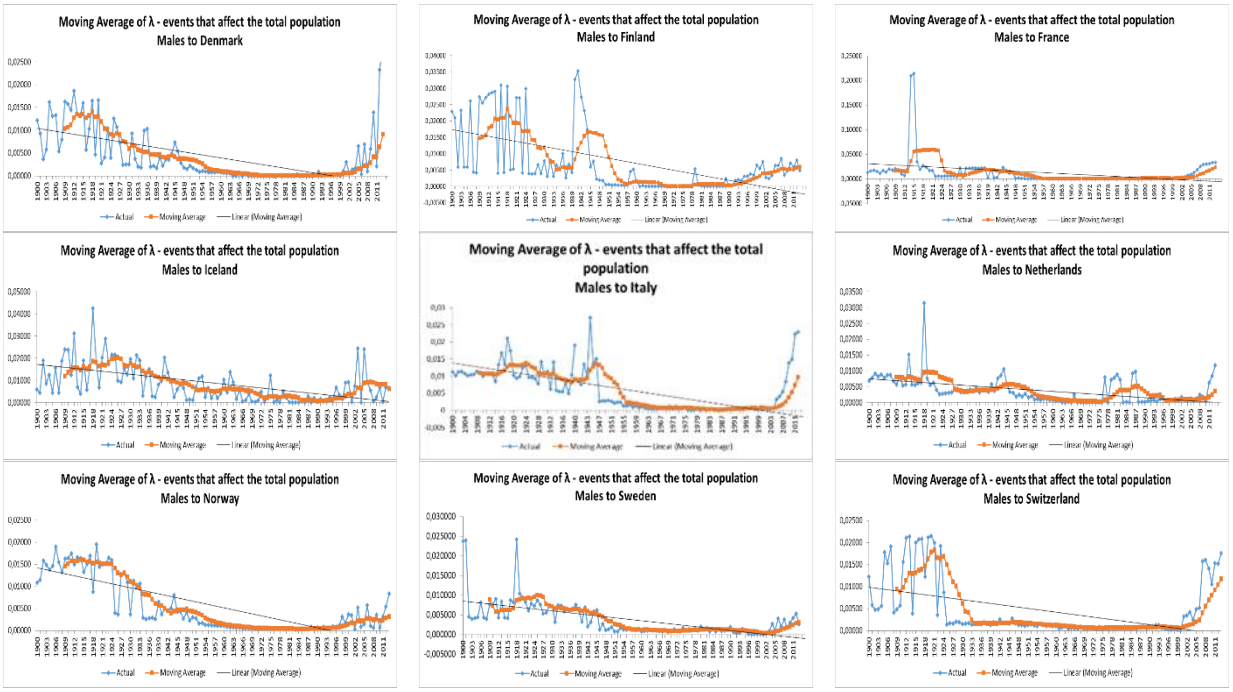

Moving Average of κ - random factor of mortality that affect the person by age
Females to Spain
Actual
Moving Average
Linear (Moving Average)

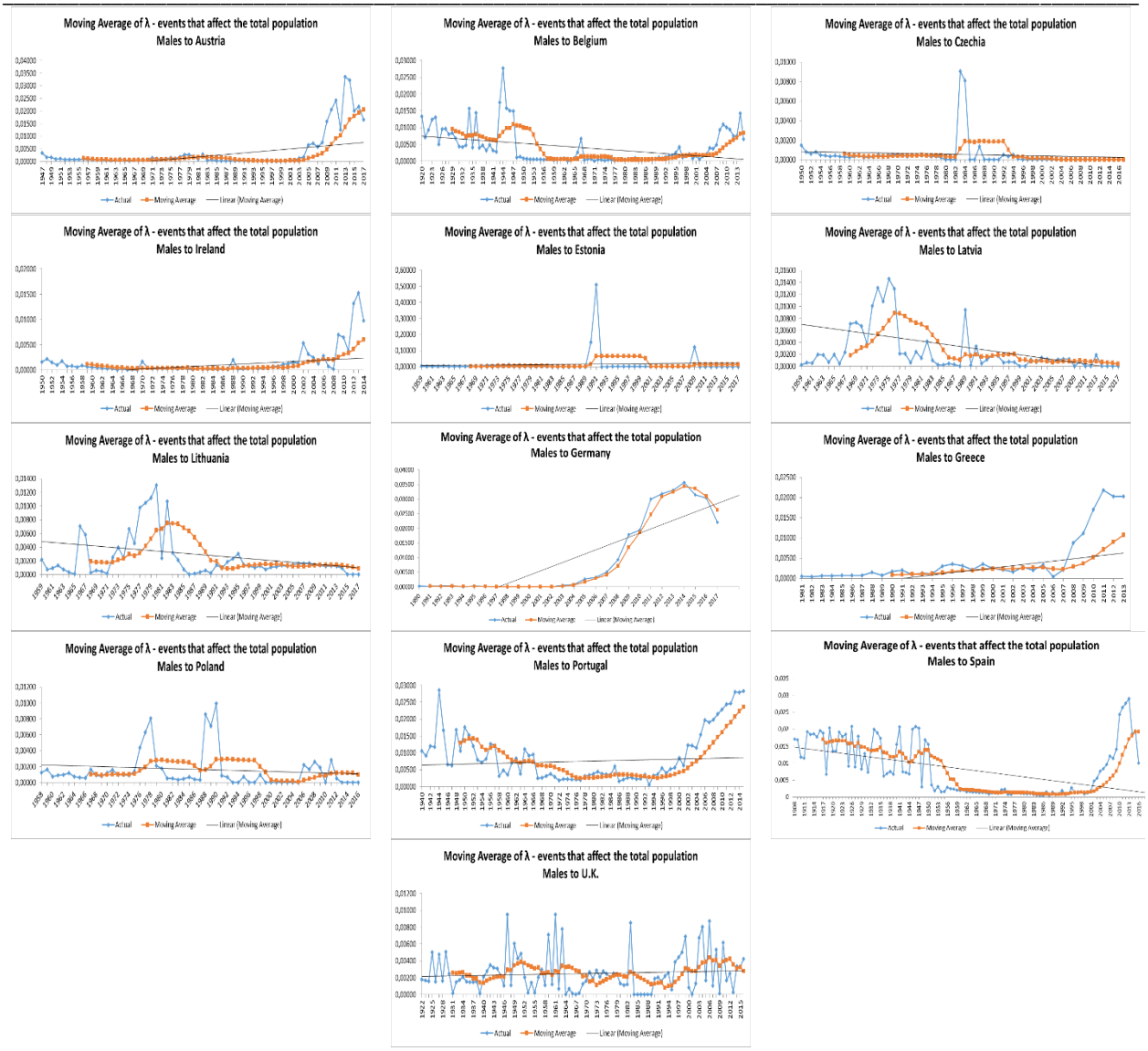

Moving Average of κ - random that affect the person by age
Females to U.K.
Actual
Moving Average
Linear (Moving Average)

Γράφημα 27b: Οι τιμές της εκτιμώμενης παραμέτρου του $\boldsymbol{\kappa}$, για τον γυναικείο πληθυσμό. Τα γραφήματα/χρονοσειρές περιγράφουν το ρόλο καθώς και το εύρος τιμών για κάθε μια από αυτές τις παραμέτρους που εξετάζονται. Στοιχεία θνησιμότητας από τις 22 χώρες της Ευρώπης. Η γραμμή με κόκκινο χρώμα απεικονίζει τον κινητό μέσο όρο ανά 10 έτη, ενώ η μαύρη γραμμή παρουσιάζει την *linear forecast(moving average)* (ανάλυση με το λογισμικό της R).

Παράμετρος λ – *τυχαίοι παράγοντες κινδύνου που επηρεάζουν το σύνολο του πληθυσμού μια χώρας*

Η παράμετρος $\boldsymbol{\lambda}$ εκφράζει τα επικίνδυνα συμβάντα (που προκαλούν τον θάνατο) που μπορεί να συμβούν και να επηρεάσουν ολόκληρο τον πληθυσμό μιας γεωγραφικής περιοχής, ανεξάρτητα από την ηλικία του ατόμου. Αυτά τα γεγονότα μπορεί να σχετίζονται με διάφορες κοινωνικές (π.χ. πόλεμοι, ασθένειες, κ.λπ.), οικονομικές (π.χ. χαμηλό εισόδημα, οικονομική κρίση κ.λπ.) ή περιβαλλοντικές συνθήκες που έχει αποδειχθεί ότι επηρεάζουν την πορεία της θνησιμότητας. Η τιμή της παραμέτρου $\boldsymbol{\lambda}$ εκφράζει τον βαθμό επιτυχίας / αποτυχίας με τον οποίο ο πληθυσμός αντιμετωπίζει το θάνατο ($\boldsymbol{\lambda}$ ακολουθεί την διωνυμική κατανομή, $\boldsymbol{\lambda} \sim Bernoulli\ (p, q)$) σε οποιαδήποτε ηλικία. Η ανάλυσή των 22 χωρών εμφανίζει την μέση τιμή της παραμέτρου $\boldsymbol{\lambda}$ να συγκλίνει για τους άνδρες γύρω στο 0.006 (≅0.0060) και γύρω στο 0.018 (≅0.0177) για τις γυναίκες αντίστοιχα.

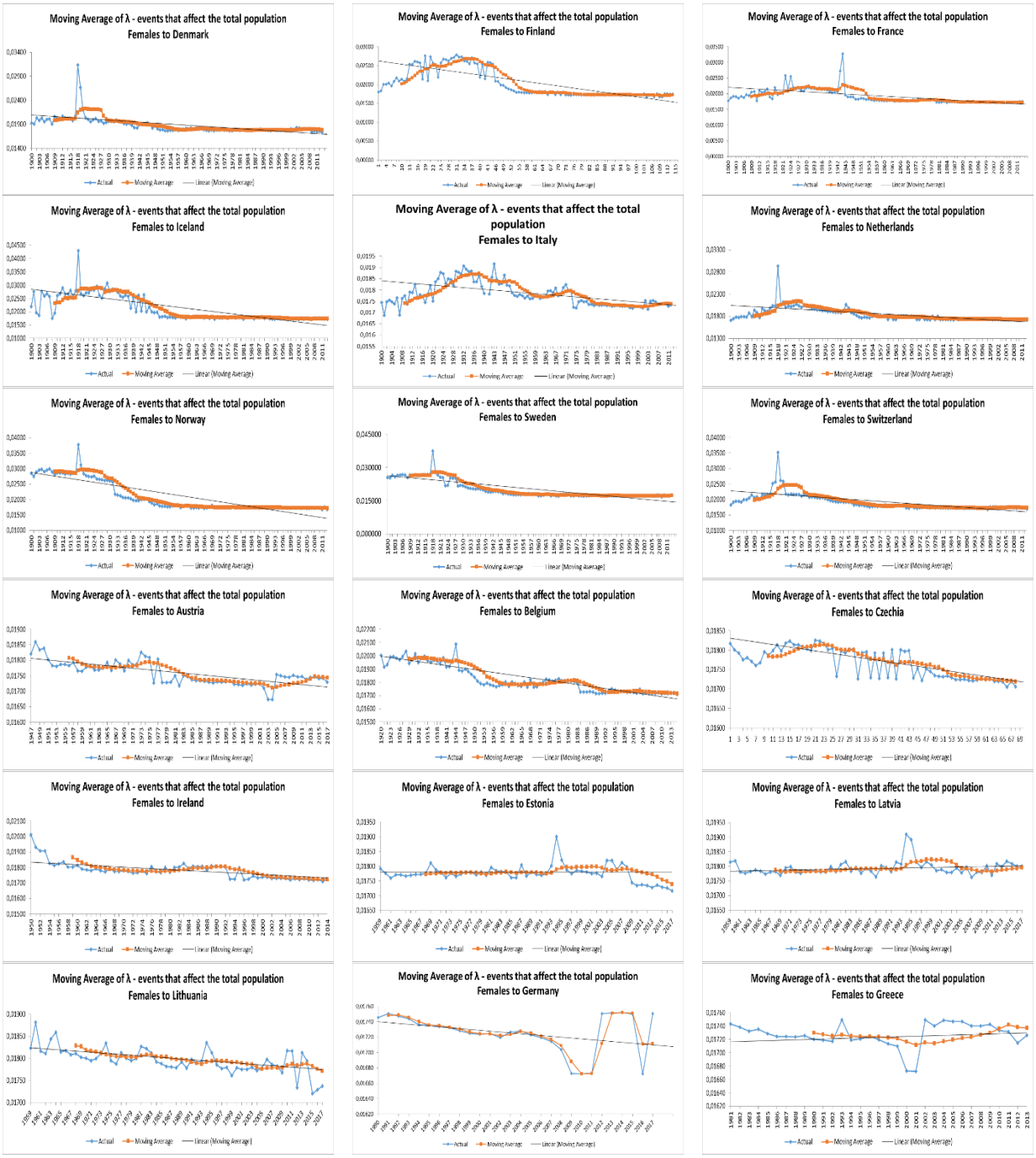


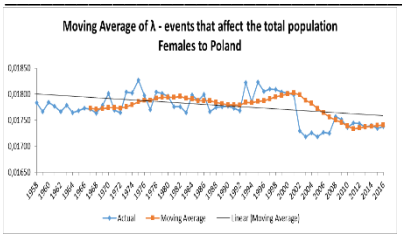


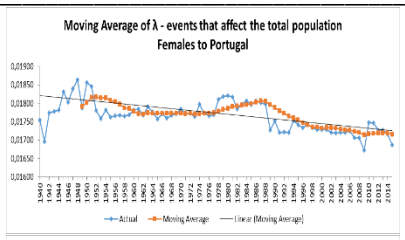
Γράφημα 28α: Οι τιμές της εκτιμώμενης παραμέτρου του $\boldsymbol{\lambda}$, για τον ανδρικό πληθυσμό. Τα γραφήματα/χρονοσειρές περιγράφουν το ρόλο καθώς και το εύρος τιμών για κάθε μια από αυτές τις παραμέτρους που εξετάζονται. Στοιχεία θνησιμότητας από τις 22 χώρες της Ευρώπης. Η γραμμή με κόκκινο χρώμα απεικονίζει τον κινητό μέσο όρο ανά 10 έτη, ενώ η μαύρη γραμμή παρουσιάζει την *linear forecast(moving average)* (ανάλυση με το λογισμικό της R).

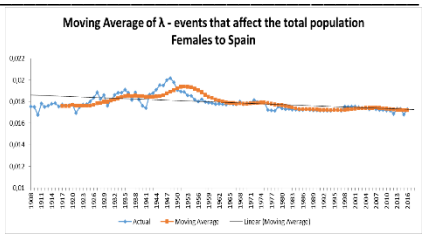
Οι αυξομειώσεις της παραμέτρου $\boldsymbol{\lambda}$ αντανακλούν τις μεταβαλλόμενες συνθήκες που αντιμετωπίζει ένας ολόκληρος πληθυσμός στο πέρασμα των χρόνων. Όπως ήταν αναμενόμενο από ιστορική σκοπιά, το $\boldsymbol{\lambda}$ έφτασε σε υψηλές τιμές κατά την περίοδο του Β' Παγκοσμίου Πολέμου για το σύνολο των χωρών που συμμετείχαν ενεργά, καθώς και κατά την πρόσφατη οικονομική κρίση. Στον αντίποδα, καθώς ο γυναικείος πληθυσμός αντιδρά διαφορετικά από τον ανδρικό πληθυσμό σε δυσμενείς συνθήκες, οι τιμές $\boldsymbol{\lambda}$ αποδίδουν ποικιλόμορφες διαφοροποιήσεις. Για παράδειγμα σημειώθηκε μεγάλη αύξηση θανάτων στο σύνολο του

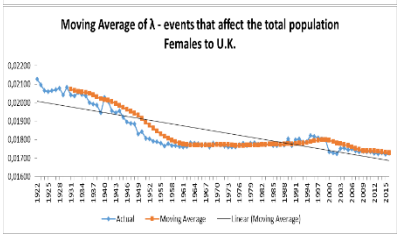
πληθυσμού της Ιταλίας και για τα δύο φύλα σχεδόν ισομερώς, με εξαίρεση την περίοδο της οικονομικής κρίσης, όπου το $\boldsymbol{\lambda}$ αυξήθηκε απότομα στους άνδρες, αλλά όχι στις γυναίκες. Εστιάζοντας μόνο στον γυναικείο πληθυσμό της Ιταλίας, η παράμετρος $\boldsymbol{\lambda}$ έδωσε πιο ομαλά αποτελέσματα αλλά με υψηλότερο μέσο όρο και λιγότερο στοχαστικό θόρυβο από το 1970 έως το 2013. (Γράφημα 28b).











Γράφημα 28b: Οι τιμές της εκτιμώμενης παραμέτρου του ***λ***, για τον γυναικείο πληθυσμό. Τα γραφήματα/χρονοσειρές περιγράφουν το ρόλο καθώς και το εύρος τιμών για κάθε μια από αυτές τις παραμέτρους που εξετάζονται. Στοιχεία θνησιμότητας από τις 22 χώρες της Ευρώπης. Η γραμμή με κόκκινο χρώμα απεικονίζει τον κινητό μέσο όρο ανά 10 έτη, ενώ η μαύρη γραμμή παρουσιάζει την *linear forecast(moving average)* (ανάλυση με το λογισμικό της R).

6.3 Αποτύπωση Δημογραφικών τάσεων & προβολή στο μέλλον

Περίοδος ανάλυσης: 2020 - 2045

Σε αυτή την ενότητα, σε μια προσπάθεια προβολής της πορείας που θα ακολουθήσει η ανθρώπινη θνησιμότητα στις 22 υπό εξέταση χώρες της Ευρώπης. Περιγράφεται η μέθοδος πρόβλεψης που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα διατριβή, παρατίθενται τα στατιστικά ισχυροποίησης της μεθόδου και σχολιάζονται τα αποτελέσματα.

Τα χρονολογικά δεδομένα των 22 χωρών δύναται να χρησιμοποιηθούν για να δημιουργηθεί μια πρόβλεψη. Η στατιστική συνάρτηση που χρησιμοποιήθηκε είναι η FORECAST.ETS (R Software), η οποία αν και αρχικά χρησιμοποιήθηκε στον οικονομικό κλάδο βοηθώντας να αποτυπωθούν γεγονότα, όπως οι μελλοντικές προβολές πωλήσεων ενός αγαθού, οι απαιτήσεις αποθεμάτων ή οι τάσεις των καταναλωτών, εντούτοις στη συγκεκριμένη έρευνα εφαρμόζεται για την προβολή της θνησιμότητας. Αναφέρεται σε 32 έτη, από το 2013 έως το 2045, και τα έτη 2010 έως 2017, αποτελούν τα χρόνια «σωστής επαλήθευσης - validation» της μεθόδου. Εξετάζεται η κάθε παράμετρος της $f_{BGGM}(x;\alpha,\beta,\theta,\xi,\kappa,\lambda)$ ξεχωριστά ερμηνεύοντας και την ιδιαίτερη δημογραφική της πορεία.

Το πρόβλημα των «κενών» (ελλιπείς τιμές) στις χρονολογικές σειρές αντιμετωπίστηκε με τη μέθοδο της «παρεμβολής», δηλαδή την συμπλήρωση των σημείων που λείπουν από τον σταθμισμένο μέσο όρο των γειτονικών σημείων – με την προϋπόθεση ότι το ποσοστό των στοιχείων που δεν θα είναι διαθέσιμα να είναι λιγότερο του 40%. Η Ελλάδα και η Γερμανία είναι οι δύο χώρες που εφαρμόστηκε η μέθοδος παρεμβολής – δεν υπάρχουν δεδομένα θνησιμότητας για τις χώρες αυτές πριν το 1970 και το 1990 αντίστοιχα. Επίσης, δημιουργήθηκε και ένας πίνακας στατιστικών ελέγχων της πρόβλεψης για την όσο το δυνατόν υψηλή στατιστική στήριξη των αποτελεσμάτων.

Μεθοδολογία

Οι εξεταζόμενες παράμετροι αποτελούν τα θεμελιώδη συστατικά της προτεινόμενης μεθόδου θνησιμότητας με την ονομασία ***Beta Gompertz Generalized Makeham (BGGM)***. Οι λεπτομέρειες αυτής της μεθόδου περιεγράφηκαν στο κεφάλαιο 4 της διατριβής (Andreopoulos et al., 2019). Η συνάρτηση εκφράζεται ως ακολούθως:

$$f_{BGGM}(x) = \frac{(\theta e^{\xi x} + \lambda + \kappa x) e^{-\lambda x - \frac{\theta}{\xi}(e^{\xi x} - 1)}}{B(\alpha, \beta)} \cdot \left[(1 - e^{-\frac{\kappa}{\lambda} x^2 - \lambda x - \frac{\theta}{\xi}(e^{\xi x} - 1)}) \right]^{\alpha - 1} \cdot \left[\left(e^{-\frac{\kappa}{\lambda} x^2 - \lambda x - \frac{\theta}{\xi}(e^{\xi x} - 1)} \right) \right]^{\beta - 1}$$

$$\theta, \xi, \kappa, \lambda, \alpha, \beta > 0, x \geq 0$$

όπου *x* είναι ηλικία που αρχίζει από 0 και φτάνει μέχρι ένα μέγιστο θεωρητικό βιολογικό όριο (δηλαδή μια ηλικία πάνω από την οποία κανένα άτομο δεν μπορεί θεωρητικά να επιβιώσει), *α* και *β* είναι παράμετροι της κατανομής βήτα (Jones, 2007) και *ϑ, ξ, κ* και *λ* είναι παράμετροι που σχετίζονται με διαφορετικές πτυχές της θνησιμότητας.

Η παράμετρος ***ϑ*** περιγράφει τη θνησιμότητα στην αρχική ηλικία [0, 1), γνωστή και ως βρεφική θνησιμότητα. Η παράμετρος ***ξ*** ορίζει το ποσοστό γήρανσης σε ηλικίες άνω των 70 ετών προς το σύνολο του πληθυσμού. Ονομάζεται "ποσοστό γήρανσης", καθώς μπορεί να αντικατοπτρίζει τη δημογραφική γήρανση ενός πληθυσμού (Gompertz, 1825). Η παράμετρος ***κ*** περιγράφει τον κίνδυνο ενός απροσδόκητου θανάτου σε ατομικό επίπεδο και εξαρτάται από την ηλικία. Όσο υψηλότερη είναι η τιμή του, τόσο υψηλότερη είναι η πιθανότητα αιφνίδιου θανάτου. Η παράμετρος ***λ*** αναφέρεται σε επικίνδυνα συμβάντα που εμφανίστηκαν σε ολόκληρο τον πληθυσμό (Makeham, 1860). Αυτά τα γεγονότα μπορεί να οφείλονται σε διάφορες κοινωνικές, οικονομικές ή περιβαλλοντικές καταστάσεις που έχουν αποδειχθεί ότι επηρεάζουν το ποσοστό θνησιμότητας σε μία γεωγραφική περιοχή.

Συνάρτηση FORECAST.ETS

Λαμβάνοντας υπόψη τα όσα αναφέρθηκαν, η συνάρτηση που χρησιμοποιήθηκε στην εξαγωγή των αποτελεσμάτων πρόβλεψης είναι η *FORECAST.ETS,* η οποία διατίθεται ελεύθερα στο λογισμικό της R και στο Office 365. Υπολογίζει μία μελλοντική τιμή με βάση την υπάρχουσα, ακολουθώντας τον αλγόριθμο τριπλής εκθετικής εξομάλυνσης. Το υπάρχον στατιστικό πακέτο, παρέχει πίνακα με τρείς στήλες: η πρώτη στήλη περιλαμβάνει τα έτη της χρονολογικής σειράς, η δεύτερη δίνει τις τιμές της κάθε χρονιάς και η τρίτη τις τιμές πρόβλεψης.

Ο στατιστικός έλεγχος των μελλοντικών εκτιμώμενων τιμών (Atance, et al., 2020) περιλαμβάνει μέτρα, όπως ο συντελεστής βαρύτητας (Alpha) και ο δείκτης τάσης (beta) με τις αντίστοιχες ποινές των μετρήσεων των σφαλμάτων (MASE, SMAPE, MAE, MSE). Ακολουθεί μία σύντομη περιγραφή (και σύγκριση) των όρων που αναφέρονται για την όσο το δυνατόν καλύτερη κατανόηση των μελλοντικών δεδομένων και κατ΄επέκταση του «μονοπατιού» που ακολουθεί η ανθρώπινη θνησιμότητα.

Συντελεστής Βαρύτητας Alpha

Στην αναλογιστική επιστήμη, ο συντελεστής Άλφα (alpha coefficient) είναι ένας δείκτης που μετράει την απόδοση μιας επένδυσης αναλογικά με τον κίνδυνο που ανέλαβε ο επενδυτής (Παπάς, 2004). Κάνοντας τον παραλληλισμό με την πορεία της ανθρώπινης θνησιμότητας και την $f_{BGGM}(x;\alpha,\beta,\theta,\xi,\kappa,\lambda)$ συνάρτηση, ο συντελεστής Άλφα είναι ο δείκτης ο οποίος λαμβάνει υπόψη την καταγεγραμμένη πορεία της ζωής, μετράει την πιθανότητα επιβίωσης με βάση τους κατά φύλο, ηλικία, γεωγραφική θέση και χρονική στιγμή κινδύνους που ακολουθεί η συνάρτηση κινδύνου (Hazard function) και αποδίδει την έκβασή της στο μέλλον.

Η συνάρτηση FORECAST.ETS κατά την διαδικασία επεξεργασίας επιστρέφει την τιμή του δείκτη Alpha. Μια υψηλή τιμή σημαίνει ότι η έκβαση της προβολής της παραμέτρου στηρίχτηκε με μεγαλύτερη βαρύτητα στα πιο πρόσφατα χρονικά σημεία δεδομένων θνησιμότητας. Το εύρος τιμών του δείκτη alpha είναι από 0 έως 1. Τιμές κοντά στο 0 δηλώνουν ισχυρή συσχέτιση της προβολής βασιζόμενη σε όλα τα χρόνια της ανάλυσης και λιγότερο από τα πιο πρόσφατα, ενώ τιμές του alpha κοντά στο 1, δηλώνουν ισχυρή συσχέτιση με τα πιο πρόσφατα δεδομένα.

Οι χαρακτηρισμοί ανάλογα με την τιμή του συντελεστή *alpha* ορίζονται ως εξής:

- $0 \leq |\alpha| \leq 0{,}5$ ισχυρή συσχέτιση με όλες τις χρονικές στιγμές
- $0{,}5 \leq |\alpha| \leq 1$ ισχυρή συσχέτιση με το πιο πρόσφατο παρελθόν

Δείκτης τάσης beta

Ο δείκτης Alpha χρησιμοποιείται παράλληλα με τον δείκτη beta (ή beta coefficient). Ο beta μετράει τη μεταβλητότητα του υπό εξέταση πληθυσμού σε μία χώρα σε σχέση με το σύνολο των ετών της ανάλυσης[2]. Επιστρέφει την παράμετρο της τιμής τάσης—μια υψηλότερη τιμή δίνει μεγαλύτερη βαρύτητα στην πιο πρόσφατη τάση των δεδομένων.

Υψηλός συντελεστής beta συνεπάγεται ότι η τιμή, και κατ' επέκταση η πρόβλεψη της κάθε παραμέτρου, επηρεάζεται σημαντικά από τον χρόνο (περίοδος ανάλυσης). Μικρές τιμές του συντελεστή beta δηλώνουν ότι η τιμή πρόβλεψης, μένει σχετικά ανεπηρέαστη από τις διακυμάνσεις των προηγούμενων ετών.

Θετικό beta σημαίνει ότι η πορεία της θνησιμότητας θα ακολουθήσει την ίδια αυξητική ή καθοδική τάση (παραμονή της υπάρχουσας κατάστασης και στο μέλλον). Αρνητικό beta

[2] Στην *αναλογιστική επιστήμη* ο Συντελεστής beta είναι δείκτης που περιγράφει τη σχέση μεταξύ της μεταβλητότητας μιας επένδυσης και της μεταβλητότητας της αγοράς (Σπύρου, 2009).

σημαίνει αντιστροφή / αλλαγή της υπάρχουσας τάσης στο μέλλον σε άνοδο ή πτώση αντίστοιχα. Ο συντελεστής beta έχει εύρος τιμών από -2 έως 2.

Δείκτης Σφάλματος MASE

Το μέσο απόλυτο κλιμακωτό σφάλμα (MASE, Mean Absolute Scaled Error) είναι ένα μέτρο της ακρίβειας των προβλέψεων. Είναι το μέσο απόλυτο σφάλμα των τιμών πρόβλεψης, διαιρούμενο με το μέσο απόλυτο σφάλμα της απροσδιόριστης πρόβλεψης σε ένα βήμα. Προτάθηκε το 2005 από τον στατιστικό Rob J. Hyndman και από την καθηγήτρια της Θεωρίας Αποφάσεων Anne B. Koehler, που το περιέγραψε ως "γενικά εφαρμόσιμη μέτρηση της ακρίβειας πρόβλεψης χωρίς τα προβλήματα που παρατηρήθηκαν στις άλλες μετρήσεις" (Hyndman, et al., 2006). Το μέσο απόλυτο κλιμακωτό σφάλμα (MASE) έχει ευνοϊκές ιδιότητες σε σύγκριση με άλλες μεθόδους υπολογισμού σφαλμάτων πρόβλεψης, όπως είναι η μέση τετραγωνική απόκλιση, και επομένως συνιστάται για τον προσδιορισμό της συγκριτικής ακρίβειας των προβλέψεων (Franses, P. H., 2016). Τιμές κοντά στο μηδέν προτιμώνται περισσότερο, δίνοντας μεγαλύτερη αξιοπιστία.

Δείκτης Σφάλματος SMAPE

Το συμμετρικό μέσο σφάλμα απόλυτου ποσοστού (SMAPE ή sMAPE, Symmetric Mean Absolute Percentage Error) είναι ένα μέτρο ακρίβειας βασισμένο σε ποσοστιαία (ή σχετικά) σφάλματα. Συνήθως ορίζεται ως εξής:

$$SMAPE = \frac{100\%}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{|Y_t - A_t|}{(|A_t| - |Y_t|)/2}$$

όπου A_t είναι η πραγματική τιμή και Y_t η τιμή πρόβλεψης. Τον τύπο αυτό φαίνεται να τον εφάρμοσε πρώτος ο Armstrong το 1985 (Armstrong, J. S., 1985) αλλά οριζόταν χωρίς τις απόλυτες τιμές στον παρονομαστή. Το 1986 βελτιώθηκε και τροποποιήθηκε φτάνοντας στη σημερινή μορφή από τον Flores (Flores, B. E., 1986).

Δείκτης Σφάλματος MAE

Το μέσο απόλυτο σφάλμα (MAE, Mean Absolute Error) είναι ένα μέτρο σφαλμάτων μεταξύ των παρατηρήσεων ανά ζεύγη που εκφράζουν το ίδιο φαινόμενο. Η συνάρτηση MAE υπολογίζεται ως:

$$MAE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i|$$

όπου x_i είναι η πραγματική τιμή και y_i η τιμή πρόβλεψης.

Δείκτης Σφάλματος RMSE or MSE

Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (MSE, Mean Squared Error) ενός εκτιμητή (η διαδικασία για την εκτίμηση μιας μη παρατηρούμενης ποσότητας) μετρά τον μέσο όρο των τετραγώνων των σφαλμάτων, δηλαδή τη μέση τετραγωνική διαφορά μεταξύ των εκτιμώμενων τιμών από την πραγματική τιμή. Το MSE είναι μια συνάρτηση κινδύνου, που αντιστοιχεί στην αναμενόμενη τιμή της απώλειας τετραγωνικών σφαλμάτων. Το γεγονός ότι το MSE είναι σχεδόν πάντοτε αυστηρά θετικό (και όχι μηδέν) οφείλεται στην τυχαιότητα των αποτελεσμάτων ή στο ότι ο εκτιμητής δεν λαμβάνει υπόψη πληροφορίες (στην πραγματικότητα δεν της έχει αφού αφορά το μέλλον) που θα μπορούσαν να δώσουν μια ακριβέστερη εκτίμηση (Lehmann et al., 2006). Ο δείκτης σφάλματος MSE είναι ένα μέτρο της ποιότητας μιας εκτιμώμενης παρατήρησης - είναι πάντα μη αρνητικός και οι τιμές πιο κοντά στο μηδέν είναι οι καλύτερες.

Ο δείκτης MSE, αφορά τη μέθοδο της απλής εκθετικής εξομάλυνσης, όπου οι προβλέψεις των μελλοντικών τιμών μιας χρονοσειράς προκύπτουν ως ένας σταθμικός μέσος όρος των παρατηρήσεών της.

Η συνάρτηση MSE υπολογίζεται ως:

$$MSE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \widehat{Y}_i)^2$$

όπου Y_i είναι η πραγματική τιμή, $\widehat{Y}_i$ η εκτιμώμενη τιμή και n ο αριθμός των περιόδων για τις οποίες έχει γίνει πρόβλεψη.

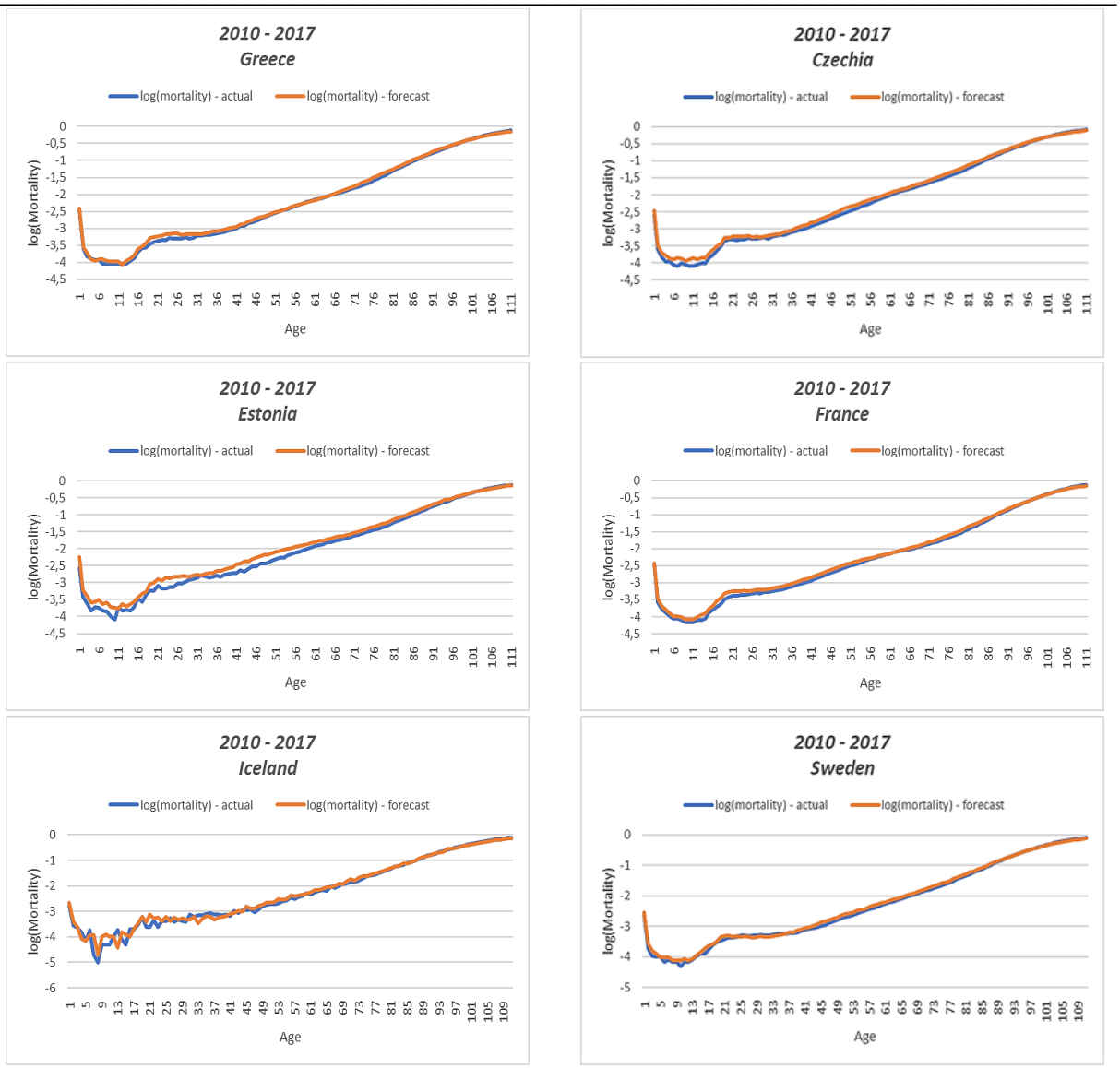
Δεδομένα

Τα διαθέσιμα δεδομένα θνησιμότητας αναφέρονται στην περίοδο 1960-2013 για τις 22 ευρωπαϊκές χώρες. Οι χώρες αυτές είναι: Αυστρία, Βέλγιο, Τσεχική Δημοκρατία, Δανία, Εσθονία, Φινλανδία, Γαλλία, Γερμανία, Ελλάδα, Ισλανδία, Ιρλανδία, Ιταλία, Λετονία, Λιθουανία, Ολλανδία, Νορβηγία, Πολωνία, Πορτογαλία, Ισπανία, Σουηδία, Ελβετία και Ηνωμένο Βασίλειο. Η πρόβλεψη της πορείας που θα ακολουθήσει η θνησιμότητα στις 22 αυτές χώρες, όπως προαναφέρθηκε, αφορά τα έτη από το 2013 έως το 2045. Τα έτη από το 2010 έως το 2017 αποτελούν την χρονοσειρά της «σωστής» επαλήθευσης / προσέγγισης του μοντέλου πρόβλεψης στα πραγματικά δεδομένα θνησιμότητας.

Η εκτίμηση των παραμέτρων που σχετίζονται με τη θνησιμότητα διεξήχθη (κεφάλαιο 5 & 6.1 – 6.2) με τη χρήση του ανοικτού κώδικα R (www.r-project.org) και συγκεκριμένα του πακέτου "minpack.lm" από την ψηφιακή βιβλιοθήκη CRAN (Comprehensive R Archive). Το ESRI ArcGIS (έκδοση 10.4) χρησιμοποιήθηκε για τον χειρισμό και την επεξεργασία χωρικών δεδομένων, καθώς και για την ανάπτυξη τελικών χαρτών. Η μετέπειτα επεξεργασία (παράγραφος 6.3) των ποσοτικών δεδομένων των παραμέτρων $\boldsymbol{\vartheta, \xi, \kappa, \lambda}$ και προβολής αυτών στο μέλλον, επιτεύχθηκε με τη χρήση του FORECAST.ETS

Μελέτη ευαισθησίας του μοντέλου πρόβλεψης

Έχοντας δεδομένα θνησιμότητας από το 1960 έως το 2017, γίνεται επαλήθευση του μοντέλου πρόβλεψης (μέσω της συνάρτησης FORECAST.ETS) στα έτη 2010 – 2017. Η πρόβλεψη, βασιζόμενη στην BGGM κατανομή, εξάγει αποτελέσματα αποτυπώνοντας την τάση που θα ακολουθήσει η θνησιμότητα στις 22 χώρες της ανάλυσης για την χρονοσειρά 2010 – 17. Η προβολή θνησιμότητας (*log(Mortality) – forecast*) στη συνέχεια συγκρίνεται με τα πραγματικά (*log(Mortality) – Actual*) δεδομένα θνησιμότητας από τη Human Mortality Database των αντίστοιχων χωρών, για το αντίστοιχο χρονικό εύρος. Η μέθοδος αυτή αποτελεί μία ένδειξη αξιοπιστίας της πρόβλεψης που θα χρησιμοποιηθεί για τα έτη μετά το 2017 όπου δεν υπάρχουν ακόμα δεδομένα. Στον γράφημα 29, απεικονίζεται η προσέγγιση της προβολής θνησιμότητας (κόκκινο) στα πραγματικά (μπλε) δεδομένα ενδεικτικά για τις χώρες της Ελλάδας, της Τσεχίας, της Εσθονίας, της Γαλλίας, της Ισλανδίας και της Σουηδίας.



Γράφημα 29. Προσέγγιση της προβολής θνησιμότητας (κόκκινο) στα πραγματικά (μπλε) δεδομένα ενδεικτικά για τις χώρες της Ελλάδας, της Τσεχίας, της Εσθονίας, της Γαλλίας, της Ισλανδίας και της Σουηδίας, για τα έτη 2010 - 17.

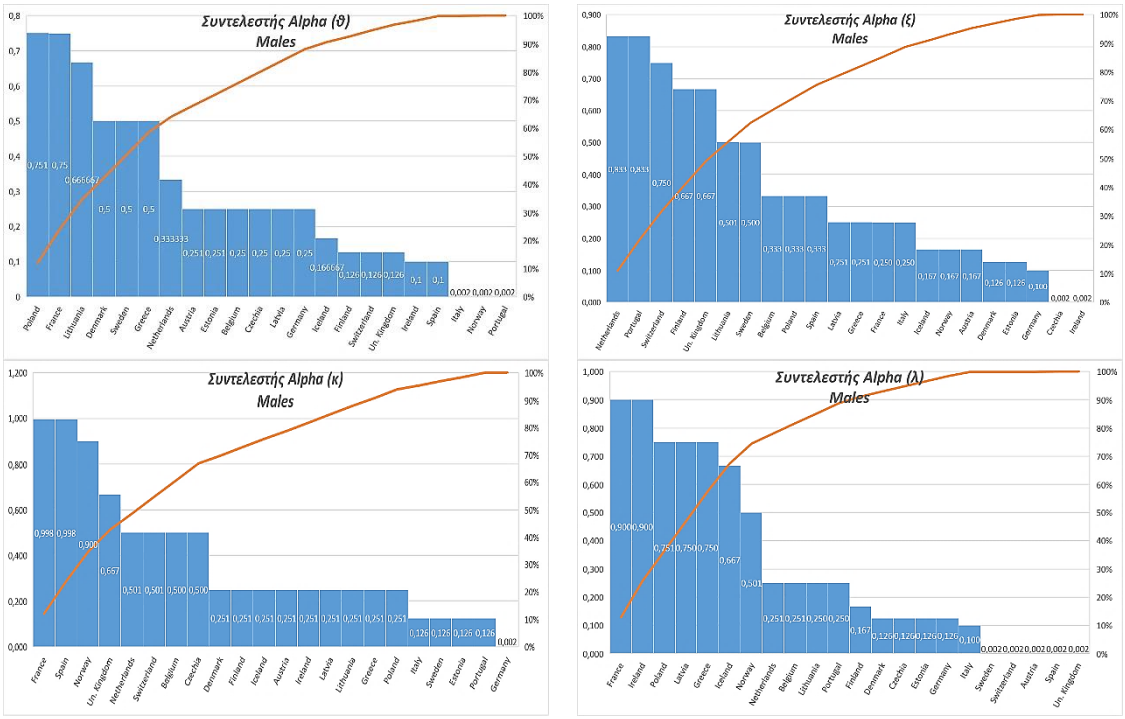
Στο παράρτημα Β' παρατίθενται και τα αντίστοιχα γραφήματα για το σύνολο των 22 χωρών. Σε όλες τις χώρες η προσέγγιση της πρόβλεψης στα πραγματικά δεδομένα χαρακτηρίζεται περισσότερο από ικανοποιητική.

Αποτελέσματα του Συντελεστή βαρύτητας Alpha της $f_{BGGM}(x;\alpha,\beta,\theta,\xi,\kappa,\lambda)$

Παρατηρώντας τα αποτελέσματα του συντελεστή βαρύτητας Alpha για τις τέσσερις παραμέτρους, προκύπτουν χρήσιμα συμπεράσματα για την στήριξη του μοντέλου προβολής (εικόνα 4, 6 & παράρτημα A_9). Η **μέση τιμή** του συντελεστή Alpha της παραμέτρου ϑ για τους άνδρες των 22 χωρών διαμορφώνεται στο 0,2843 και στο 0,2477 για τις γυναίκες αντίστοιχα. Για

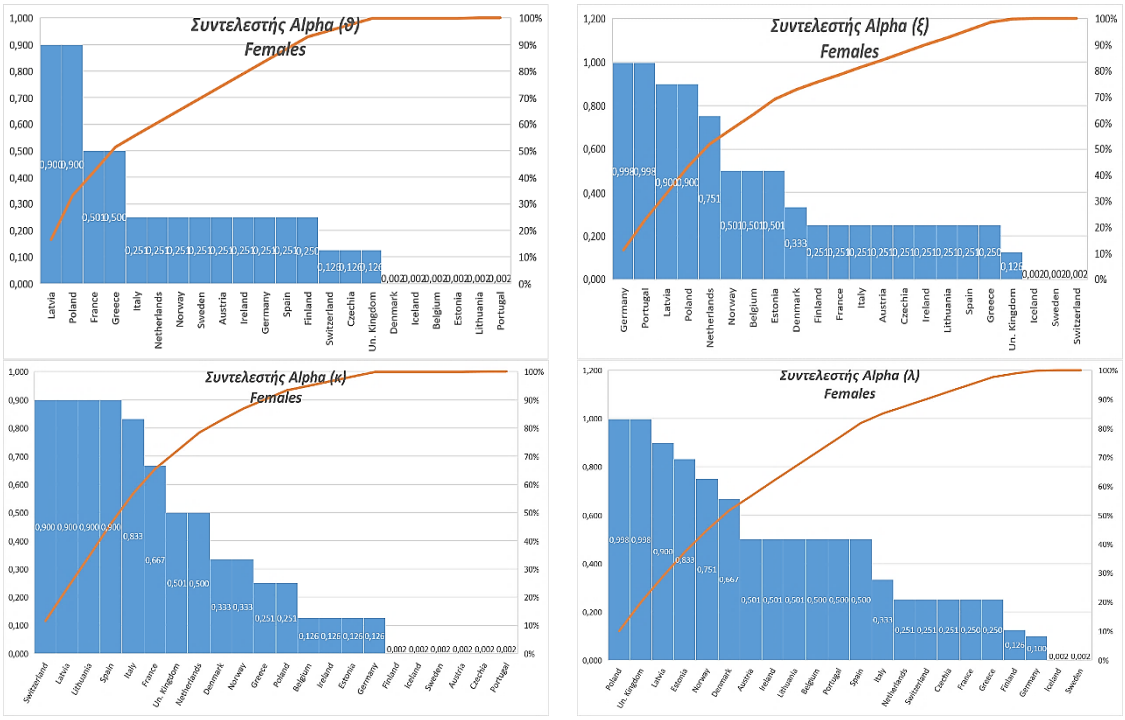
την παράμετρο ξ είναι για τους άνδρες στο 0,3459 και για τις γυναίκες στο 0,3988. Για την παράμετρο κ οι άνδρες έχουν μέση τιμή 0,3786 και 0,3539 οι γυναίκες. Τέλος η παράμετρος λ για τις 22 χώρες δίνει μέση τιμή 0,3182 στους άνδρες και 0,4530 στις γυναίκες. Η χρονική πρόβλεψη αφορά τα έτη από το 2013 ως το 2045 και η στατιστική ανάλυση έγινε με το R software και τη συνάρτηση FORECAST.ETS. Σε όλες τις περιπτώσεις η μέση τιμή του Alpha είναι μεταξύ 0 και 0.5. Σύμφωνα με τα όσα αναφέρθηκαν, ο συντελεστής βαρύτητας αποδίδει ισχυρή συσχέτιση σε όλες τις χρονικές στιγμές, καταμερίζοντας ισομερώς τη βαρύτητα της πρόβλεψης σε όλη τη χρονοσειρά. Εστιάζοντας όμως σε κάθε χώρα ξεχωριστά (Παράρτημα A_9) τα αποτελέσματα διαφοροποιούνται ελαφρώς ως προς τη βαρύτητα του συντελεστή Alpha.

Στην εικόνα 5, οι χώρες Πολωνία, Γαλλία, Λιθουανία, Δανία, Σουηδία και Ελλάδα για την πορεία της παραμέτρου ϑ εμφανίζουν τον συντελεστή βαρύτητας Alpha με τιμή άνω του 0.5 δίνοντας αυξημένη βαρύτητα στις χώρες αυτές στο πιο πρόσφατο παρελθόν τους. Ομοίως για την παράμετρο ξ των ανδρών, οι χώρες Ολλανδία, Πορτογαλία, Ελβετία, Φινλανδία, Ηνωμένο Βασίλειο, Λιθουανία και Σουηδία.



Εικόνα 5. Γράφημα Pareto για άνδρες, όπου απεικονίζεται η κατανομή των χωρών σε φθίνουσα σειρά συχνότητας ως προς τον συντελεστή Alpha για την κάθε παράμετρο, με μία αθροιστική γραμμή (κόκκινο χρώμα) σε έναν δευτερεύοντα άξονα.

Αντίστοιχες τιμές του συντελεστή βαρύτητας για τις παραμέτρους ***κ*** και ***λ*** των ανδρών με τιμές άνω του 0.5 αποδίδεται στις χώρες Γαλλία, Ισπανία, Νορβηγία, Ηνωμένο Βασίλειο, Ολλανδία, Ελβετία, Βέλγιο και Τσεχία για τον τυχαίο παράγοντα κινδύνου σε ατομικό επίπεδο. Με όμοια αποτελέσματα του συντελεστή να λαμβάνονται για τις χώρες όπως η Γαλλία, η Ιρλανδία, η Πολωνία, η Λετονία, η Ελλάδα, η Ισλανδία και η Νορβηγία που αφορούν τον τυχαίο κίνδυνο θανάτου σε συλλογικό επίπεδο. Στον εικόνα 5, μπορούν να διακριθούν και οι χώρες που εμφάνισαν συντελεστή βαρύτητας Alpha < 0.5.



Εικόνα 6. Γράφημα Pareto για γυναίκες, όπου απεικονίζεται η κατανομή των χωρών σε φθίνουσα σειρά συχνότητας ως προς τον συντελεστή Alpha για την κάθε παράμετρο, με μία αθροιστική γραμμή (κόκκινο χρώμα) σε έναν δευτερεύοντα άξονα.

Η εικόνα 6, αφορά τον συντελεστή βαρύτητας Alpha για την κάθε παράμετρο στις γυναίκες. Ο συντελεστής βαρύτητας Alpha για την παράμετρο ***ϑ***, διαμορφώνεται με τιμές άνω του 0.5 για τις χώρες της Λετονίας, της Πολωνίας, της Γαλλίας και της Ελλάδας. Το ποσοστό γήρανσης (παράμετρος ***ξ***) για το συντελεστή Alpha με τιμές άνω του 0.5 αφορά τις χώρες της Γερμανίας, της Πορτογαλίας, της Λετονίας, της Πολωνίας, της Ολλανδίας, της Νορβηγίας, του Βελγίου και της Εσθονίας (εικόνα 6).

Ο συντελεστής βαρύτητας Alpha για τον τυχαίο παράγοντα κινδύνου εξαρτώμενος της ηλικίας (παράμετρος ***κ***) δίνει τιμές άνω του 0.5 για τις χώρες Ελβετία, Λετονία, Λιθουανία,

Ισπανία, Ιταλία, Γαλλία, Ηνωμένο Βασίλειο και Ολλανδία. Ενώ για τον τυχαίο παράγοντα κινδύνου μη εξαρτώμενος της ηλικίας (παράμετρος $\boldsymbol{\lambda}$) δίνει τιμές άνω του 0.5 για τις χώρες όπως είναι η Λετονία, το Ηνωμένο Βασίλειο, η Πολωνία, η Εσθονία, η Νορβηγία, η Δανία, η Αυστρία, η Ιρλανδία, η Λιθουανία, το Βέλγιο, η Πορτογαλία και η Ισπανία.

Αποτελέσματα του Δείκτη τάσης beta της $f_{BGGM}(x;\alpha,\beta,\theta,\xi,\kappa,\lambda)$

Σύμφωνα, με τους πίνακες των χωρών στο παράρτημα A_9, η τιμή του δείκτη τάσης beta σταθεροποιείται στο 0,0010 για όλες τις χώρες ως προς τις 4 παραμέτρους ($\boldsymbol{\vartheta, \xi, \kappa, \lambda}$). Το αποτέλεσμα δίνει μια σταθερή τάση της πορείας της θνησιμότητας που θα ακολουθήσει η κάθε γεωγραφική περιοχή, χωρίς να αποδίδει χαρακτηριστικά έντονης αλλαγής σε σχέση με την τρέχουσα κατάσταση της κάθε χώρας. Φαίνεται δηλαδή ότι διατηρείται η ίδια αυξητική ή καθοδική τάση (παραμονή της υπάρχουσας κατάστασης και στο μέλλον) για την κάθε παράμετρο.

Αποτελέσματα Δεικτών Σφάλματος MASE & SMAPE της $f_{BGGM}(x;\alpha,\beta,\theta,\xi,\kappa,\lambda)$

Το μέσο απόλυτο κλιμακωτό σφάλμα (MASE) έχει ευνοϊκές ιδιότητες σε σύγκριση με άλλες μεθόδους υπολογισμού σφαλμάτων πρόβλεψης και συνιστάται για τον προσδιορισμό της συγκριτικής ακρίβειας των προβλέψεων (Franses, P. H., 2016). Όσο χαμηλότερο είναι το σχετικό απόλυτο σφάλμα πρόβλεψης, τόσο καλύτερη είναι η μέθοδος. Ιδανικά θα πρέπει η τιμή σφάλματος MASE να είναι μικρότερη της μονάδας (περίπτωση σπάνια αν αναφέρονται τα δεδομένα σε πρόβλεψη – πρακτικά μία «ιδανική» τιμή είναι να βρίσκεται το σφάλμα κάτω από τις 3 μονάδες) και όσο απομακρύνεται προς τα πάνω το απόλυτο σφάλμα από την μονάδα, τόσο η βεβαιότητα της σχετικής πρόβλεψης αποδυναμώνεται (Hyndman, et al., 2006).

Το συμμετρικό μέσο σφάλμα απόλυτου ποσοστού (SMAPE, Symmetric Mean Absolute Percentage Error) είναι ένα μέτρο ακρίβειας βασισμένο σε ποσοστιαία (ή σχετικά) σφάλματα της μελλοντικής πρόβλεψης της κάθε παραμέτρου.

Για τους δείκτες σφάλματος MASE και SMAPE της Beta Gompertz Generalized Makeham κατανομής, οι μέσες τιμές της κάθε παραμέτρου διαμορφώνονται σύμφωνα με τον πίνακα 14 (άνδρες & γυναίκες) για τα έτη πρόβλεψης από το 2013 έως το 2045. Οι Ευρωπαϊκές μέσες τιμές των 4 παραμέτρων αφορούν τις 22 χώρες της Ευρώπης, που συμμετέχουν στην ανάλυση.

Άνδρες				*Γυναίκες*			
MASE				***MASE***			
$\bar{\theta}$	$\bar{\xi}$	$\bar{\kappa}$	$\bar{\lambda}$	$\bar{\theta}$	$\bar{\xi}$	$\bar{\kappa}$	$\bar{\lambda}$
1,29811	2,6344	2,5398	9,8326	1,1615	1,5179	1,9538	1,5763
SMAPE				***SMAPE***			
$\bar{\theta}$	$\bar{\xi}$	$\bar{\kappa}$	$\bar{\lambda}$	$\bar{\theta}$	$\bar{\xi}$	$\bar{\kappa}$	$\bar{\lambda}$
0,53520	0,0556	1,1418	1,0102	0,0650	0,0014	0,0213	0,0121

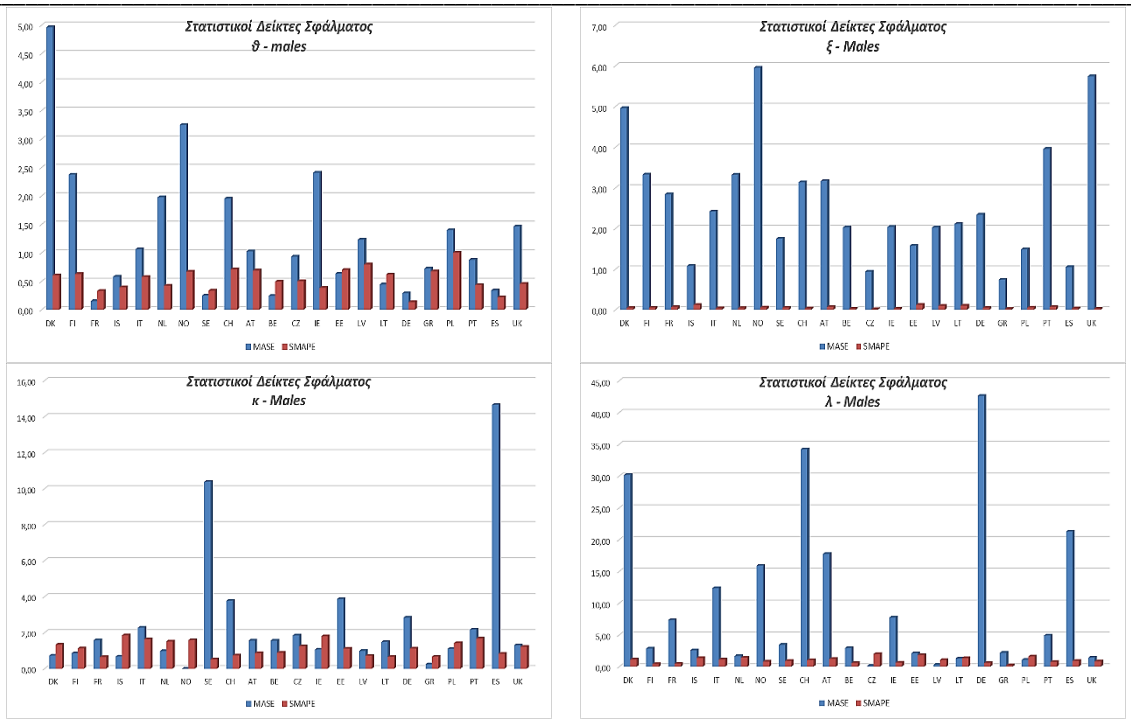
Πίνακας 14. Οι μέσες τιμές των 22 χωρών για τους δείκτες σφάλματος MASE & SMAPE για τις 4 παραμέτρους.

Η εικόνα 7, παρουσιάζει γραφικά τις τιμές των δεικτών σφάλματος MASE και SMAPE για την κάθε παράμετρο στους άνδρες. Ο δείκτης σφάλματος SMAPE για την παράμετρο ϑ, παραμένει ιδιαίτερα χαμηλός γύρω από την μέση τιμή για το σύνολο των 22 χωρών, με εξαίρεση τις χώρες Πολωνία, Λετονία και Εσθονία που εμφανίζουν σχετική αβεβαιότητα ως προς την συγκεκριμένη παράμετρο. Ο δείκτης σφάλματος MASE κινείται σε ικανοποιητικά επίπεδα ως προς την μελλοντική βεβαιότητα με μέση τιμή γύρω στο 1,3. Οι χώρες Δανία, Νορβηγία, Ιρλανδία και Ολλανδία εμφανίζουν μια «αποδυναμωμένη» μελλοντική βρεφική θνησιμότητα (εικόνα 7).

Το αποτέλεσμα του δείκτη MASE για την εξέλιξη του ανδρικού ποσοστού γήρανσης, εμφανίζει τιμές μεταξύ του 2 και του 3 στην πλειονότητα των χωρών, μια σχετικά υψηλή τιμή. Ίσως αυτό φανερώνει και την «ευαισθησία» της παραμέτρου ξ στο μέλλον. Αντίθετα, πολύ χαμηλή τιμή εμφανίζει ο δείκτης σφάλματος SMAPE για την ίδια παράμετρο.

Αξιοσημείωτο είναι το αποτέλεσμα του δείκτη MASE για τις παραμέτρους κ και λ των ανδρών. Οι παράγοντες κ και λ που αφορούν τους τυχαίους παράγοντες κινδύνου στο άτομο και στο σύνολο, αντίστοιχα, εμφανίζουν μια σχετική αβεβαιότητα, κυρίως η παράμετρος λ στην εικόνα 7. Για την παράμετρο κ, οι χώρες Σουηδία, Τσεχία, Ισπανία και Εσθονία εμφανίζουν υψηλή μελλοντική αβεβαιότητα και για την παράμετρο λ οι χώρες Δανία, Τσεχία, Γερμανία και Εσθονία αντίστοιχα.

Αντίθετα ο δείκτης σφάλματος SMAPE, αποδίδει χαμηλή τιμή σε όλες της χώρες της ανάλυσης, κάνοντας στατιστικά σημαντικά τα αποτελέσματα για τον τυχαίο παράγοντα κινδύνου εξαρτώμενο της ηλικίας (κ) αλλά και επί του συνόλου (λ). Με τον τρόπο αυτό δίνεται μια μαθηματική βεβαιότητα πρόβλεψης για τις δύο παραμέτρους που αφορούν στον ανδρικό πληθυσμό τα χρόνια 2013 – 2045 (εικόνα 7).



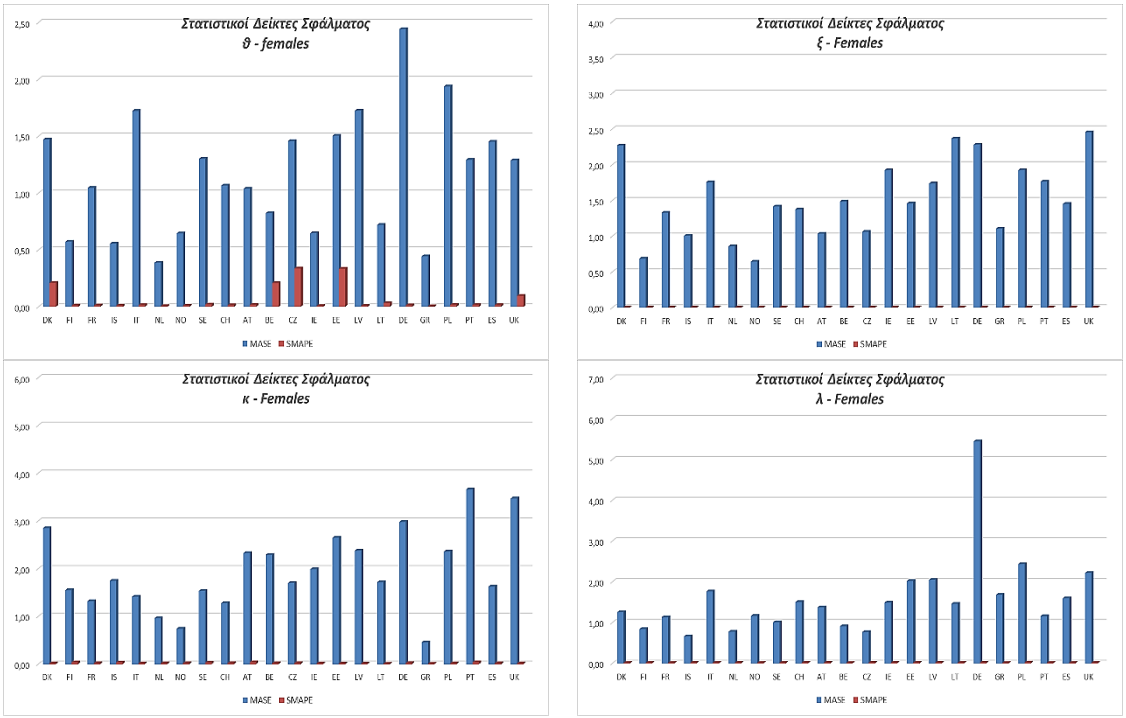
Εικόνα 7. Γραφική απεικόνιση των τιμών των δεικτών σφάλματος MASE και SMAPE για την κάθε παράμετρο στους άνδρες. Απεικόνιση των 22 χωρών που συμμετέχουν στην ανάλυση.

Η εικόνα 8, παρουσιάζει γραφικά τις τιμές των δεικτών σφάλματος MASE και SMAPE για την κάθε παράμετρο στο γυναικείο φύλο. Ο δείκτης MASE για την παράμετρο ϑ εμφανίζεται υψηλός στο σύνολο των υπό εξέταση χωρών σε αντίθεση με τον δείκτη SMAPE που εμφανίζει πολύ χαμηλές τιμές. Η αντίθεση στα αποτελέσματα των δύο δεικτών φανερώνει και την λεπτή ισορροπία μιας πρόβλεψης. Συγκρίνοντας τις μέσες τιμές των δύο φύλων, ο γυναικείος πληθυσμός εμφανίζει χαμηλότερη τιμή, προσφέροντας υψηλότερο ποσοστό βεβαιότητας.

Ομοίως η παράμετρος ξ εμφανίζει μία χαμηλότερη μέση τιμή (πίνακας 14) στους δείκτες σφάλματος MASE και SMAPE σε σχέση με αυτή των ανδρών. Μία επιπλέον παρατήρηση είναι η συλλογικότητα / ομοιότητα που εμφανίζει η πορεία της παραμέτρου σε όλες τις χώρες. Συνοψίζοντας, η πρόβλεψη του γυναικείου ποσοστού γήρανσης είναι σταθερή και στατιστικά προβλέψιμη με αρκετά μεγάλη ασφάλεια (εικόνα 8).

Σε επίπεδο τυχαίου παράγοντα κινδύνου εξαρτώμενο της ηλικίας (κ) αλλά και επί του συνόλου (λ) τα αποτελέσματα των δεικτών σφάλματος (εικόνα 8) δεν απέχουν πολύ από τα προηγούμενα συμπεράσματα. Ο δείκτης SMAPE δίνει χαμηλές τιμές και για τις δύο παραμέτρους σε όλες τις χώρες της ανάλυσης. Ο δείκτης MASE δίνει κυμαινόμενες τιμές και για τις δύο παραμέτρους.

Από τα παραπάνω, δίνονται πλέον κάποιες ενδείξεις, πως το «μονοπάτι» της ανθρώπινης θνησιμότητας έχει την δυνατότητα, σε έναν βαθμό να μελετηθεί και γιατί όχι να προβλεφθεί στο άμεσο μέλλον, με ένα σχετικά μικρό περιθώριο στατιστικού σφάλματος.



Εικόνα 8. Γραφική απεικόνιση των τιμών των δεικτών σφάλματος MASE και SMAPE για την κάθε παράμετρο στις γυναίκες. Απεικόνιση των 22 χωρών που συμμετέχουν στην ανάλυση.

Αποτελέσματα Δεικτών Σφάλματος MAE & MSE της $f_{BGGM}(x;\alpha,\beta,\theta,\xi,\kappa,\lambda)$

Το μέσο απόλυτο σφάλμα (MAE, Mean Absolute Error) είναι ένα μέτρο σφαλμάτων μεταξύ των παρατηρήσεων ανά ζεύγη που εκφράζουν το ίδιο φαινόμενο.

Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (MSE, Mean Squared Error) ενός εκτιμητή (η διαδικασία για την εκτίμηση μιας μη παρατηρούμενης ποσότητας) μετρά τον μέσο όρο των τετραγώνων των σφαλμάτων, δηλαδή τη μέση τετραγωνική διαφορά μεταξύ των εκτιμώμενων τιμών από την πραγματική τιμή. Ο δείκτης σφάλματος MSE είναι ένα μέτρο έκφρασης της ποιότητας μιας εκτιμώμενης παρατήρησης - είναι πάντα μη αρνητικός και οι τιμές πιο κοντά στο μηδέν είναι οι καλύτερες.

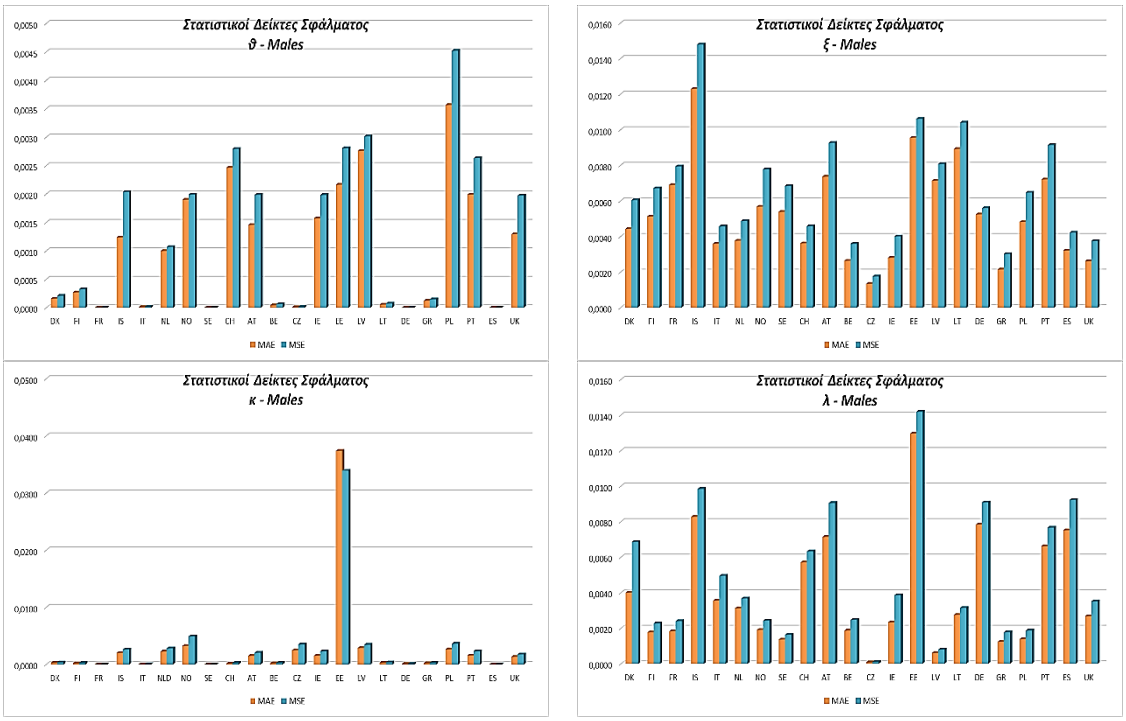
Για τους δείκτες σφάλματος MAE και MSE της Beta Gompertz Generalized Makeham κατανομής, οι μέσες τιμές της κάθε παραμέτρου διαμορφώνονται σύμφωνα με τον πίνακα 15 (άνδρες & γυναίκες) για τα έτη πρόβλεψης από το 2013 έως το 2045. Οι Ευρωπαϊκές μέσες τιμές των 4 παραμέτρων αφορούν τις 22 χώρες της Ευρώπης, που συμμετέχουν στην ανάλυση.

Άνδρες				*Γυναίκες*			
MAE				***MAE***			
$\bar{\theta}$	$\bar{\xi}$	$\bar{\kappa}$	$\bar{\lambda}$	$\bar{\theta}$	$\bar{\xi}$	$\bar{\kappa}$	$\bar{\lambda}$
0,00101	0,00527	0,00277	0,00394	0,00026	0,00034	0,00001	0,00021
MSE				***MSE***			
$\bar{\theta}$	$\bar{\xi}$	$\bar{\kappa}$	$\bar{\lambda}$	$\bar{\theta}$	$\bar{\xi}$	$\bar{\kappa}$	$\bar{\lambda}$
0,00126	0,00655	0,00299	0,00487	0,00036	0,00043	0,00002	0,00028

Πίνακας 15. Οι μέσες τιμές των 22 χωρών για τους δείκτες σφάλματος MAE & MSE για τις 4 παραμέτρους.

Ένα γενικό σχόλιο για τους δείκτες σφάλματος MAE και MSE, όπως φαίνεται στις εικόνες 10 και 11, είναι ότι εμφανίζουν κοντινά αποτελέσματα και για τα δύο φύλα. Σε όλες τις περιπτώσεις οι τιμές είναι πολύ κοντά στο μηδέν. Αυτό δίνει μια σαφή ένδειξη της ποιότητας της πρόβλεψης της κάθε παραμέτρου. Τιμές κοντά στο μηδέν δίνουν «βεβαιότητα» στα συμπεράσματα πρόβλεψης.

Ειδικότερα, στην εικόνα 9 και στις παραμέτρους ϑ και ξ των ανδρών, οι τιμές των δεικτών σφάλματος MAE και MSE παρουσιάζονται ιδιαίτερα χαμηλές, ίσως με μόνη εξαίρεση τις χώρες Πολωνία και Λετονία για την ϑ παράμετρο και Ισλανδία για την ξ παράμετρο.

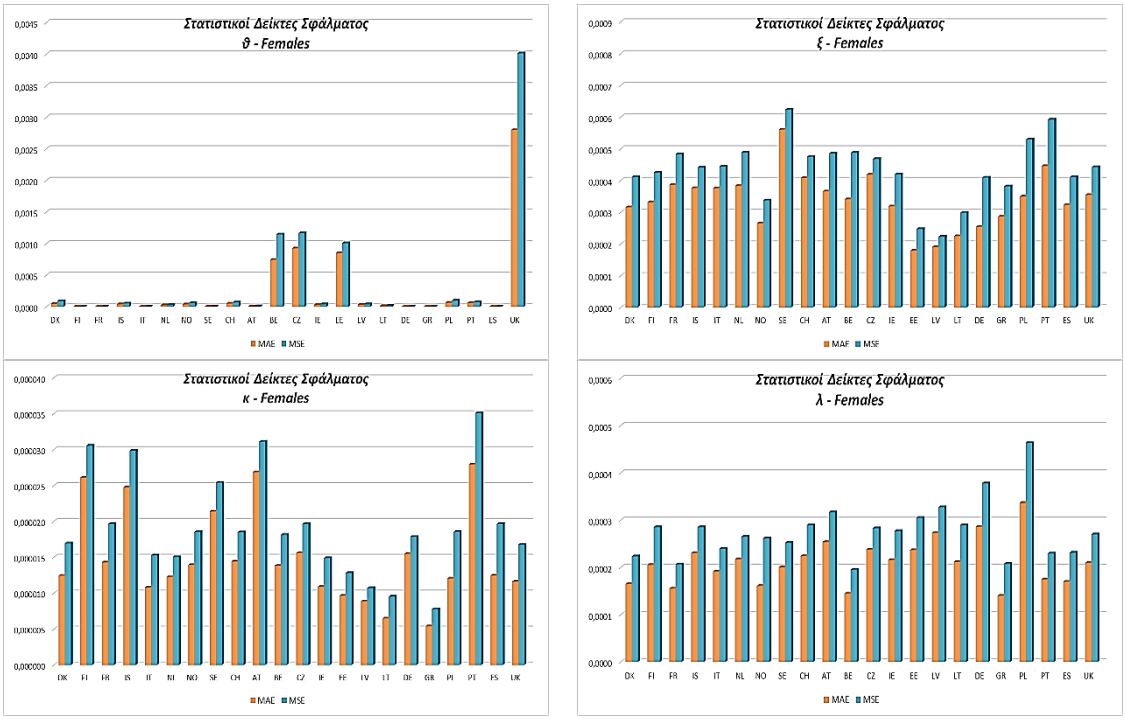


Εικόνα 9. Γραφική απεικόνιση των τιμών των δεικτών σφάλματος MAE και MSE για την κάθε παράμετρο στους άνδρες. Απεικόνιση των 22 χωρών που συμμετέχουν στην ανάλυση.

Για τον τυχαίο παράγοντα κινδύνου στους άνδρες, ατομικά (παράμετρος κ) και συλλογικά (παράμετρος λ), οι δείκτες σφάλματος MAE και MSE παρουσιάζουν ιδιαίτερα

χαμηλές τιμές για το σύνολο των χωρών (εικόνα 9 & πίνακας 15). Ίσως η χώρα που θα έπρεπε να κερδίσει την προσοχή είναι η Εσθονία, η οποία στο σύνολο της έρευνας είναι η χώρα που εμφανίζει την μεγαλύτερη ποιοτική αστάθεια / αβεβαιότητα.

Οι τιμές των δεικτών σφάλματος MAE και MSE για την κάθε παράμετρο στις γυναίκες, (εικόνα 10) εμφανίζει εξίσου καλά ποιοτικά χαρακτηριστικά. Η παράμετρος ϑ, δίνει χαμηλές τιμές σφάλματος, όπως και το αντίστοιχο ποσοστό γήρανσης (ξ) των γυναικών (εικόνα 10). Οι τιμές των δεικτών MAE και MSE, σε σύγκριση με τον ανδρών, προσεγγίζουν ακόμα περισσότερο το απόλυτο μηδέν (βεβαιότητα πρόβλεψης πορείας της παραμέτρου).



Εικόνα 10. Γραφική απεικόνιση των τιμών των δεικτών σφάλματος MAE και MSE για την κάθε παράμετρο στις γυναίκες. Απεικόνιση των 22 χωρών που συμμετέχουν στην ανάλυση.

Παρόμοια αποτελέσματα εντοπίζονται και για τις άλλες δύο παραμέτρους που αφορούν τον τυχαίο παράγοντα κινδύνου στις γυναίκες, ατομικά (παράμετρος κ) και συλλογικά (παράμετρος λ). Οι δύο δείκτες σφάλματος (MAE & MSE) δίνουν χαμηλές τιμές για το σύνολο των 22 χωρών της ανάλυσης (εικόνα 10 & πίνακας 15). Τα συμπεράσματα πρόβλεψης που αφορούν τον γυναικείο πληθυσμό κατά τα έτη 2013 έως 2045 μπορούν να εξαχθούν με ασφάλεια και με υψηλό ποσοστό προσέγγισης στην πραγματικότητα, που είναι και το ζητούμενο σε μία πρόβλεψη.

Σχολιασμός των παραμέτρων ως προβολές για την περίοδο 2020 - 45

Μία ενδεικτική χωρική ομαδοποίηση των δεδομένων σε επίπεδο γεωγραφικών κατανομών, αφορά την ένταξη της κάθε χώρας σε κατάλληλη γεωγραφική ομάδα σύμφωνα με την γεωγραφική της θέση. Επομένως δημιουργήθηκαν, 4 ομάδες χωρών σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα.

Βόρεια & Ανατολική Ευρώπη	***Βόρεια & Κεντρική Ευρώπη***	***Κεντρική Ευρώπη***	***Νότια Ευρώπη***
Σουηδία *Νορβηγία* *Φινλανδία* *Εσθονία* *Λετονία* *Λιθουανία*	*Δανία* *Πολωνία* *Γερμανία* *Ολλανδία* *Βέλγιο* *Ισλανδία* *Ιρλανδία* *Ηνωμ. Βασίλειο*	*Τσεχία* *Αυστρία* *Ελβετία* *Γαλλία*	*Πορτογαλία* *Ισπανία* *Ιταλία* *Ελλάδα*

Πίνακας 16. Ομαδοποίηση των 22 χωρών, σύμφωνα με την γεωγραφική τους θέση

Βρεφική Θνησιμότητα (Παράμετρος ϑ)

Από κοινωνικής πλευράς, θα ήταν επιθυμητό η παράμετρος $\boldsymbol{\vartheta}$, είναι να λαμβάνει όσο το δυνατόν χαμηλότερες τιμές. Σύμφωνα με την υπάρχουσα βιβλιογραφία (Drevenstedt et al., 2008), η βρεφική θνησιμότητα στο ανδρικό φύλο είναι υψηλότερη σε σχέση με το γυναικείο.

Η μεταβλητή $\boldsymbol{\vartheta}$, ως προς την ερμηνεία της θεωρείται αντίστροφη μεταβλητή (πίνακας 17), δηλαδή όταν η τιμή της παραμέτρου βρίσκεται κάτω από τον μέσο όρο της Ευρώπης, θεωρείται «Θετική (+)», ενώ αν είναι πάνω από το μέσο όρο της Ευρώπης θεωρείται «Αρνητική (-)». Ο κεντρικός μέσος όρος της παραμέτρου $\boldsymbol{\vartheta}$ για τους άνδρες των 22 χωρών, την περίοδο 1960 – 2013 βρέθηκε 0,002253 και στις γυναίκες βρέθηκε 0,001697. Για την μελλοντική πρόβλεψη την περίοδο 2013 – 2045 οι τιμές της παραμέτρου $\boldsymbol{\vartheta}$ διαμορφώνονται ως 0,00158 και 0,00134 για άνδρες και γυναίκες αντίστοιχα.

Ένα πρώτο γενικό συμπέρασμα είναι η μείωση των τιμών της βρεφικής θνησιμότητας που φαίνεται να διαμορφώνεται στο άμεσο μέλλον για άνδρες και γυναίκες. Αυτό αποτελεί ένα Ιδιαίτερα σημαντικό στοιχείο που θα μπορούσε να αντικατοπτρίζει την ποιότητα ζωής στις χώρες της Ευρώπης.

Αναλυτικότερα, οι 6 χώρες της Βόρειας και Κεντρικής Ευρώπης (πίνακας 16 & 17) παρουσιάζουν μια καλή εικόνα σε επίπεδο βρεφικής θνησιμότητας των ανδρών και των

γυναικών, αν και η Εσθονία με την Λιθουανία θα συνεχίσουν να προβληματίζουν τουλάχιστον για 20 ακόμη έτη ως προς την αντιμετώπιση των αιτιών που οδηγούν σε αυξημένους βρεφικούς θανάτους.

Καλύτερη εικόνα παρουσιάζουν και θα συνεχίσουν να παρουσιάζουν στο άμεσο μέλλον οι 8 χώρες τις Βόρειας και κεντρικής Ευρώπης (πίνακας 16 & 17). Η βρεφική θνησιμότητα στις οικονομικά πιο ανεπτυγμένες χώρες φαίνεται διαχρονικά να έχει μηδενιστεί. Εξαίρεση αποτελούν οι πληθυσμοί στην Πολωνία και αρκετά λιγότερο στην Ιρλανδία και την Ισλανδία που δείχνουν να κινούνται σε αρνητικές τιμές τόσο για το ανδρικό όσο και για το γυναικείο φύλο.

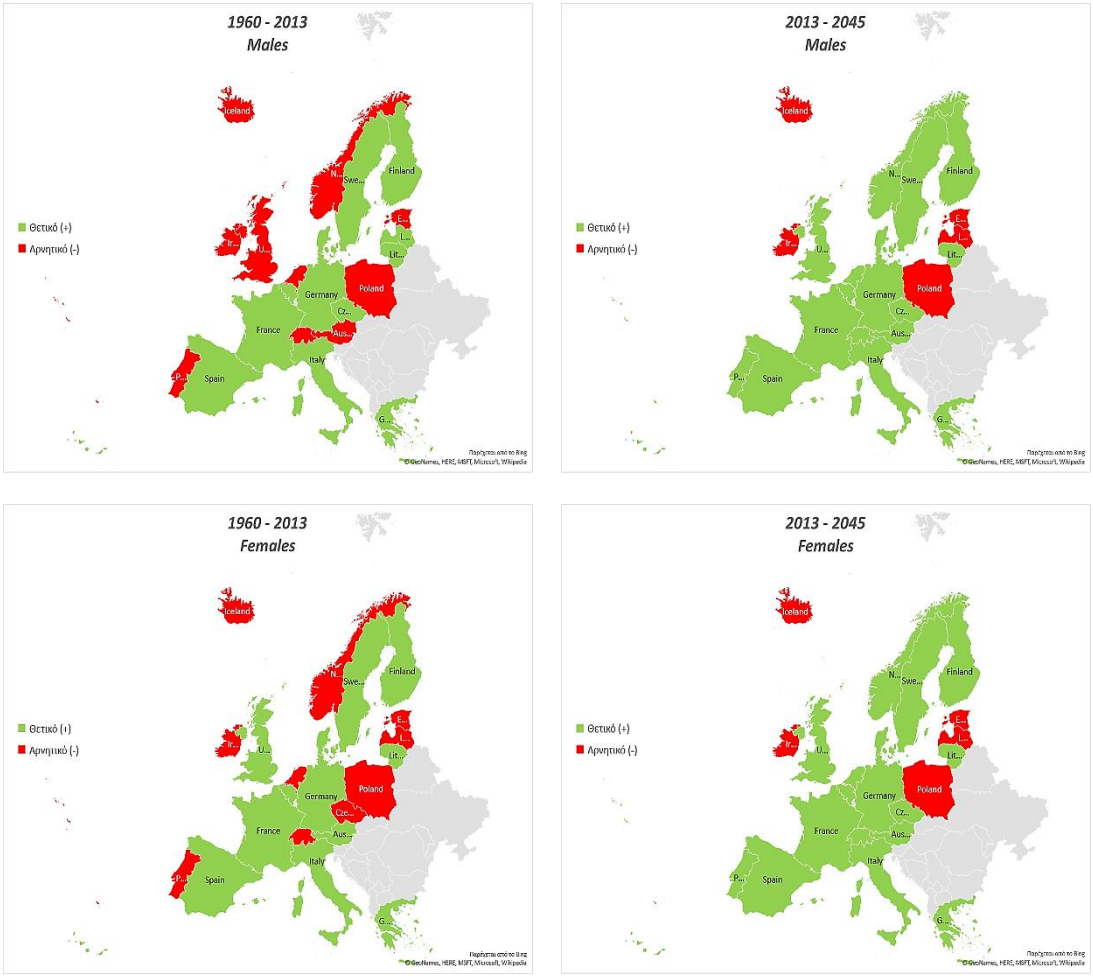
		Πορεία της βρεφικής θνησιμότητας – Παράμετρος θ			
		Άνδρες		**Γυναίκες**	
		1960 - 2013	**2013 - 2045**	**1960 - 2013**	**2013 - 2045**
Βόρεια & Ανατολική Ευρώπη	**Σουηδία**	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)
	Νορβηγία	Αρνητικό (-)	Θετικό (+)	Αρνητικό (-)	Θετικό (+)
	Φινλανδία	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)
	Εσθονία	Αρνητικό (-)	Αρνητικό (-)	Αρνητικό (-)	Αρνητικό (-)
	Λετονία	Θετικό (+)	Αρνητικό (-)	Αρνητικό (-)	Αρνητικό (-)
	Λιθουανία	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)
Βόρεια & Κεντρική Ευρώπη	**Δανία**	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)
	Πολωνία	Αρνητικό (-)	Αρνητικό (-)	Αρνητικό (-)	Αρνητικό (-)
	Γερμανία	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)
	Ολλανδία	Αρνητικό (-)	Θετικό (+)	Αρνητικό (-)	Θετικό (+)
	Βέλγιο	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)
	Ισλανδία	Αρνητικό (-)	Αρνητικό (-)	Αρνητικό (-)	Αρνητικό (-)
	Ιρλανδία	Αρνητικό (-)	Αρνητικό (-)	Αρνητικό (-)	Αρνητικό (-)
	Αγγλία	Αρνητικό (-)	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)
Κεντρική Ευρώπη	**Τσεχία**	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Αρνητικό (-)	Θετικό (+)
	Αυστρία	Αρνητικό (-)	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)
	Ελβετία	Αρνητικό (-)	Θετικό (+)	Αρνητικό (-)	Θετικό (+)
	Γαλλία	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)
Νότια Ευρώπη	**Πορτογαλία**	Αρνητικό (-)	Θετικό (+)	Αρνητικό (-)	Θετικό (+)
	Ισπανία	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)
	Ιταλία	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)
	Ελλάδα	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)

Πίνακας 17. Χαρακτηρισμός της παραμέτρου θ (Θετική = μειωμένη βρεφική θνησιμότητα ή Αρνητική = αυξημένη βρεφική θνησιμότητα) ως προς την έκβασή της, σε συνάρτηση με τον μέσο όρο της παραμέτρου για το σύνολο της Ευρώπης.

Η κεντρική Ευρώπη ακολουθεί μία φθίνουσα πορεία ως προς την βρεφική θνησιμότητα, πάντα με βάση και τα ποιοτικά χαρακτηριστικά που εκφράζουν τις 4 αυτές χώρες (πίνακας 16 & 17). Υπάρχει όμως μία χώρα που ξεφεύγει από το πρότυπο των άλλων τριών χωρών. Είναι η

Ελβετία, που αν και οριακά στο μέσο όρο βρεφικής θνησιμότητας δεν καταφέρνει να πάρει θετικό πρόσημο. Παρότι κινείται στα όρια του στατιστικού λάθους, αξίζει την ιδιαίτερη προσοχή του ερευνητή για το παρόν αλλά και για το μέλλον.

Την χαμηλότερη πορεία βρεφικής θνησιμότητας φαίνεται πως θα συνεχίσουν να κατέχουν και στο μέλλον οι χώρες τις νότιας Ευρώπης (πίνακας 16), τόσο για άνδρες όσο και για γυναίκες. Παράγοντες όπως το κλίμα και η ποιότητα ζωής (μεσογειακή διατροφή) ίσως συντελούν όπως φαίνεται σε πιο καλά ποιοτικά χαρακτηριστικά, ακόμα και αν οι χώρες αυτές δεν έχουν την οικονομική δύναμη των υπολοίπων χωρών.



Εικόνα 11. Οι σχετικές θέσεις των χωρών για την παράμετρο ϑ (θετική ή αρνητική) ως προς την έκβασή τους. Η πράσινη απόχρωση αφορά την θετική έκβαση και η κόκκινη απόχρωση αφορά την αρνητική έκβαση, σε σχέση με τον μέσο όρο της παραμέτρου για το σύνολο της Ευρώπης.

Ολοκληρώνοντας την μελέτη για την παράμετρο ϑ και την βρεφική θνησιμότητα των δύο φύλων, οι χώρες που προβληματίζουν ιδιαιτέρα ως προς την σχετική θέση που καταλαμβάνουν

στο μέλλον σε σχέση με τις υπόλοιπες 19, είναι η Πολωνία, η Λετονία και η Εσθονία (εικόνα 11), αφού εμφανίζουν τιμές αρκετά υψηλότερες από τις άλλες χώρες.

Πορεία γήρανσης (Παράμετρος ξ)

Η παράμετρος ***ξ*** χαρακτηρίζει το ποσοστό γήρανσης στις μεγάλες ηλικίες (άνω των 70 ετών) και αναφέρεται συχνά ως κλίση Gompertz. Υψηλές τιμές της παραμέτρου, χαρακτηρίζονται από μία πρώτη ένδειξη μακροζωίας για την χώρα. Αυτό όμως, θα μπορούσε να σημαίνει πως ο πληθυσμός της συγκεκριμένης περιοχής μελέτης πιθανόν να είναι γερασμένος. Το γεγονός αυτό μπορεί να έχει επιπτώσεις σε οικονομικό και κοινωνικό επίπεδο, καθώς το αντίστοιχο ποσοστό των ατόμων σε ηλικία εργασίας συρρικνώνεται, ενώ ο αριθμός των ατόμων άνω των 70 ετών διευρύνεται.

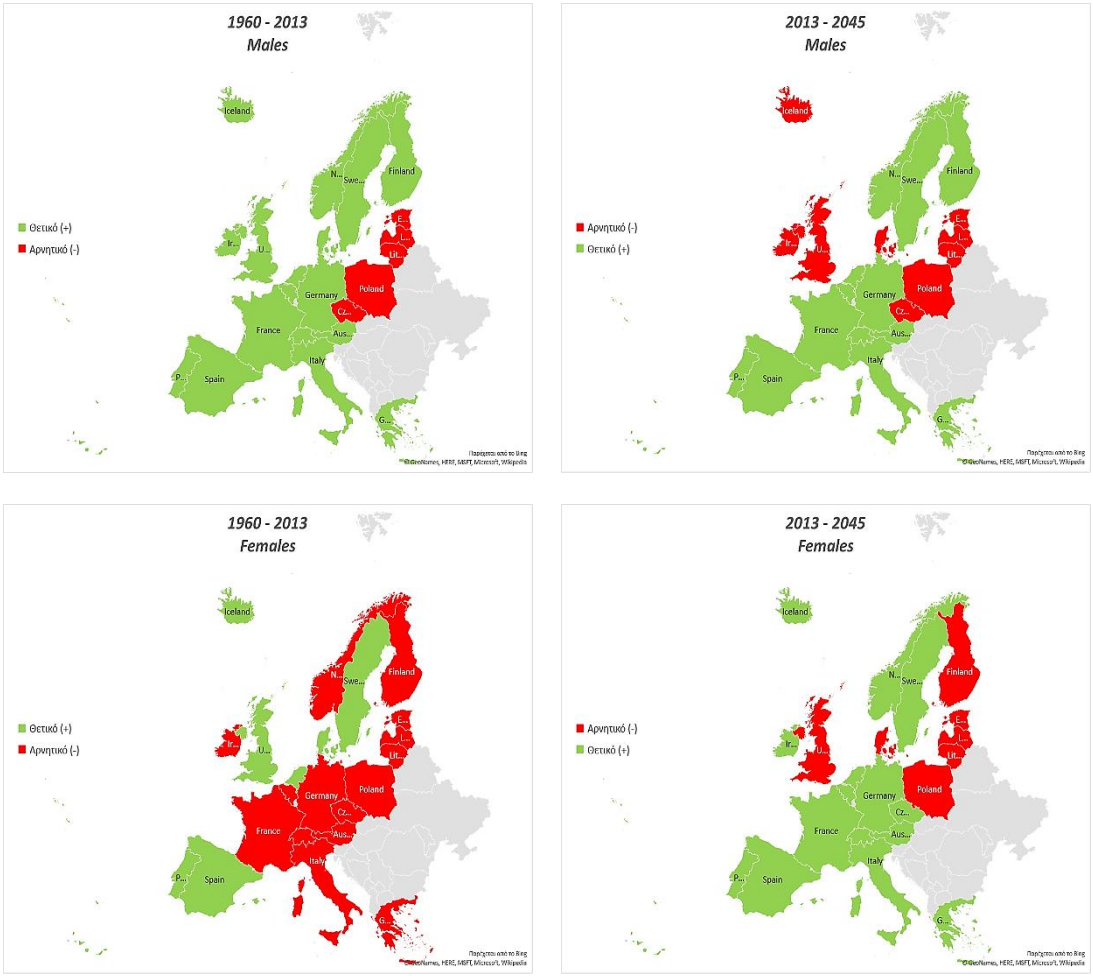
Από το ενδιαφέρον της επιστημονικής κοινότητας για την μελέτη του φαινομένου (Carinci et al., 2020), διαφαίνεται και η μεγάλη σημασία του ποσοστού γήρανσης στην πορεία της θνησιμότητας αφού επηρεάζει σημαντικά το ποσοστό της. Τις τελευταίες δεκαετίες, οι θάνατοι στον δυτικό κόσμο συσσωρεύονται μετά τα 85+ έτη, με αποτέλεσμα να αυξάνεται η τιμή του ***ξ***, με αντίστοιχο τρόπο.

Η μεταβλητή ***ξ***, ως προς την ερμηνεία της θεωρήθηκε κανονική μεταβλητή (πίνακας 18), δηλαδή όταν η τιμή της παραμέτρου βρίσκεται πάνω από τον μέσο όρο της Ευρώπης, αξιολογείται ως «Θετικό (+)», ενώ αν είναι κάτω από το μέσο όρο της Ευρώπης αξιολογείται ως «Αρνητικό (-)». Ο κεντρικός μέσος όρος της παραμέτρου ***ξ*** για τους άνδρες των 22 χωρών, την περίοδο 1960 – 2013 βρέθηκε 0,094018 και για τις γυναίκες 0,244862. Για την μελλοντική πρόβλεψη την περίοδο 2013 – 2045 οι τιμές της παραμέτρου ***ξ*** διαμορφώνονται ως 0,109149 και 0,240192 για άνδρες και γυναίκες αντίστοιχα.

Ένα πρώτο γενικό συμπέρασμα είναι η αύξηση των τιμών του ποσοστού γήρανσης για τους άνδρες και η αντίστοιχη οριακή μείωση για τις γυναίκες στο μέλλον. Περισσότεροι άνδρες ηλικιωμένοι άνω των 70 ετών προς το σύνολο του πληθυσμού θα εμφανιστούν τα επόμενα χρόνια στις 22 χώρες τις Ευρώπης, φαινόμενο, το οποίο σε συνδυασμό με την μείωση των γεννήσεων, τείνει να μετασχηματίσει τη σύνθεση της ηλικιακής πυραμίδας μέσα στα επόμενα χρόνια.

Οι 6 χώρες της Βόρειας και Κεντρικής Ευρώπης (πίνακας 16 & 18, εικόνα 12) θα εμφανίσουν ένα μοιρασμένο ποσοστό. Με τη σχετική θέση των χωρών ως προς το μέσο όρο της Ευρώπης,

για τη Εσθονία, την Λετονία και την Λιθουανία να προβληματίζουν σε επίπεδο αυξημένων θανάτων άνω των 70 ετών, τόσο για άνδρες όσο και για γυναίκες.



Εικόνα 12. Οι σχετικές θέσεις των χωρών για την παράμετρο ***ξ*** (θετική = περισσότεροι άνθρωποι επιζούν άνω των 70 ετών ή αρνητική = λιγότεροι άνθρωποι επιζούν άνω των 70 ετών) ως προς την έκβασή τους. Η πράσινη απόχρωση αφορά την θετική έκβαση και η κόκκινη απόχρωση αφορά την αρνητική έκβαση, σε σχέση με τον μέσο όρο της παραμέτρου για το σύνολο της Ευρώπης.

Καλύτερη εικόνα θα παρουσιάσουν στο άμεσο μέλλον οι 8 χώρες τις Βόρειας και κεντρικής Ευρώπης (πίνακας 16, 18 & εικόνα 12), στην περίπτωση όμως που το φαινόμενο εξετάζεται από την οπτική γωνία της μακροζωίας, προκαλεί προβληματισμό το γεγονός ότι στην Ισλανδία, την Ιρλανδία και το Ηνωμένο Βασίλειο εμφανίζεται μια συρρίκνωση του γερασμένου ανδρικού πληθυσμού, σε αντίθεση με τον γυναικείο. Ομοίως και η Πολωνία δείχνει να προβληματίζει με την εξέλιξη του πληθυσμού της, ενώ η Γερμανία αντιστρέφει τις αρχικά «κακές» τιμές της στα δύο φύλα.

Συνοψίζοντας, την καλύτερη σχετική θέση μεταξύ των 22 χωρών, κατέχουν οι χώρες της Κεντρικής Ευρώπης (πίνακας 16, 18 & εικόνα 12), όπου στο σύνολό τους θα εμφανίσουν μία αξιόλογη αύξηση του πληθυσμού τους για ηλικίες άνω των 70 ετών. Μόνη εξαίρεση στην περίπτωση αυτή αποτελεί η Τσεχία για τους άνδρες. Η νότια Ευρώπη, όπως δείχνουν τα αποτελέσματα των μετρήσεων (πίνακας 16, 18 & εικόνα 12) θα συρρικνώσει σε μικρό βαθμό τον γερασμένο πληθυσμό της στο άμεσο μέλλον.

	Παράγοντας που επηρεάζεται από την δημογραφική γήρανση – Παράμετρος ξ				
		Άνδρες		**Γυναίκες**	
		1960 - 2013	**2013 - 2045**	**1960 - 2013**	**2013 - 2045**
Βόρεια & Ανατολική Ευρώπη	**Σουηδία**	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)
	Νορβηγία	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Αρνητικό (-)	Θετικό (+)
	Φινλανδία	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Αρνητικό (-)	Αρνητικό (-)
	Εσθονία	Αρνητικό (-)	Αρνητικό (-)	Αρνητικό (-)	Αρνητικό (-)
	Λετονία	Αρνητικό (-)	Αρνητικό (-)	Αρνητικό (-)	Αρνητικό (-)
	Λιθουανία	Αρνητικό (-)	Αρνητικό (-)	Αρνητικό (-)	Αρνητικό (-)
Βόρεια & Κεντρική Ευρώπη	**Δανία**	Θετικό (+)	Αρνητικό (-)	Θετικό (+)	Αρνητικό (-)
	Πολωνία	Αρνητικό (-)	Αρνητικό (-)	Αρνητικό (-)	Αρνητικό (-)
	Γερμανία	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Αρνητικό (-)	Θετικό (+)
	Ολλανδία	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)
	Βέλγιο	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Αρνητικό (-)	Θετικό (+)
	Ισλανδία	Θετικό (+)	Αρνητικό (-)	Θετικό (+)	Θετικό (+)
	Ιρλανδία	Θετικό (+)	Αρνητικό (-)	Αρνητικό (-)	Θετικό (+)
	Αγγλία	Θετικό (+)	Αρνητικό (-)	Θετικό (+)	Αρνητικό (-)
Κεντρική Ευρώπη	**Τσεχία**	Αρνητικό (-)	Αρνητικό (-)	Αρνητικό (-)	Θετικό (+)
	Αυστρία	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Αρνητικό (-)	Θετικό (+)
	Ελβετία	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Αρνητικό (-)	Θετικό (+)
	Γαλλία	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Αρνητικό (-)	Θετικό (+)
Νότια Ευρώπη	**Πορτογαλία**	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)
	Ισπανία	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)
	Ιταλία	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Αρνητικό (-)	Θετικό (+)
	Ελλάδα	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Αρνητικό (-)	Θετικό (+)

Πίνακας 18. Χαρακτηρισμός της παραμέτρου ***ξ*** (θετική = περισσότεροι άνθρωποι επιζούν άνω των 70 ετών ή αρνητική = λιγότεροι άνθρωποι επιζούν άνω των 70 ετών) ως προς την έκβασή της, σε συνάρτηση με τον μέσο όρο της παραμέτρου για το σύνολο της Ευρώπης.

Τυχαίος παράγοντας κινδύνου εξαρτώμενος της ηλικίας (Παράμετρος κ)

Η παράμετρος ***κ*** εξετάζει την εμφάνιση ενός τυχαίου παράγοντα κινδύνου στο άτομο, με συνέπεια τον θάνατο, λόγω είτε της απότομης χειροτέρευσης της υγείας είτε εξωγενούς τυχαίου παράγοντα (π.χ. τροχαία ατυχήματα, αυτοκτονία). Μια τιμή του ***κ*** κοντά στο μηδέν, υποδηλώνει ότι η πιθανότητα ξαφνικού θανάτου είναι χαμηλή. Έχει παρατηρηθεί ότι η επίδραση της τυχαιότητας στη θνησιμότητα αυξάνεται στους νεαρούς ενήλικες - οι οποίοι συνήθως υιοθετούν έναν πιο επικίνδυνο τρόπο ζωής - καθώς και για τις ηλικίες μεταξύ 50 και 75 ετών, λόγω ειδικών περιπτώσεων ή ξαφνικών γεγονότων υγείας.

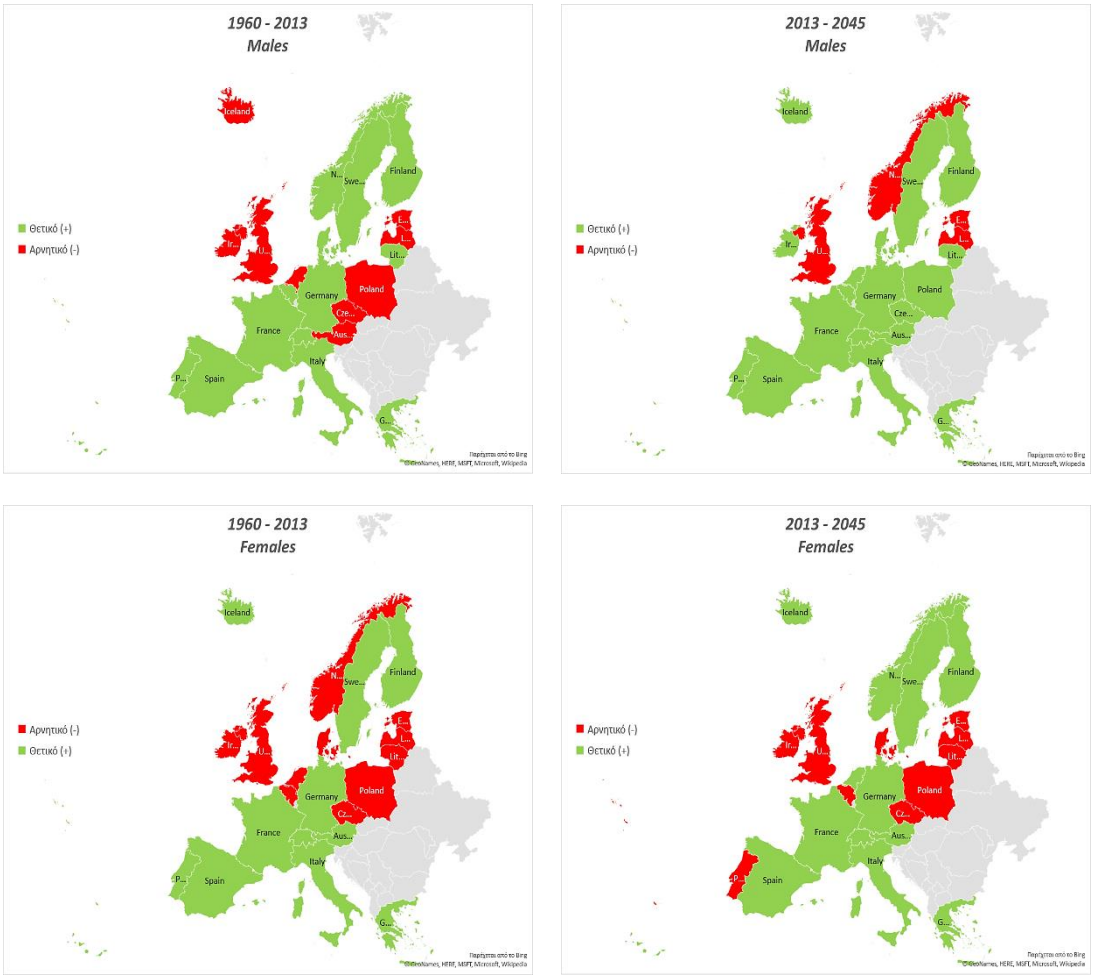
		Τυχαίος παράγοντα κινδύνου, εξαρτώμενος της ηλικίας – Παράμετρος *κ*			
		Άνδρες		**Γυναίκες**	
		1960 - 2013	**2013 - 2045**	**1960 - 2013**	**2013 - 2045**
Βόρεια & Ανατολική Ευρώπη	**Σουηδία**	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)
	Νορβηγία	Θετικό (+)	Αρνητικό (-)	Αρνητικό (-)	Θετικό (+)
	Φινλανδία	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)
	Εσθονία	Αρνητικό (-)	Αρνητικό (-)	Αρνητικό (-)	Αρνητικό (-)
	Λετονία	Αρνητικό (-)	Αρνητικό (-)	Αρνητικό (-)	Αρνητικό (-)
	Λιθουανία	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Αρνητικό (-)	Αρνητικό (-)
Βόρεια & Κεντρική Ευρώπη	**Δανία**	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Αρνητικό (-)	Αρνητικό (-)
	Πολωνία	Αρνητικό (-)	Θετικό (+)	Αρνητικό (-)	Αρνητικό (-)
	Γερμανία	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)
	Ολλανδία	Αρνητικό (-)	Θετικό (+)	Αρνητικό (-)	Θετικό (+)
	Βέλγιο	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Αρνητικό (-)	Αρνητικό (-)
	Ισλανδία	Αρνητικό (-)	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)
	Ιρλανδία	Αρνητικό (-)	Θετικό (+)	Αρνητικό (-)	Αρνητικό (-)
	Αγγλία	Αρνητικό (-)	Αρνητικό (-)	Αρνητικό (-)	Αρνητικό (-)
Κεντρική Ευρώπη	**Τσεχία**	Αρνητικό (-)	Θετικό (+)	Αρνητικό (-)	Αρνητικό (-)
	Αυστρία	Αρνητικό (-)	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)
	Ελβετία	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)
	Γαλλία	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)
Νότια Ευρώπη	**Πορτογαλία**	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Αρνητικό (-)
	Ισπανία	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)
	Ιταλία	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)
	Ελλάδα	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)

Πίνακας 19. Χαρακτηρισμός της παραμέτρου ***κ*** (θετική = μικρός αριθμός θανάτων από τυχαία συμβάντα σε ατομικό επίπεδο ή αρνητική = αυξημένος αριθμός θανάτων από τυχαία συμβάντα σε ατομικό επίπεδο) ως προς την έκβασή της, σε συνάρτηση με τον μέσο όρο της παραμέτρου για το σύνολο της Ευρώπης.

Η μεταβλητή ***κ***, ως προς την ερμηνεία της θεωρείται αντίστροφη μεταβλητή (πίνακας 19), δηλαδή όταν η τιμή της παραμέτρου βρίσκεται κάτω από τον μέσο όρο της Ευρώπης, θεωρείται «Θετική (+)», ενώ αν είναι πάνω από το μέσο όρο της Ευρώπης θεωρείται «Αρνητική (-)». Ο

κεντρικός μέσος όρος της παραμέτρου κ για τους άνδρες των 22 χωρών, την περίοδο 1960 – 2013 βρέθηκε 0,001126 και στις γυναίκες βρέθηκε αρκετά χαμηλότερος 0,000711. Για την μελλοντική πρόβλεψη την περίοδο 2013 – 2045 οι μέσες τιμές της παραμέτρου κ διαμορφώνονται ως 0,002266 και 0,000672 για άνδρες και γυναίκες αντίστοιχα.

Ξεκινώντας με τις 6 χώρες της Βόρειας και Κεντρικής Ευρώπης (πίνακας 13 & 19, εικόνα 13) φαίνεται ότι σε αυτές θα εμφανίσουν ένα εξίσου μοιρασμένο ποσοστό οι άνδρες και οι γυναίκες. Με την σχετική θέση των ανδρών της Νορβηγίας να παρουσιάζει μια αρνητική εικόνα σε απόλυτους αριθμούς.



Εικόνα 13. Οι σχετικές θέσεις των χωρών για την παράμετρο κ (θετική = μικρός αριθμός θανάτων από τυχαία συμβάντα σε ατομικό επίπεδο ή αρνητική = αυξημένος αριθμός θανάτων από τυχαία συμβάντα σε ατομικό επίπεδο) ως προς την έκβασή τους. Η πράσινη απόχρωση αφορά την θετική έκβαση και η κόκκινη απόχρωση αφορά την αρνητική έκβαση, σε σχέση με τον μέσο όρο της παραμέτρου για το σύνολο της Ευρώπης.

Οι χώρες της Βόρειας και κεντρικής Ευρώπης (πίνακας 13 & 19, εικόνα 13), εμφανίζουν μάλλον αναμενόμενα αποτελέσματα. Τα δεδομένα για το Ηνωμένο βασίλειο, το Βέλγιο και την

Ιρλανδία, δείχνουν σημάδια έντονου προβληματισμού αφού διαχρονικά το επίπεδο του αιφνίδιου θανάτου σε νεαρές ηλικίες είναι και θα παραμείνει αρκετά υψηλότερο σε σχέση με τις υπόλοιπες χώρες της Ευρώπης.

Από την κεντρική Ευρώπη, μόνο τα δεδομένα του γυναικείου πληθυσμού της Τσεχίας εμφανίζουν υψηλότερη τιμή, αν και η σχετική θέση της Τσεχίας είναι πολύ κοντά στο μέσο όρο με τις άλλες χώρες. Ομοίως στη νότια Ευρώπη, τα δεδομένα στην Πορτογαλία θα εμφανίσουν αρνητική εικόνα στο μέλλον σε ότι αφορά τον γυναικείο πληθυσμό (πίνακας 13 & 19, εικόνα 13).

Κλείνοντας πρέπει να επισημανθούν ορισμένες σημαντικές υποθέσεις της μελέτης. Η ερμηνεία της παραμέτρου $\boldsymbol{\kappa}$ οφείλεται κατά κύριο λόγο στην ηλικία και όπως φαίνεται από τα αποτελέσματα που σχολιάστηκαν, επηρεάζεται και από το φύλο. Αυτό γίνεται αντιληπτό στην εικόνα 14, όπου στις γυναίκες, ο μέσος όρος της μεταβλητής αριθμητικά είναι πιο χαμηλός από των ανδρών, εντούτοις το μέλλον δείχνει να επηρεάζει τις σχετικές θέσεις των χωρών ως προς τη μέση τιμή της Ευρώπης. Συνολικά σε 10 χώρες θα υπάρξει αύξηση της μεταβλητής $\boldsymbol{\kappa}$ για τις γυναίκες, ενώ σε μόλις 4 χώρες για τους άνδρες.

Μία επιπλέον υπόθεση της μελέτης, αφορά στον «προσωπικό» χαρακτήρα των δεδομένων ως προς την παράμετρο $\boldsymbol{\kappa}$. Δεδομένου ότι η εκτίμησή της μεταβλητής βασίζεται σε ατομικά δεδομένα / δεδομένα προσωπικού χαρακτήρα, που δεν είναι πάντοτε διαθέσιμα από τις επίσημες στατιστικές αρχές ή αυτά που λαμβάνονται χαρακτηρίζονται συχνά από έναν αριθμό περιορισμών και ελλείψεων (Kostaki et al., 2019) όπως η μη ακριβή ηλικία ερωτώμενου, τα μελλοντικά συμπεράσματα που προκύπτουν από αυτή την παράμετρο αποτελούν ουσιαστικά απλές ενδείξεις.

Τυχαίος παράγοντας κινδύνου που επηρεάζει το σύνολο του πληθυσμού (Παράμετρος λ)

Σχολιάζοντας τα αποτελέσματα από τον πίνακα 20 και την αντίστοιχη εικόνα 14, σχετικά με την παράμετρο $\boldsymbol{\lambda}$ για τις 22 χώρες της Ευρώπης, η περίπτωση των ανδρών παρουσιάζει εξαιρετικό ενδιαφέρον. Ξεκινώντας την ανάλυση της παραμέτρου, υπενθυμίζεται πως η παράμετρος $\boldsymbol{\lambda}$ αναφέρεται, σε συμβάντα που θα επηρεάσουν ολόκληρο τον πληθυσμό μιας χώρας. Κατά την ανάλυση, παρατηρούνται έντονες διακυμάνσεις που πιθανόν να οφείλονται σε διάφορους κοινωνικούς (π.χ. πόλεμος, ασθένειες κλπ.) και οικονομικούς (π.χ. χαμηλό εισόδημα, οικονομική κρίση κλπ.) κινδύνους. Όταν η τιμή της παραμέτρου βρίσκεται κοντά στο μηδέν

αποτυπώνεται μια φυσιολογική πορεία στην εξέλιξη της θνησιμότητας της κάθε χώρας, μη επηρεαζόμενη από εξωτερικούς παράγοντες.

Όταν η τιμή της παραμέτρου $\boldsymbol{\lambda}$ βρίσκεται κάτω από τον μέσο όρο των 22 χωρών της Ευρώπης, θεωρείται «Θετική (+)», ενώ αν είναι πάνω από το μέσο όρο της Ευρώπης θεωρείται «Αρνητική (-)». Ο κεντρικός μέσος όρος της παραμέτρου $\boldsymbol{\lambda}$ για τους άνδρες των 22 χωρών, την περίοδο 1960 – 2013 βρέθηκε 0,003175 και στις γυναίκες βρέθηκε οριακά υψηλότερος 0,005057. Για την πρόβλεψη της περιόδου 2013 – 2045 οι τιμές της παραμέτρου $\boldsymbol{\lambda}$ διαμορφώνονται ως 0,020987 και 0,017134 για άνδρες και γυναίκες αντίστοιχα.

Αύξηση Θνησιμότητας από τυχαίο παράγοντα με επίδραση σε όλο τον πληθυσμό – Παράμετρος λ					
		Άνδρες		**Γυναίκες**	
		1960 - 2013	**2013 - 2045**	**1960 - 2013**	**2013 - 2045**
Βόρεια & Ανατολική Ευρώπη	**Σουηδία**	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)
	Νορβηγία	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)
	Φινλανδία	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Αρνητικό (-)
	Εσθονία	Αρνητικό (-)	Αρνητικό (-)	Αρνητικό (-)	Αρνητικό (-)
	Λετονία	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Αρνητικό (-)
	Λιθουανία	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Αρνητικό (-)
Βόρεια & Κεντρική Ευρώπη	**Δανία**	Θετικό (+)	Αρνητικό (-)	Θετικό (+)	Αρνητικό (-)
	Πολωνία	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Αρνητικό (-)
	Γερμανία	Αρνητικό (-)	Αρνητικό (-)	Αρνητικό (-)	Αρνητικό (-)
	Ολλανδία	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)
	Βέλγιο	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)
	Ισλανδία	Αρνητικό (-)	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)
	Ιρλανδία	Θετικό (+)	Αρνητικό (-)	Θετικό (+)	Θετικό (+)
	Αγγλία	Θετικό (+)	Αρνητικό (-)	Θετικό (+)	Θετικό (+)
Κεντρική Ευρώπη	**Τσεχία**	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)
	Αυστρία	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Αρνητικό (-)	Θετικό (+)
	Ελβετία	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)	Θετικό (+)
	Γαλλία	Αρνητικό (-)	Αρνητικό (-)	Θετικό (+)	Θετικό (+)
Νότια Ευρώπη	**Πορτογαλία**	Αρνητικό (-)	Αρνητικό (-)	Θετικό (+)	Αρνητικό (-)
	Ισπανία	Αρνητικό (-)	Αρνητικό (-)	Αρνητικό (-)	Θετικό (+)
	Ιταλία	Θετικό (+)	Αρνητικό (-)	Θετικό (+)	Αρνητικό (-)
	Ελλάδα	Αρνητικό (-)	Θετικό (+)	Αρνητικό (-)	Αρνητικό (-)

Πίνακας 20. Χαρακτηρισμός της παραμέτρου $\boldsymbol{\lambda}$ (θετική = μικρός αριθμός θανάτων από τυχαία συμβάντα σε συλλογικό επίπεδο ή αρνητική = αυξημένος αριθμός θανάτων από τυχαία συμβάντα σε συλλογικό επίπεδο) ως προς την έκβασή της, σε συνάρτηση με τον μέσο όρο της παραμέτρου για το σύνολο της Ευρώπης.

Μία ένδειξη της πορείας της παραμέτρου $\boldsymbol{\lambda}$ αποτυπώνεται στην εικόνα 14. Η προβολή της τάσης της παραμέτρου, είναι αυξητική και για τα δύο φύλα. Στο κεφάλαιο 7, παρουσιάζεται η πορεία της παραμέτρου συγκεντρωτικά. Το «άνοιγμα» ανάμεσα στα δύο φύλα, ενώ κατά το

παρελθόν είναι μεγάλο, τα τελευταία 10 χρόνια συρρικνώνεται, με την τάση αυτή να συνεχίζει έως το 2045 (εκτίμηση προβολής). Ο ανδρικός πληθυσμός δείχνει πως θα επηρεαστεί, σε επίπεδο θνησιμότητας περισσότερο από τις γυναίκες. Ήδη διανύουμε την περίοδο (2019 – 2020) της πανδημίας (COVID-19) που επηρεάζει το σύνολο των χωρών του κόσμου, όπως και την Ευρώπη. Η πανδημία του κορωνοϊού, έχει προκαλέσει αύξηση θανάτων σε παγκόσμιο επίπεδο, κυρίως σε ανθρώπους άνω των 60 ετών με υποκείμενα νοσήματα.

Οι χώρες της Βόρειας και Ανατολικής Ευρώπης (πίνακας 13 & 20, εικόνα 14) δείχνουν να επηρεάζονται λιγότερο από δυσάρεστους μελλοντικούς παράγοντες, με εξαίρεση τους γυναικείους πληθυσμούς της Εσθονίας, της Φινλανδίας και της Λιθουανίας που κατατάσσονται στις χώρες με υψηλά ποσοστά θανάτων.

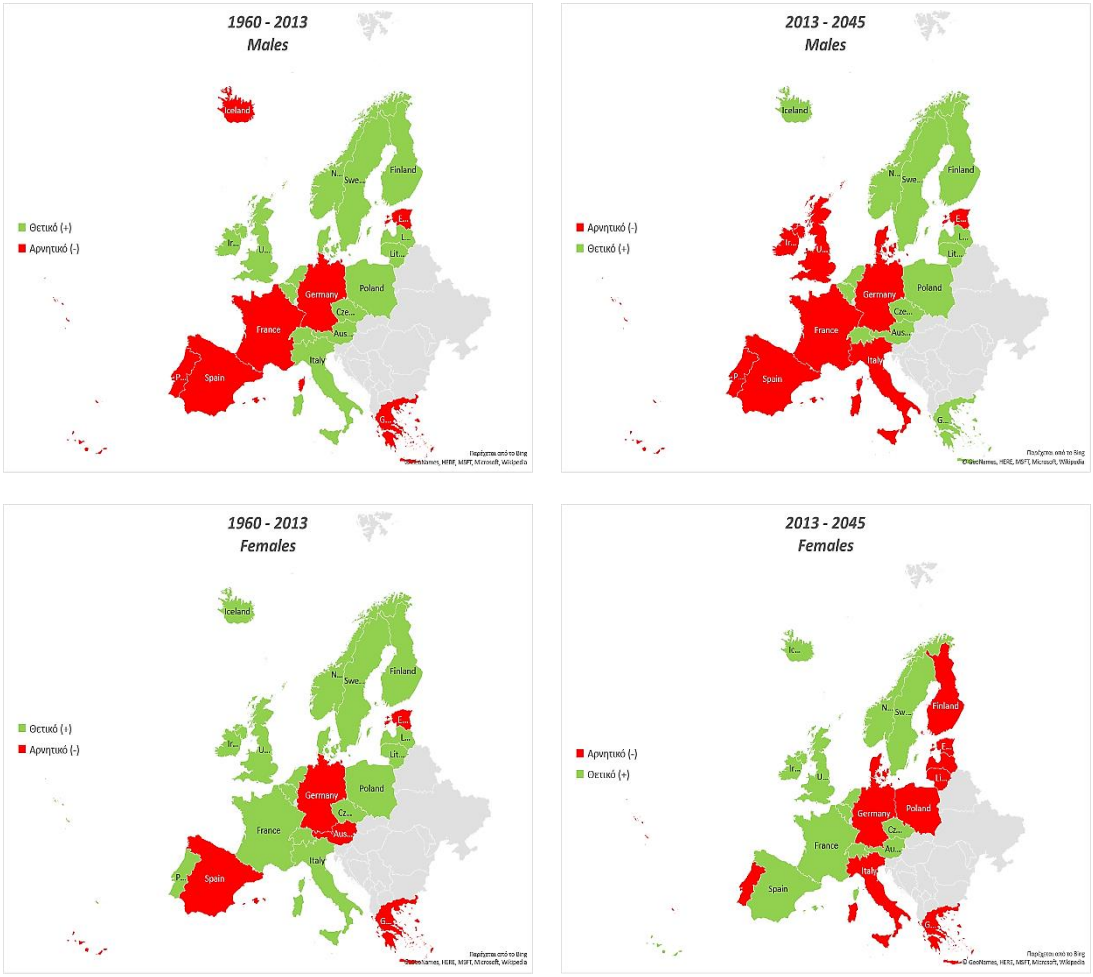
Η τάση στη Βόρεια και Κεντρική Ευρώπη (πίνακας 13 & 20, εικόνα 14) κυρίως για τους άνδρες είναι αυξητική. Οι θάνατοι των γυναικών της Δανίας, της Πολωνίας και της Γερμανίας θα αυξηθούν, ενώ αντίστοιχη και υψηλότερη αύξηση θα δει ο ανδρικός πληθυσμός της Δανίας, της Γερμανίας, της Ιρλανδίας και της Αγγλίας τα επόμενα 20 χρόνια.

Θετική εξέλιξη φαίνεται πως θα παρουσιάσουν οι χώρες της Κεντρικής Ευρώπης (πίνακας 13 & 20, εικόνα 14), αφού μόνο η Γαλλία δίνει μία ένδειξη για αύξηση των θανάτων της τόσο για άνδρες όσο και για γυναίκες. Η συγκεκριμένη ένδειξη επαληθεύεται την τρέχουσα περίοδο (2019 – 20, πανδημία COVID-19) με κατακόρυφη αύξηση αριθμού θανάτων.

Αρνητική εξέλιξη αποτυπώνουν τα δεδομένα και για την Νότια Ευρώπη (πίνακας 13 & 20, εικόνα 14). Η Πορτογαλία, η Ισπανία και η Ιταλία διανύουν μία δυσάρεστη περίοδο με μεγάλη αύξηση θανάτων ανεξαρτήτως ηλικίας και φύλου (2019 – 20, πανδημία COVID-19). Ακόμα και οι χώρες που εμφανίζουν θετική εικόνα στον πίνακα 5, κινούνται πολύ κοντά στον αντίστοιχο μέσο όρο επικινδυνότητας.

Όπως όλα δείχνουν, η μεταβλητή $\boldsymbol{\lambda}$ που επηρεάζει το σύνολο ενός πληθυσμού στην BGGM κατανομή ανεξάρτητα από την ηλικία και το φύλο, εμφανίζει ανησυχητική αύξηση τα επόμενα χρόνια στις 22 χώρες της Ευρώπης. Χωρικά η Ευρώπη και σε ποσοστό 41% (οι 9 από τις 22 χώρες) για τους άνδρες, θα επηρεαστεί από επικίνδυνα γεγονότα που θα προκαλέσουν αύξηση στη θνησιμότητα των πληθυσμών της. Το αντίστοιχο χωρικό ποσοστό είναι 45% (οι 10 από τις 22 χώρες) για τις γυναίκες.

Θα πρέπει όμως να τονιστεί η συγκριτικά χαμηλότερη τιμή της μεταβλητής $\boldsymbol{\lambda}$ για τις γυναίκες. Συμπέρασμα που οδηγεί στο ότι ο ανδρικός πληθυσμός θα επηρεαστεί περισσότερο με μεγαλύτερο πλήθος θανάτων ανεξαρτήτου ηλικίας στο μέλλον.



Εικόνα 14. Οι σχετικές θέσεις των χωρών για την παράμετρο $\boldsymbol{\lambda}$ (θετική = μικρός αριθμός θανάτων από τυχαία συμβάντα σε συλλογικό επίπεδο ή αρνητική = αυξημένος αριθμός θανάτων από τυχαία συμβάντα σε συλλογικό επίπεδο) ως προς την έκβασή τους. Η πράσινη απόχρωση αφορά την θετική έκβαση και η κόκκινη απόχρωση αφορά την αρνητική έκβαση, σε σχέση με τον μέσο όρο της παραμέτρου για το σύνολο της Ευρώπης.

6.4 Χωρική Ομαδοποίηση ανά παράμετρο - Μία διαφορετική προσέγγιση

Έχουν ήδη εντοπιστεί και εξεταστεί τα χωρικά πρότυπα τεσσάρων παραμέτρων που σχετίζονται με τη θνησιμότητα σε ευρωπαϊκή κλίμακα (σε σύνολο 22 ευρωπαϊκών χωρών) καθώς και οι διαχρονικές τους πορείες κατά την περίοδο 1960-2013. Έχει γίνει η προβολή αυτών των παραμέτρων (***ϑ, ξ, κ, λ***) με την αντίστοιχη στατιστική ανάλυση για τα έτη 2013 – 2045 και στο παράρτημα A_9 παρατίθενται και οι αντίστοιχοι δείκτες σφάλματος της κάθε παραμέτρου, ο συντελεστής βαρύτητας και ο δείκτης τάσης. Στην παρούσα ενότητα γίνεται μία διαφορετική προσέγγιση χωρικής ομαδοποίησης ως προς την μελλοντική πορεία της κάθε χώρας υπό το πρίσμα της κάθε παραμέτρου.

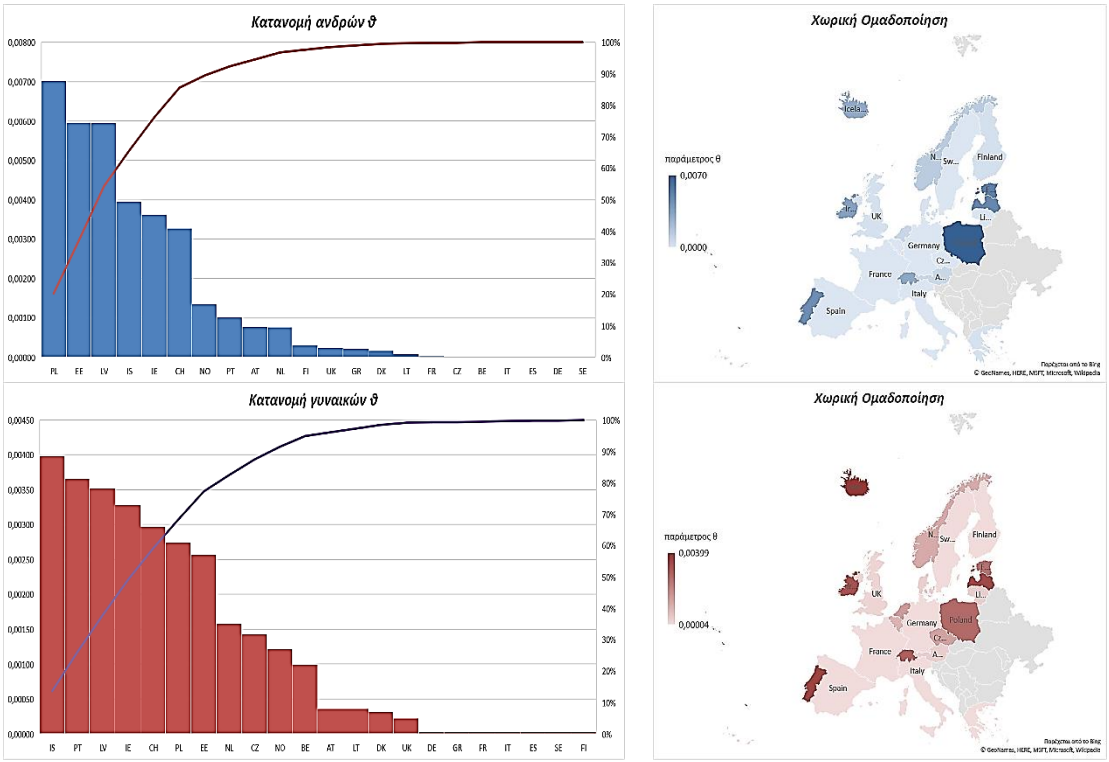
Η διαδικασία της χωρικής ομαδοποίησης γίνεται μέσω της ανάλυσης **κατά Pareto** (Powell, et al., 2015). Είναι μία τεχνική στατιστικής ανάλυσης που βοηθάει στην σωστή λήψη αποφάσεων για την βελτίωση μίας κατάστασης. Στη συγκεκριμένη περίπτωση αφορά, την κατανόηση της ανθρώπινης θνησιμότητας και κατ' επέκταση καταπολέμησης ή (και) περιορισμού των αιτιών που την επιδεινώνουν. Η ομαδοποίηση γίνεται ως προς τις 4 παραμέτρους της *Beta Gompertz Generalized Makeham* κατανομής: της βρεφικής θνησιμότητας (***ϑ***), της γήρανσης – εκφρασμένη ως το πλήθος των ηλικιωμένων μιας χώρας άνω των 70 ετών προς το σύνολο του πληθυσμού (***ξ***), του τυχαίου παράγοντα κινδύνου εξαρτώμενου της ηλικίας (***κ***) και του τυχαίου παράγοντα κινδύνου που επηρεάζει το σύνολο (***λ***) της κάθε χώρας.

Ξεκινώντας την ανάλυση κατά Pareto με την παράμετρο ***ϑ***, διακρίνονται κάποια πρώτα όμοια συμπεράσματα μεταξύ ανδρών και γυναικών αλλά κυρίως μεταξύ χωρών. Προσδιορίζοντας τελικά την πορεία της παραμέτρου με ένα επιπλέον χαρακτηριστικό: την χωρική ομαδοποίηση ή χωρική συσχέτιση (εικόνα 15).

Στο γράφημα Pareto τα δεδομένα τοποθετούνται από αριστερά προς τα δεξιά. Η πρώτη ομάδα (α' ομάδα) αποτελείται από τις χώρες που βρίσκονται πιο αριστερά του οριζόντιου άξονα και εμφανίζουν και τις υψηλότερες τιμές βρεφικής θνησιμότητας αναλογικά με τις υπόλοιπες χώρες της Ευρώπης. Το σημείο επιλογής των χωρών που θα αποτελούν την α' ομάδα, είναι το σημείο του «ανάποδου βραχίονα». Επομένως, όσες τιμές βρίσκονται αριστερά του πρώτου (ή δεύτερου) σημείου καμπής αποτελούν τις χώρες με τις υψηλότερες τιμές. Ενώ η δεύτερη ομάδα (β' ομάδα), αποτελείται από τις 6 χώρες που βρίσκονται δεξιότερα του οριζόντιου άξονα και εμφανίζουν και τις μικρότερες τιμές της παραμέτρου ***ϑ***.

Τόσο για τους άνδρες όσο και για τις γυναίκες, οι ομάδες **χωρών με την υψηλότερη βρεφική θνησιμότητα** στο σύνολο των 22 γεωγραφικών περιοχών είναι η Πολωνία, η Λετονία, η Ισλανδία, η Ιρλανδία και η Ελβετία. Την α΄ ομάδα στην περίπτωση των ανδρών συμπληρώνει η Εσθονία και στην περίπτωση των γυναικών η Πορτογαλία.

Ενώ, οι ομάδες **χωρών με την χαμηλότερη βρεφική θνησιμότητα**, ανδρών και γυναικών είναι η Ιταλία, η Ισπανία και η Σουηδία. Για τους άνδρες της β’ ομάδας την συμπληρώνουν οι χώρες της Τσεχίας, του Βελγίου και της Γερμανίας. Ενώ οι χώρες Ελλάδα, Γαλλία και Φινλανδία συμπληρώνουν (εικόνα 15) την β’ ομάδα των γυναικών.



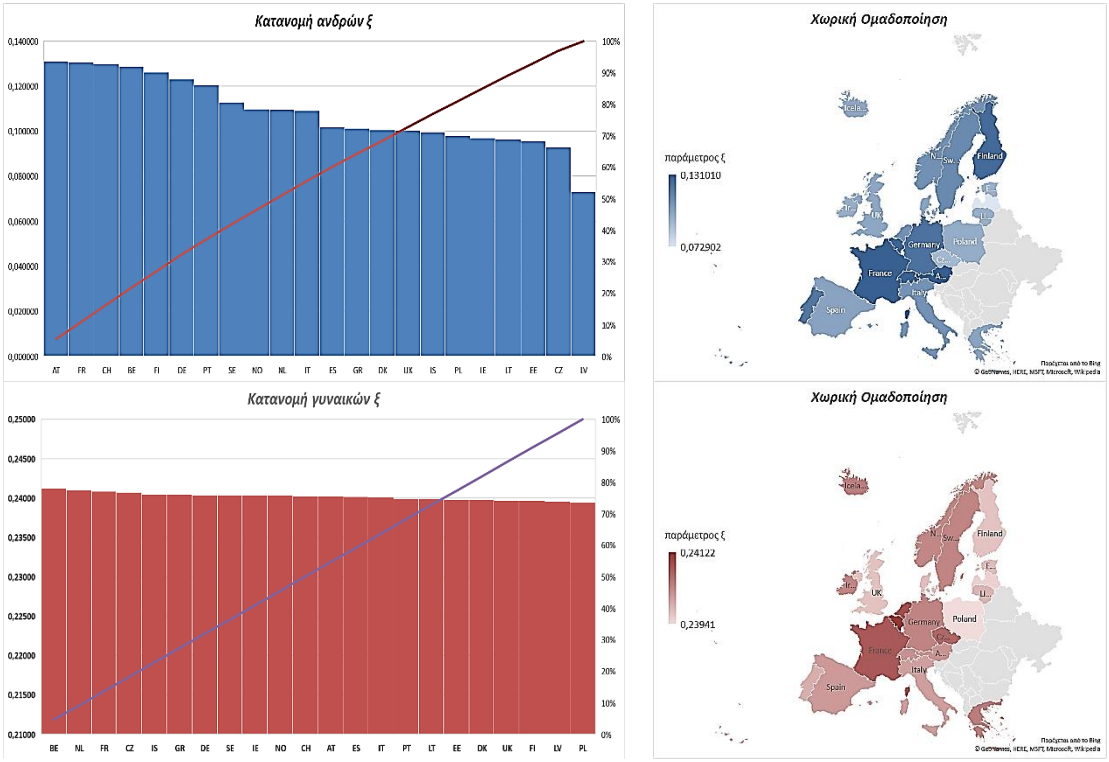
Εικόνα 15. Γράφημα Pareto για άνδρες & γυναίκες, όπου απεικονίζεται η κατανομή των χωρών σε φθίνουσα σειρά συχνότητας ως προς την παράμετρο ϑ, με μία αθροιστική γραμμή σε έναν δευτερεύοντα άξονα ως ποσοστό μελλοντικής βεβαιότητας της κάθε χώρας, στο σύνολο των 22 χωρών.

Η πορεία που θα ακολουθήσει η παράμετρος $\boldsymbol{\vartheta}$ τόσο για άνδρες όσο και γυναίκες, είναι χωρικά κοινή για 5 χώρες στην υψηλή τιμή της α’ ομάδας.

Οι τιμές της παραμέτρου $\boldsymbol{\xi}$ εμφανίζουν παρόμοια εικόνα τόσο για άνδρες όσο και για γυναίκες στο σύνολο των 22 χωρών. Οι διαβαθμίσεις / διαφοροποιήσεις μεταξύ των χωρών είναι μικρές και ουσιαστικά η μόνη κατηγοριοποίηση αυτών προκύπτει από την εξαγωγή των αριθμητικών συμπερασμάτων.

Στην εικόνα 5, από την ανάλυση κατά Pareto, στην α’ ομάδα (αριστερά του οριζόντιου άξονα – φαινόμενο βραχίονα) εισάγονται 11 χώρες με την υψηλότερη τιμή γήρανσης. Όπως διαφαίνεται οι χώρες αυτές θα εμφανίσουν υψηλά ποσοστά γερασμένου πληθυσμού. Στην β’ ομάδα εισάγονται οι 6 χώρες με την χαμηλότερη τιμή της παραμέτρου.

Τόσο για τους άνδρες όσο και για τις γυναίκες, οι ομάδες **χωρών με το υψηλότερο ποσοστό γήρανσης** στο σύνολο των 22 γεωγραφικών περιοχών είναι η Γαλλία, η Γερμανία, η Σουηδία, η Νορβηγία, η Ολλανδία και το Βέλγιο. Την α’ ομάδα ανδρών συμπληρώνουν η Ελβετία, η Λετονία, η Φινλανδία, η Πορτογαλία, και η Ιταλία. Στις γυναίκες η Τσεχία, η Ισλανδία, η Ελλάδα, η Ιρλανδία και η Ελβετία συμπληρώνουν την α’ ομάδα, επίσης (εικόνα 16).



Εικόνα 16. Γράφημα Pareto για άνδρες & γυναίκες, όπου απεικονίζεται η κατανομή των χωρών σε φθίνουσα σειρά συχνότητας ως προς την παράμετρο *ξ*, με μία αθροιστική γραμμή σε έναν δευτερεύοντα άξονα ως ποσοστό μελλοντικής βεβαιότητας της κάθε χώρας, στο σύνολο των 22 χωρών.

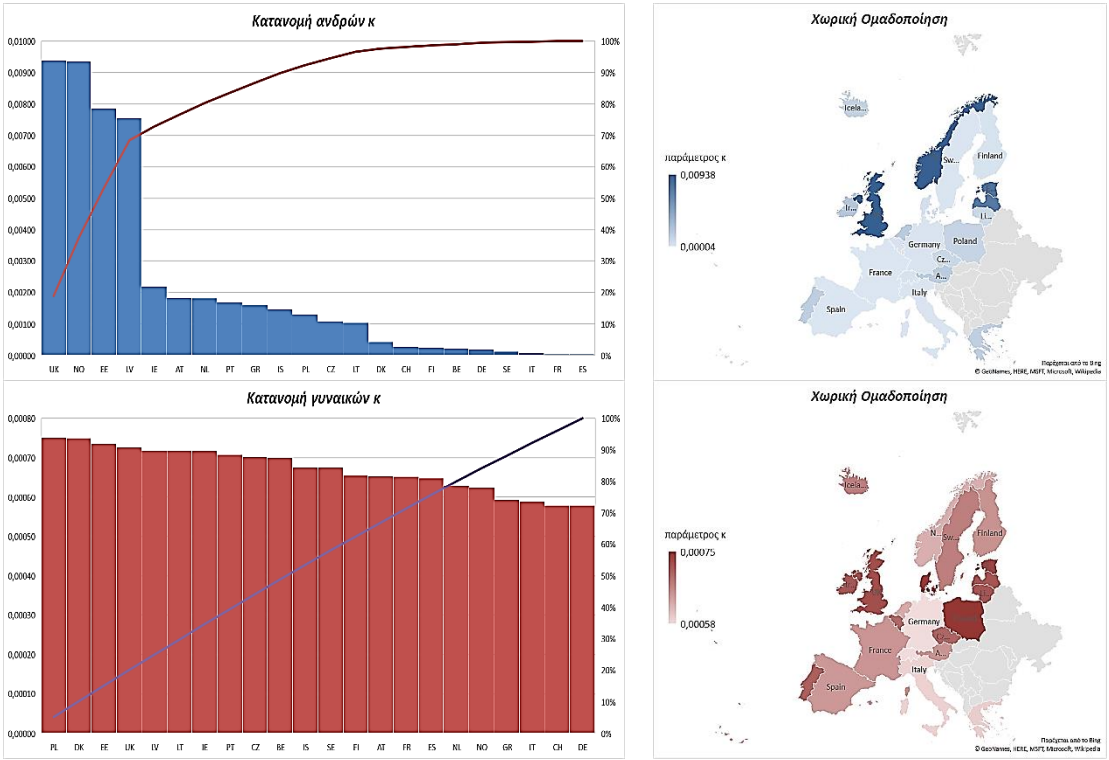
Στην β’ ομάδα, οι ομάδες **χωρών με την χαμηλότερο ποσοστό γήρανσης**, τόσο για άνδρες όσο και για γυναίκες είναι η Πολωνία, η Εσθονία και η Λετονία. Την εξάδα της β’ ομάδας συμπληρώνουν η Ιρλανδία, η Λιθουανία και η Τσεχία για τους άνδρες και η Δανία, το Ηνωμένο Βασίλειο και η Φινλανδία για τις γυναίκες (εικόνα 16).

Στη βιβλιογραφία και στα προηγούμενα ευρήματα του 6^{ου} κεφαλαίου, η μέση τιμή της παραμέτρου ***ξ*** στις γυναίκες είναι υψηλότερη από τους άνδρες, κάτι το οποίο ήταν αναμενόμενο

μεταξύ των δύο φύλων. Εμφανίζεται υψηλότερο ποσοστό θνητότητας στον ανδρικό πληθυσμό συνολικά, σε μικρότερη ηλικία. Η πορεία που θα ακολουθήσει η παράμετρος ***ξ*** και για τα δύο φύλα, είναι χωρικά κοινή για τις 6 από τις 11 χώρες στην υψηλή τιμή της α' ομάδας.

Στην εικόνα 5, της ανάλυσης κατά Pareto, διαφαίνεται και ένα στοιχείο διαφοροποίησης στις τιμές τις παραμέτρου ***ξ*** ανάμεσα στα δύο φύλα. Η αθροιστική γραμμή για τους άνδρες αγγίζει την κύρια διαγώνιο δείχνοντας των ισοκαταμερισμό των δεδομένων. Στις γυναίκες η αθροιστική γραμμή αγγίζει το «ιδανικό», παρουσιάζοντας και εδώ μια αξιόλογη πληθυσμιακή ισορροπία μεταξύ των χωρών της Ευρώπης.

Η παράμετρος ***κ,*** εκφράζει τον τυχαίο παράγοντα κινδύνου συναρτήσει της ηλικίας. Από την εικόνα 6, γίνεται σαφές ότι η παράμετρος επηρεάζεται και από το φύλο. Από την ανάλυση κατά Pareto, στην α' ομάδα (αριστερά του οριζόντιου άξονα – σημείο ανάποδου βραχίονα) εισάγονται οι 4 χώρες με την υψηλότερη τιμή της παραμέτρου. Ενώ στην β' ομάδα εισάγονται οι 6 χώρες με την χαμηλότερη τιμή της παραμέτρου.



Εικόνα 17. Γράφημα Pareto για άνδρες & γυναίκες, όπου απεικονίζεται η κατανομή των χωρών σε φθίνουσα σειρά συχνότητας ως προς την παράμετρο *κ*, με μία αθροιστική γραμμή σε έναν δευτερεύοντα άξονα ως ποσοστό μελλοντικής βεβαιότητας της κάθε χώρας, στο σύνολο των 22 χωρών.

Οι ομάδες **χωρών με την υψηλότερη τιμή τυχαίου παράγοντα εξαρτώμενου της ηλικίας,** τόσο για τους άνδρες όσο και για τις γυναίκες, στο σύνολο των 22 χωρών είναι το Ηνωμένο Βασίλειο, και η Εσθονία. Την τετράδα της α' ομάδας για τους άνδρες συμπληρώνουν η Νορβηγία, και η Λετονία και η Πολωνία με την Δανία για τις γυναίκες (εικόνα 17).

Στην β' ομάδα, οι ομάδες **χωρών με την χαμηλότερη τιμή τυχαίου παράγοντα εξαρτώμενου της ηλικίας**, τόσο για άνδρες όσο και για γυναίκες είναι η Γερμανία και η Ιταλία. Την εξάδα της β' ομάδας συμπληρώνουν το Βέλγιο, η Σουηδία, η Γαλλία και η Ισπανία για τους άνδρες και η Ολλανδία, η Νορβηγία, η Ελλάδα και η Ελβετία για τις γυναίκες (εικόνα 17).

Η πορεία που θα ακολουθήσει η παράμετρος ***κ*** από κοινού στα δύο φύλα, αφορά γεωγραφικά τις 2 από τις 4 χώρες στην υψηλή τιμή της α' ομάδας και στις 2 από τις 6 χώρες της β' ομάδας.

Ολοκληρώνοντας τον σχολιασμό της μελλοντικής τάσης της παραμέτρου ***κ***, ένα αξιόλογο στοιχείο, είναι η ομοιότητα που εμφανίζουν οι τιμές τις παραμέτρου για τις γυναίκες της Ευρώπης. Στην ανάλυση κατά Pareto αυτό γίνεται σαφές στην εικόνα 6, όπου η αθροιστική γραμμή αγγίζει το «ιδανικό» στις γυναίκες, παρουσιάζοντας εδώ μια αξιόλογη ισορροπία συμπεριφοράς ως προς τον τυχαίο παράγοντα κινδύνου μεταξύ των γυναικών. Στο ανδρικό φύλο, δε φαίνεται να υπάρχει μία ισχυρή χωρική εξάρτηση μεταξύ των πληθυσμών ως προς την παράμετρο αυτή, αν και οι Βόρειες χώρες βρίσκονται οι περισσότερες κοντά στην α' ομάδα με την υψηλή τιμή.

Η παράμετρος ***λ,*** εκφράζει τον τυχαίο παράγοντα κινδύνου, ο οποίος είναι ανεξάρτητος της ηλικίας του ατόμου και εν δυνάμει δύναται να επηρεάσει το ίδιο και τα δύο φύλα. Υπάρχουν όμως ενδείξεις (εικόνα 18) πως τελικά ένας «κίνδυνος» δεν επηρεάζει το ίδιο τους άνδρες και τις γυναίκες, ούτε επηρεάζει το ίδιο τις χώρες μεταξύ τους.

Στην εικόνα 18, από την ανάλυση κατά Pareto, στην α' ομάδα (αριστερά του οριζόντιου άξονα – σημείο ανάποδου βραχίονα) εισάγονται 6 χώρες με την υψηλότερη τιμή της παραμέτρου (αυξημένος αριθμός θανάτων, ανεξάρτητος της ηλικίας). Αντίστοιχα, στην β' ομάδα εισάγονται 6 χώρες με την χαμηλότερη τιμή.

Η μόνη χώρα που ανήκει **στην υψηλότερη τιμή τυχαίου παράγοντα κινδύνου, ο οποίος είναι ανεξάρτητος της ηλικίας του ατόμου** και αφορά από κοινού τα δύο φύλα είναι η Πορτογαλία. Την εξάδα της α' ομάδας συμπληρώνουν η Ισπανία, το Ηνωμένο Βασίλειο, η Ιταλία,

η Γαλλία και η Γερμανία για τους άνδρες και η Λετονία, η Λιθουανία, η Πολωνία, η Φινλανδία και η Δανία για τις γυναίκες (εικόνα 18).

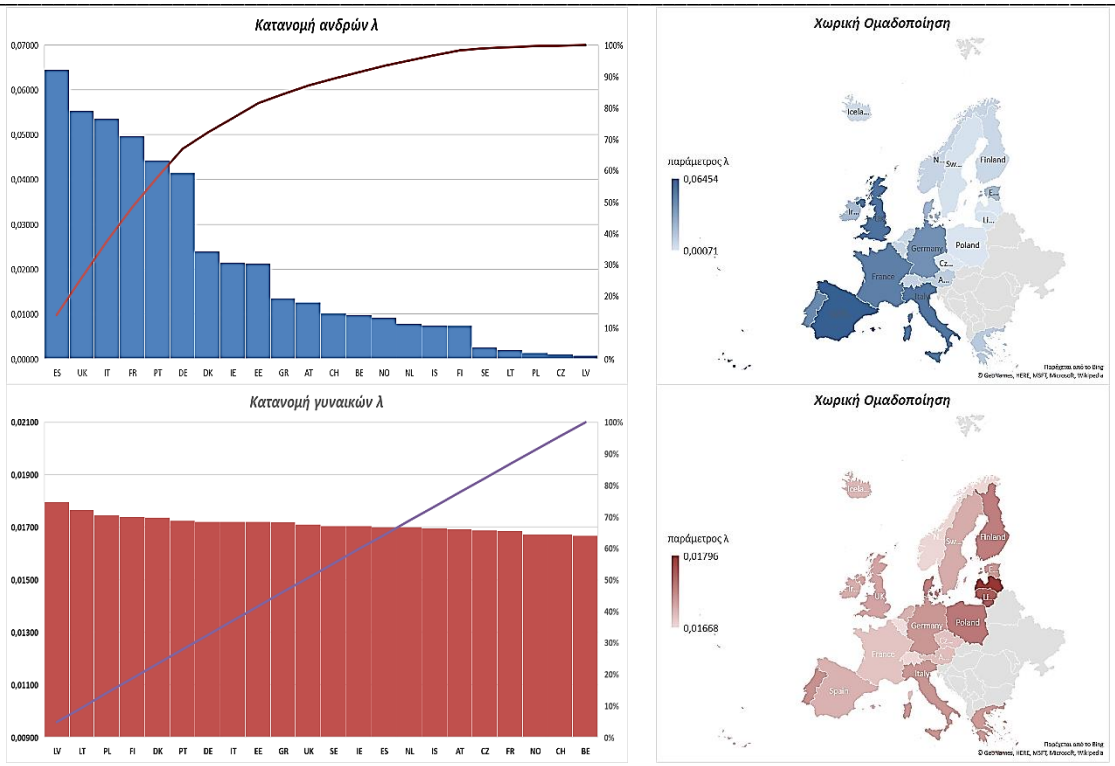
Στην β' ομάδα, η **χώρα με την χαμηλότερη τιμή τυχαίου παράγοντα κινδύνου, ο οποίος είναι ανεξάρτητος της ηλικίας του ατόμου**, τόσο για άνδρες όσο και για γυναίκες είναι η Τσεχία. Την εξάδα της β' ομάδας συμπληρώνουν η Φινλανδία, η Σουηδία, η Λιθουανία, η Πολωνία και η Λετονία για τους άνδρες και η Αυστρία, η Γαλλία, η Νορβηγία, η Τσεχία και το Βέλγιο για τις γυναίκες (εικόνα 7).

Η Ελλάδα στην περίπτωση της παραμέτρου (***λ***) παρουσιάζει θετική εικόνα και για τα δύο φύλα στον πίνακα κατάταξης των 22 χωρών. Δείχνει να είναι σε θέση να αντιμετωπίσει με σχετική επιτυχία ξαφνικά συμβάντα.

Η πορεία που θα ακολουθήσει η παράμετρος ***λ*** τόσο για άνδρες όσο και γυναίκες, είναι χωρικά κοινή για την 1 από τις 6 χώρες στην υψηλή τιμή της α' ομάδας και για την 1 από τις 6 χώρες της β' ομάδας. Το ποσοστό χωρικής ομαδοποίησης και στις δυο περιπτώσεις είναι ιδιαίτερα χαμηλό. Οι τιμές είναι όμως πολύ κοντά μεταξύ τους. Παρατηρώντας τους χάρτες της εικόνας 8 και κυρίως την πορεία της παραμέτρου στο 7^{ο} κεφάλαιο, υπάρχουν ενδείξεις ανοδικής τάσης της συγκεκριμένης παραμέτρου για το ανδρικό φύλο. Οι γεωγραφικές περιοχές που δείχνουν πως θα επηρεαστούν περισσότερο είναι η Δυτική, Κεντρική και Βόρεια Ευρώπη (Ισπανία, Γαλλία, Ηνωμένο Βασίλειο, Ιρλανδία, Ιταλία και Αυστρία).

Στον αντίποδα, και το γυναικείο φύλο δείχνει να επηρεάζεται από μελλοντική αύξηση θανάτων, αλλά λιγότερο σε απόλυτους αριθμούς, με το σύνολο της Ευρώπης να κατανέμεται σχεδόν ομοιόμορφα (εικόνα 18).

Η παραπάνω χωρική ομαδοποίηση, οδηγεί σε κάποια πρώτα συμπεράσματα. Στην περίπτωση και των δύο φύλων, οι χώρες που εμφάνιζαν (παράγραφοι 6.1 – 6.3) και θα εμφανίσουν (παράγραφος 6.4) στο άμεσο μέλλον χαμηλή βρεφική θνησιμότητα εμφανίζουν αντίστοιχα και υψηλό αριθμό ατόμων άνω των 70 ετών στις περισσότερες περιπτώσεις.



Εικόνα 18. Γράφημα Pareto για άνδρες & γυναίκες, όπου απεικονίζεται η κατανομή των χωρών σε φθίνουσα σειρά συχνότητας ως προς την παράμετρο *λ*, με μία αθροιστική γραμμή σε έναν δευτερεύοντα άξονα ως ποσοστό μελλοντικής βεβαιότητας της κάθε χώρας, στο σύνολο των 22 χωρών. Οι χάρτες απεικονίζουν την μέση τιμή της παραμέτρου *λ* για άνδρες και γυναίκες της κάθε χώρας, αντίστοιχα .

Αντίθετα οι ατομικοί και συλλογικοί τυχαίοι παράγοντες κινδύνου δεν συμβαδίζουν μαζί στην πλειονότητα των χωρών. Ο υποκειμενικός παράγοντας (***κ***) και ο αντικειμενικός παράγοντας (***λ***) είναι δύο ανεξάρτητες καταστάσεις που διαφοροποιούν το αίτιο αν και προκαλούν το ίδιο αποτέλεσμα, την αύξηση ή την μείωση των θανάτων σε έναν πληθυσμό. Τονίζεται όμως πως στην περίπτωση του τυχαίου παράγοντα κινδύνου που επηρεάζει το σύνολο του πληθυσμού, η χωρική συσχέτιση μεταξύ των χωρών / περιοχών είναι ισχυρή.

Αντί επιλόγου

Στην παρούσα μελέτη εντοπίστηκαν και εξετάστηκαν τα χωρικά πρότυπα τεσσάρων παραμέτρων που σχετίζονται με τη θνησιμότητα σε ευρωπαϊκή κλίμακα (σε σύνολο 22 ευρωπαϊκών χωρών) καθώς και οι διαχρονικές τους πορείες κατά την περίοδο 1960-2013. Έγινε προσπάθεια μοντελοποίησης της θνησιμότητας μέσω της BGGM κατανομής. Ενώ αποτυπώθηκε η δημογραφική και χωρική εξέλιξη της κάθε παραμέτρου. Τα έτη 2010 – 17 αποτέλεσαν τη χρονοσειρά της «επαλήθευσης» του μοντέλου πρόβλεψης με τα πραγματικά δεδομένα. Η προσέγγιση ήταν παραπάνω από ικανοποιητική για το σύνολο των χωρών, δίνοντας και την

ανάλογη δυναμική στην ***Beta Gompertz Generalized Makeham*** κατανομή ως προς την αξιοπιστία της πρόβλεψης της ανθρώπινης θνησιμότητας έως το 2045.

Για την ισχυροποίηση των συμπερασμάτων, στο παράρτημα A_9 παρατίθενται και τα αποτελέσματα των στατιστικών δεικτών σφάλματος (*MASE, SMAPE, MAE και MSE*) όπου φανερώνουν την δυναμική της πρόβλεψης τόσο για άνδρες όσο και για γυναίκες τα έτη 2013 έως 2045 για την κάθε παράμετρο ξεχωριστά.

Αποτέλεσμα των παραπάνω, ήταν η χρονολογική εξερεύνηση των τάσεων που προκαλούν την θνησιμότητα και η αποτύπωση αυτών στο μέλλον με την αντίστοιχη ομαδοποίηση ως προς τις παραμέτρους μέσω της ανάλυσης κατά Pareto (παράγραφος 6.4). Καθεμία από αυτές τις παραμέτρους έχει μια ιδιαίτερη δημογραφική ερμηνεία που επιτρέπει την εξερεύνηση της θνησιμότητας από διάφορες οπτικές γωνίες[3], όπως η βρεφική θνησιμότητα (παράμετρος $\boldsymbol{\vartheta}$), το ποσοστό των ατόμων άνω των 70 ετών προς το σύνολο του πληθυσμού (παράμετρος $\boldsymbol{\xi}$), καθώς και ο τυχαίος παράγοντας κινδύνου εξαρτώμενος της ηλικίας (παράμετρος $\boldsymbol{\kappa}$) και μη εξαρτώμενος της ηλικίας (παράμετρος $\boldsymbol{\lambda}$). Για την εκτίμησή τους και την προβολή αυτών, ελήφθησαν υπόψη ορισμένα δημογραφικά χαρακτηριστικά. Η ηλικία και το φύλο είναι δύο από τα σημαντικότερα χαρακτηριστικά, δεδομένου ότι μπορούν να υποδηλώσουν τη σύνθεση των φύλων και την ηλικιακή κατανομή ενός συγκεκριμένου πληθυσμού και να καθορίσουν έτσι τις πιθανές προοπτικές του στο μέλλον.

Η πορεία της θνησιμότητας αφορά αρχικά την περίοδο 1960 – 2013. Στο τεχνικό μέρος, οι μέσες τιμές των παραμέτρων σταθεροποιήθηκαν σε μία **κεντρική μέση τιμή** για την κάθε παράμετρο για όλα τα έτη της ανάλυσης. Προσπαθώντας με αυτό τον τρόπο η αποτύπωση να είναι αφενός συλλογική και εστιασμένη σε μία ευρύτερη χρονική στιγμή που θα λαμβάνει ισομερώς την ίδια βαρύτητα από όλες τις χρονιές και αφετέρου διότι στη χρονοσειρά από το 1960 έως το 2010 και από το 2010 έως το 2045, η μέση τιμή κατά έτος εμφάνιζε αμελητέες αλλαγές στο έβδομο δεκαδικό ψηφίο. Στο επόμενο εδάφιο όμως (κεφάλαιο 7) και στους αντίστοιχους πίνακες 22 - 25, γίνεται και αυτή η παρουσίαση της πορείας που ακολουθεί η κάθε παράμετρος, εμφανίζοντας και την αντίστοιχη Ευρωπαϊκή μέση τιμή κατά έτος. Οι εκτιμώμενες παράμετροι στη συνέχεια απεικονίστηκαν από μια χρονοσειρά ειδικών ως προς το φύλο

[3] Η σημασία ορισμένων αιτιών θανάτου αυξάνεται συνεχώς λόγω της υιοθέτησης από τους ανθρώπους των ανθυγιεινών πρακτικών και της έκθεσής τους σε συχνά εκδηλωμένους περιβαλλοντικούς κινδύνους (Kalogirou et al., 2012).

χαρτών. Ορισμένα ενδιαφέροντα ευρήματα μπορούν να εξαχθούν από το σύνολο των παραγόμενων αποτελεσμάτων.

Μεταξύ των δύο φύλων, παρουσιάζοντας υψηλότερες τιμές παραμέτρου ϑ από τις γυναίκες, οι άνδρες φαίνεται να είναι πιο ευάλωτοι όσον αφορά τη βρεφική θνησιμότητα. Με άλλα λόγια, περισσότερα αρσενικά βρέφη δεν επιβιώνουν στην κρίσιμη ηλικία των [0, 1) ετών. Αυτά τα ευρήματα συμφωνούν με αντίστοιχες ευρωπαϊκές μελέτες του 2008 (Drevenstedt et al., 2008). Σύμφωνα με αυτές, μεταξύ των δύο φύλων, «*ένα αυξανόμενο ανδρικό μειονέκτημα στη βρεφική θνησιμότητα έχει σημειωθεί τόσο στις ευρωπαϊκές όσο και στις μη ευρωπαϊκές χώρες από το πρώτο μισό του εικοστού αιώνα και μετά*». Αυτό το μειονέκτημα οφείλεται κυρίως στην ακόμη μεγαλύτερη ευπάθεια των ανδρών στη θνησιμότητα από προγεννητικές καταστάσεις. Επιπλέον, όπως αναφέρεται στην ευρωπαϊκή μελέτη του 2008, οι γυναίκες ζουν περισσότερο από τους άνδρες στις περισσότερες χώρες της Ευρώπης. Το θηλυκό πλεονέκτημα στη μακροζωία παρατηρήθηκε κυρίως στα μέσα του δέκατου όγδοου αιώνα. Κατά τον εικοστό αιώνα, αυτό το «χάσμα των φύλων» αυξήθηκε περαιτέρω λόγω της οικονομικής ανάπτυξης και των βελτιωμένων συνθηκών διαβίωσης για τις γυναίκες.

Η τάση αυτή στο μέλλον δείχνει να περιορίζεται σε επίπεδο αριθμών σημαντικά, με μείωση των αντίστοιχων μέσων όρων. Ως προς το φύλο όμως πάλι οι άνδρες θα συνεχίσουν να είναι πιο ευάλωτοι από τις γυναίκες. Η υψηλότερη μακροζωία των γυναικών επιβεβαιώνεται από τις υψηλότερες τιμές της παραμέτρου $\boldsymbol{\xi}$. Οι γυναίκες έχουν και θα συνεχίσουν να έχουν περισσότερα χρόνια ζωής, με αποτέλεσμα μεγαλύτερο ποσοστό γυναικών ηλικιωμένων στις ευρωπαϊκές χώρες, στο άμεσο μέλλον.

Συγκεκριμένα, οι χώρες σε Ευρωπαϊκή κλίμακα που εμφανίζουν έντονη αυξητική τάση να γηράσκουν ταχύτατα (εικόνα 16) είναι κατά σειρά η Ισπανία, η Πορτογαλία, η Ελλάδα[4], η Γαλλία και η Ιταλία. Αυτή η δημογραφική γήρανση -κοινή σε όλες τις δυτικού τύπου χώρες- εν δυνάμει προκαλεί πολλά προβλήματα ιατρικά, κοινωνικά, οικογενειακά, οικονομικά, ασφαλιστικά, κ.ά., που θα προσλάβουν εκρηκτικές διαστάσεις στις προσεχείς δεκαετίες, αν δεν λάβουν την προσοχή που τους αναλογεί από τις εκάστοτε κυβερνητικές πολιτικές.

Με βάση τις εκτιμήσεις των Ηνωμένων Εθνών για την προοπτική εξέλιξης του παγκόσμιου πληθυσμού από το 2010 μέχρι το 2050, προβλέπεται αύξηση 188% για τα άτομα ηλικίας άνω

[4] Υπολογίζεται ότι στην Ελλάδα το 2050 θα υπάρχουν 3 εκατομμύρια Έλληνες ηλικίας άνω των 60 ετών (ΕΛΣΤΑΤ, 2019). Ενώ το ποσοστό των ατόμων ηλικίας 0-14 ετών είναι σήμερα περίπου 14% και αναμένεται να υποχωρήσει το 2050 στο 10-12%. Αντίστοιχα, η μέση ηλικία, που ήταν 26 έτη το 1951 και που είναι 44 έτη σήμερα (2020), αναμένεται να αυξηθεί και να αγγίξει τα 50 έτη.

των 65 ετών, 351% για τα άτομα ηλικίας άνω των 85 ετών και 1004% για τα άτομα που ξεπερνούν τα 100 χρόνια. Αποτέλεσμα αυτών, είναι ο οικονομικά ενεργός πληθυσμός, δηλαδή όλοι οι πολίτες ηλικίας 20-69 ετών που δυνητικά θα μπορούσαν να δουλέψουν, θα έχει μειωθεί εντυπωσιακά έως το 2045.

Με την ερμηνεία των χρονικών διακυμάνσεων στις τέσσερις παραμέτρους, προκύπτει ότι η πλειονότητα των εξεταζόμενων ευρωπαϊκών χωρών παρουσιάζουν μια τάση χαμηλής (στην περίπτωση των γυναικών) ή μειούμενη (στην περίπτωση των ανδρών) βρεφική θνησιμότητα. Δημογραφικά, αυτή η τάση αντανακλά την αύξηση του μελλοντικού προσδόκιμου ζωής του ανθρώπου. Η αύξηση ενισχύεται επίσης από το γεγονός ότι, τις επόμενες δεκαετίες, οι θάνατοι στην Ευρώπη τείνουν να συσσωρεύονται σε ηλικίες άνω των 75 ετών με αποτέλεσμα την αύξηση του ποσοστού της γήρανσης, όπως ήδη αναφέρθηκε. Ως εκ τούτου, οι ενδείξεις δείχνουν πως θα σχηματιστεί στην Ευρώπη ένας συνολικός πληθυσμός (συμπεριλαμβανομένων των ανδρών και των γυναικών) που γερνάει. Σε συνδυασμό με την παρατηρούμενη πτωτική τάση στα ποσοστά γεννήσεων, το φαινόμενο αυτό μπορεί να συμβάλει σημαντικά στη μεταμόρφωση της ηλικιακής σύνθεσης του ευρωπαϊκού πληθυσμού τα επόμενα χρόνια. Όσον αφορά την μελλοντική ευαισθησία των ατόμων και του πληθυσμού σε εξωγενείς παράγοντες, οι διαφοροποιήσεις ανά φύλο εντοπίζονται στις συνολικές τάσεις με την πάροδο του χρόνου. Για τον ανδρικό πληθυσμό, η πλειοψηφία των χωρών αποκαλύπτει μια γενική αύξηση θανάτων μέχρι περίπου το 2030, όταν παρατηρείται μια αυξανόμενη τάση και στους δύο τύπους ευπάθειας (ατομικό και συλλογικό). Από την άλλη πλευρά, για τον γυναικείο πληθυσμό, στην πλειονότητα των χωρών εμφανίζεται μια μειούμενη τάση στην ευπάθεια των ατόμων και μια ελαφρά ανοδική τάση στην ευπάθεια του πληθυσμού.

Όσον αφορά τα χωρικά πρότυπα που προσδιορίστηκαν χρονικά στις τέσσερις παραμέτρους, θα μπορούσε να αναφερθεί ότι επηρεάζονται σημαντικά από τη γεωγραφική θέση και την εγγύτητα των ευρωπαϊκών χωρών. Γεωγραφικά καθορισμένες ομάδες χωρών όπως οι Σκανδιναβικές χώρες (Σουηδία, Νορβηγία, Φινλανδία, Δανία και Ισλανδία), χώρες της Βαλτικής (Εσθονία, Λετονία και Λιθουανία), Κάτω Χώρες (Βέλγιο), χώρες της Κεντρικής Ευρώπης (Γαλλία, Αυστρία), οι μεσογειακές χώρες (Ελλάδα, Ιταλία, Ισπανία και Πορτογαλία), καθώς και τα ζεύγη Πολωνίας-Τσεχίας και Ηνωμένου Βασιλείου-Ιρλανδίας, παρουσιάζουν κατά το παρελθόν (περίοδος 1960 – 2010) περισσότερο ή λιγότερο παρόμοιες τάσεις. Γεγονός το οποίο δείχνει να συνεχίζει σε ένα γενικό πλαίσιο. Για παράδειγμα, με ορισμένες εξαιρέσεις από τη Φινλανδία, οι

σκανδιναβικές χώρες θα εμφανίσουν γενικά χαμηλή βρεφική θνησιμότητα, υψηλό ποσοστό γήρανσης και ταυτόχρονα χαμηλό τυχαίο παράγοντα κινδύνου σε ατομικό και συλλογικό επίπεδο αντικατοπτρίζοντας το πολύ καλό βιοτικό επίπεδο που τους παρέχεται. Παρά το γεγονός ότι είναι δίπλα σε σκανδιναβικές χώρες, οι χώρες της Βαλτικής θα παρουσιάσουν έντονες διακυμάνσεις στην πλειονότητα των περιπτώσεων. Ίσως η ευαισθησία των παραμέτρων στους μικρούς πληθυσμούς αυτών των τριών χωρών να έχει καθοριστικό ρόλο. Θα εμφανίσουν νεανικούς πληθυσμούς (χαμηλότερες τιμές για το ποσοστό γήρανσης) από τις υπόλοιπες χώρες, κάτι που θα αποτελέσει χαρακτηριστικό αυτών των χωρών. Από το 2018 και μετά, παρατηρείται μια συνεχώς αυξανόμενη ανδρική θνησιμότητα λόγω των απροσδόκητων γεγονότων για τις χώρες της Κεντρικής Ευρώπης και κυρίως για τις χώρες της Μεσογείου. Η αύξηση αυτή ίσως οφείλεται στις κοινωνικοοικονομικές επιπτώσεις που προκάλεσε η οικονομική κρίση αυτής της περιόδου (2010 – 2018), αλλά και το φαινόμενο της πανδημίας του κορωνοϊού (2019 – 2020) που ήδη πλήττει τις περιοχές αυτές με χιλιάδες νεκρούς. Επιπλέον, μια γενικά αυξανόμενη τάση χαρακτηρίζει τις νότιες χώρες όσον αφορά τον τυχαίο παράγοντα που εξαρτάται από την ηλικία. Η σύνθεση των πληθυσμών τους από πολλές διαφορετικές εθνικότητες κατά πάσα πιθανότητα παίζει σημαντικό ρόλο σε αυτό.

Επιπρόσθετα, οι ερμηνείες της παραμέτρου κ οφείλονται κατά κύριο λόγο στην ηλικία, όμως τα ευρήματα έδειξαν ότι το κάθε φύλο αντιδρά διαφορετικά στον κίνδυνο. Για κάθε άτομο, το κ αναμένεται να είναι υψηλότερο κατά την εφηβεία και την πρώιμη ενήλικη ζωή καθώς και σε ηλικίες από 50 έως 75 ετών. Ένα υψηλότερο ποσοστό ανδρών από τις γυναίκες τεκμηριώνεται ότι συνδέεται με θανάτους που προκαλούνται από ατυχήματα, αυτοκτονίες και έκθεση σε πολλές «επικίνδυνες εξωγενείς καταστάσεις» στις ευρωπαϊκές χώρες (Wasserman et al., 2005). Αυτό το ποσοστό βρέθηκε να είναι ανάλογο με το ποσοστό θανάτων ανδρικών πληθυσμών που προκλήθηκαν από φυσικές καταστροφές και άλλες επιβλαβείς κοινωνικοοικονομικές συνθήκες (Lenart et al., 2019). Επιπλέον, δεδομένου ότι η εκτίμησή της παραμέτρου βασίζεται σε ατομικά δεδομένα / δεδομένα προσωπικού χαρακτήρα (που δεν είναι πάντοτε διαθέσιμα από τις επίσημες στατιστικές αρχές), τα συμπεράσματα που προκύπτουν από αυτή την παράμετρο αποτελούν ουσιαστικά απλές ενδείξεις. Ενώ όπως γίνεται κατανοητό, ο διαχωρισμός της «θετικής» και «αρνητικής» έκβασης μίας κατάστασης για την κάθε παράμετρο είναι οριακή και αλλάζει αριθμητικά στις περισσότερες των περιπτώσεων μετά το έβδομο δεκαδικό ψηφίο, αποδεικνύοντας και σε αυτό το σημείο την λεπτή ισορροπία.

Ένα επιπλέον στοιχείο όσον αφορά την ευπάθεια σε εξωγενείς παράγοντες, αφορά τις διαφοροποιήσεις από τη «φύση» της ευπάθειας (ατομικά ή συλλογικά) που εντοπίζονται κυρίως με την πάροδο του χρόνου ηλικιακά. Οι πιο κοινές εξηγήσεις για αυτά τα ευρήματα θεωρούνται οι βιολογικοί κίνδυνοι, οι κίνδυνοι που αποκτώνται μέσω κοινωνικών ρόλων, του τρόπου ζωής και της συμπεριφοράς, καθώς και η ίσως διαφορετική πρόσβαση, σε θεραπείες και υγειονομική περίθαλψη (Oksuzyan et al., 2008).

Έρευνες του 2008, δίνουν έμφαση σε μια συνεχώς αυξανόμενη θνησιμότητα στον ανδρικό πληθυσμό λόγω απροσδόκητων γεγονότων για τις χώρες της Κεντρικής Ευρώπης, και κυρίως για τις χώρες της Μεσογείου. Αυτή η αύξηση πιθανότατα καταγράφει τις επιπτώσεις της παγκόσμιας οικονομικής κρίσης του 2008 στη θνησιμότητα. Μια οικονομική κρίση συνδέεται με εκτοπισμούς θέσεων εργασίας και αύξηση των ποσοστών ανεργίας, τα οποία τείνουν να επιδεινώσουν τις συνθήκες ζωής. Συνδέεται επίσης με τη θνησιμότητα, λόγω συγκεκριμένων αιτιών ή επηρεάζοντας συγκεκριμένες ομάδες του πληθυσμού (Ballester et al., 2019). Για παράδειγμα, έρευνα του 2016 (Laliotis et al., 2016) αναφέρει ότι οι θάνατοι από αυτοκτονίες αυξήθηκαν στις μεσογειακές χώρες κατά τη διάρκεια της οικονομικής κρίσης του 2008, με την ένταση της θνησιμότητας να είναι η ισχυρότερη μεταξύ των ανδρών στην παραγωγική ηλικία (15-64 ετών). Επιπλέον, οι κάτω Χώρες της Μεσογείου εκείνη την περίοδο, χαρακτηρίζονταν από απροσδόκητα υψηλά ποσοστά θνησιμότητας στις γυναίκες. Η αλλαγή στη σύνθεση των πληθυσμών τους από διαφορετικές εθνικότητες πιθανότατα έπαιξε σημαντικό ρόλο σε αυτήν. Οι κάτω Χώρες, με επίκεντρο την Ελλάδα και την Ιταλία, απορρόφησαν αναλογικά τα μεγαλύτερα ποσοστά μεταναστών στην Ευρώπη εδώ και δεκαετίες (Lafaut et al., 2019). Όπως έχει αποδειχτεί (Domnich et al., 2012), η μακροχρόνια διαμονή σε χώρα υποδοχής, μπορεί να οδηγήσει σε επιδείνωση της υγείας σε ορισμένες ομάδες μεταναστών ως αποτέλεσμα κακών συνθηκών διαβίωσης και υγειονομικής περίθαλψης.

Κάνοντας τον διαχωρισμό μεταξύ ανδρών και γυναικών, τα αποτελέσματα των δεικτών σφάλματος στην παράγραφο 6.3 του παρόντος κεφαλαίου εμφανίζουν καλύτερες αποδόσεις για τις τιμές των παραμέτρων που αφορά το γυναικείο φύλο σε σχέση με τους άνδρες. Ουσιαστικά, τα συμπεράσματα πρόβλεψης που αφορούν τον γυναικείο πληθυσμό τα έτη 2013 έως 2045, μπορούν να αναχθούν με μεγαλύτερη ασφάλεια και με υψηλότερη προσέγγιση στην πραγματικότητα, από ότι στους άνδρες. Στην πραγματικότητα οι διαφορές των δύο φύλων όσον αφορά τη θνησιμότητα ή την υγεία θεωρούνται περίπλοκες, δεδομένου ότι εξαρτώνται

συγχρόνως από το βιολογικό, κοινωνικό και οικονομικό πλαίσιο του κάθε πληθυσμού. Ειδικά όταν οι ανισότητες στην απασχόληση, η πρόσβαση στην υγειονομική περίθαλψη και οι όμοιες πλέον οικογενειακές ευθύνες έχουν μειώσει το φυλετικό «χάσμα» μεταξύ ανδρών και γυναικών τις τελευταίες δεκαετίες.

Τέλος, όπως και η παρούσα μελέτη, οι ερευνητικές προσπάθειες που διερευνούν τη δυναμική της θνησιμότητας σε ολόκληρη την ανθρώπινη ζωή και την εξέλιξή της κατά τη διάρκεια του χρόνου μπορούν να έχουν σημαντική χρησιμότητα. Ειδικότερα, η κατανόηση των χρονικών διακυμάνσεων της θνησιμότητας σε διαφορετικά γεωγραφικά περιβάλλοντα (Zafeiris, 2019) μπορεί να συμβάλει σημαντικά στον εντοπισμό των μηχανισμών που καθορίζουν τη γήρανση και τη θνησιμότητα, καθώς και στον σχεδιασμό και την εφαρμογή κοινωνικοοικονομικών στρατηγικών με στόχο τη βελτίωση της ποιότητας ζωής, του προσδόκιμου ζωής και της μείωσης της πρόωρης θνησιμότητας. Επιπλέον, γίνονται εφικτές οι προβλέψεις για τη δημογραφική εξέλιξη του πληθυσμού. Με βάση αυτές τις προβλέψεις, οι κυβερνήσεις σε όλο τον κόσμο μπορούν να διαχειριστούν καλύτερα τις συνταξιοδοτικές δεσμεύσεις τους, να μοιράζονται σωστά τους προϋπολογισμούς τους με επίκεντρο την υγεία και να εξασφαλίζουν αποτελεσματικές κοινωνικές πολιτικές.

Συνοψίζοντας…

Στο κεφάλαιο 6 η νέα κατανομή (BGGM distribution) εφαρμόστηκε και αξιολογήθηκε (σε 4 φάσεις ανάλυσης) σε ένα μεγαλύτερο χωρικό και χρονολογικό εύρος: Στην πρώτη φάση χρησιμοποιήθηκαν δεδομένα θνησιμότητας από 22 χώρες της Ευρώπης που αναφέρονται σε περίοδο από το 1960 έως το 2013. Κατά τη δεύτερη, η 20ετής περίοδος (1993 – 2013), χρησιμοποιήθηκε για την εκτίμηση ενός εύρους τιμών για κάθε μια από τις έξι παραμέτρους της κατανομής ανά χώρα και φύλο. Στην τρίτη φάση και με βάση τις εκτιμώμενες τιμές των παραμέτρων γίνεται εκτίμηση της εξέλιξης της θνησιμότητας στο διάστημα 2020 – 2045. Τέλος, η τέταρτη φάση της ανάλυσης ανέδειξε μία διαφορετική προσέγγιση του φαινομένου της θνησιμότητας μέσω κατάλληλης χωρικής ομαδοποίησης ανά παράμετρο και όχι ανά χώρα ή χρονικές περιόδους όπως στις προηγούμενες φάσεις.

ΚΕΦ.7: Ερευνητικά συμπεράσματα

Η μοντελοποίηση της θνησιμότητας παραμένει ζήτημα κορυφαίας προτεραιότητας στη δημογραφική ανάλυση και στις προβολές πληθυσμού, ειδικά επειδή οι πιθανότητες επιβίωσης καθώς και οι αιτίες θανάτου υπόκεινται σε μεταβαλλόμενους παράγοντες. Με την πανδημία (COVID – 19) να βρίσκεται σε εξέλιξη, ήδη αλλάζουν οι αιτίες, αλλά και το χρονοδιάγραμμα των θανάτων, συνεπώς και η μαθηματική αποτύπωση της πιθανότητας θανάτου γίνεται περισσότερο επίκαιρη. Η παρούσα μελέτη, δείχνει ότι η νέα κατανομή μαθηματικών πιθανοτήτων *Beta Gompertz Generalized Makeham*, που βασίστηκε στον συνδυασμό των νόμων θνησιμότητας Gompertz και Gompertz - Makeham με την κατανομή generalized Beta, έδωσε σημαντικά αποτελέσματα.

Τα συγκεντρωτικά αποτελέσματα από την μοντελοποίηση των δημογραφικών τάσεων, που έλαβαν χώρα μέσω της *Beta Gompertz Generalized Makeham* κατανομής (BGGM distribution) παρουσιάστηκαν εκτενώς στα κεφάλαια 5 και 6. Έγινε προσπάθεια αποτύπωσης της δημογραφικής εξέλιξης τόσο χρονικά, παρελθόν – παρόν - μέλλον (έρευνα μελέτης από το 1960 έως το 2045), όσο και χωρικά (έλαβαν μέρος στην έρευνα 22 χώρες της Ευρώπης – Δανία, Φινλανδία, Γαλλία, Ισλανδία, Ιταλία, Ολλανδία, Νορβηγία, Σουηδία, Ελβετία, Αυστρία, Βέλγιο, Τσεχία, Ιρλανδία, Εσθονία, Λετονία, Λιθουανία, Γερμανία, Ελλάδα, Πολωνία, Πορτογαλία, Ισπανία και Ηνωμένο Βασίλειο).

Ως ποσοτικά στοιχεία χρησιμοποιήθηκαν τα δημογραφικά στοιχεία θνησιμότητας κατά ηλικία, φύλο και αιτία θανάτου, που παρέχονται ετησίως από τη "βάση δεδομένων ανθρώπινης θνησιμότητας (Human Mortality Database)" (HMD, 2019). Το "HMD" είναι το αποτέλεσμα ενός έργου το οποίο έχει υποστηριχθεί από διάφορες ερευνητικές και επιστημονικές ομάδες από όλο τον κόσμο. Αναπτύχθηκε με στόχο την παροχή ανοικτής, διεθνούς πρόσβασης σε λεπτομερή στοιχεία θνησιμότητας και πληθυσμού για περισσότερες από 40 χώρες παγκοσμίως. Το βασικό όμως σύνολο χωρικών δεδομένων που χρησιμοποιήθηκε για την χαρτογραφική απεικόνιση των εκτιμώμενων παραμέτρων, αλλά και των δεδομένων πρόβλεψης, είναι από την Ευρωπαϊκή Στατιστική Αρχή (Eurostat, 2019).

Η προ-επεξεργασία των ποσοτικών δεδομένων επιτεύχθηκε με τη χρήση του R software και του Microsoft Excel (έκδοση 2019). Η εκτίμηση των παραμέτρων που σχετίζονται με τη θνησιμότητα διεξήχθη με τη χρήση του ανοικτού κώδικα R (www.r-project.org) και ειδικότερα του πακέτου "minpack.lm" από την ψηφιακή βιβλιοθήκη CRAN (Comprehensive R Archive). Το

ESRI ArcGIS (έκδοση 10.4) χρησιμοποιήθηκε για τον χειρισμό και την επεξεργασία χωρικών δεδομένων, καθώς και για την ανάπτυξη των τελικών χαρτών.

Η *Beta Gompertz Generalized Makeham* κατανομή αποτελείται από 6 παραμέτρους. Οι παράμετροι ***α*** και ***β*** καθορίζουν το σχήμα και την κλίμακα της BGGM κατανομής, το πώς δηλαδή το μοντέλο ακολουθεί τα δεδομένα, διαμορφώνοντας «όρη» και «κοιλάδες» στην κατανομή. Οι υπόλοιπες 4 παράμετροι ***ϑ***, ***ξ***, ***κ*** και ***λ*** συμβάλλουν στην αποτύπωση των τάσεων της εξέλιξης της θνησιμότητας του πληθυσμού κατά τη διάρκεια του χρόνου (Andreopoulos et al., 2019), αυτές είναι και οι παράμετροι που επελέγησαν να αποτυπώσουν την πορεία της θνησιμότητας, τα έτη 1960 έως το 2045.

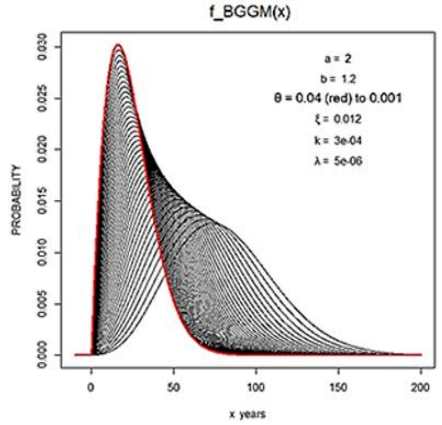
Η συνάρτηση (**BGGM distribution)** με τις αντίστοιχες παραμέτρους εκφράζεται ως:

$$f_{BGGM}(x) = \frac{(\theta e^{\xi x} + \lambda + \kappa x) e^{-\lambda x - \frac{\theta}{\xi}(e^{\xi x}-1)}}{B(\alpha,\beta)} \cdot \left[(1 - e^{-\frac{\kappa}{\lambda}x^2 - \lambda x - \frac{\theta}{\xi}(e^{\xi x}-1)})\right]^{\alpha-1} \cdot \left[\left(e^{-\frac{\kappa}{\lambda}x^2 - \lambda x - \frac{\theta}{\xi}(e^{\xi x}-1)}\right)\right]^{\beta-1}$$
$$\theta, \xi, \kappa, \lambda, \alpha, \beta > 0, x \geq 0$$

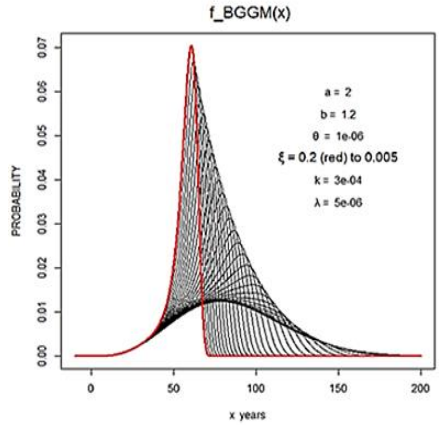
όπου ***x*** είναι ηλικία που αρχίζει από 0 και φτάνει μέχρι ένα μέγιστο θεωρητικό βιολογικό όριο (δηλαδή μια ηλικία πάνω από την οποία κανένα άτομο δεν μπορεί θεωρητικά να επιβιώσει), ***α*** και ***β*** είναι παράμετροι της κατανομής βήτα (Jones, 2007) και ***ϑ, ξ, κ*** και ***λ*** είναι παράμετροι που σχετίζονται με διαφορετικές πτυχές της θνησιμότητας.

Συνοπτικά, η παράμετρος ***ϑ*** περιγράφει τη θνησιμότητα στην αρχική ηλικία [0, 1), γνωστή και ως βρεφική θνησιμότητα[5]. Η βρεφική θνησιμότητα αποτυπώνει το βιοτικό επίπεδο μιας χώρας και επηρεάζει σημαντικά το προσδόκιμο ζωής. Η παράμετρος ***ξ*** εκφράζει το ποσοστό του πληθυσμού σε ηλικίες άνω των 70+ προς το σύνολο του πληθυσμού. Ονομάζεται "ποσοστό γήρανσης", καθώς μπορεί να αντικατοπτρίζει τη δημογραφική γήρανση ενός πληθυσμού (Gompertz, 1825). Η παράμετρος ***κ*** περιγράφει τον τυχαίο παράγοντα κινδύνου ενός απροσδόκητου θανάτου σε ατομικό επίπεδο, ο οποίος επηρεάζεται από την ηλικία και το φύλο. Η παράμετρος ***λ*** αναφέρεται σε επικίνδυνα συμβάντα κινδύνου που εμφανίζονται και επηρεάζουν αρνητικά ολόκληρο τον πληθυσμό (Makeham, 1860). Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή της παραμέτρου, τόσο μεγαλύτερη είναι η επίδραση επιβαρυντικού παράγοντα στη θνησιμότητα του πληθυσμού. Συγκεντρωτικά στα σχήματα 2 – 7 που ακολουθούν, παρατίθενται η ερμηνεία, καθώς και η «επιρροή» της κάθε παραμέτρου της $f_{BGGM}(x;\theta,\xi,\kappa,\lambda,\alpha,\beta)$ στην καμπύλη θνησιμότητας.

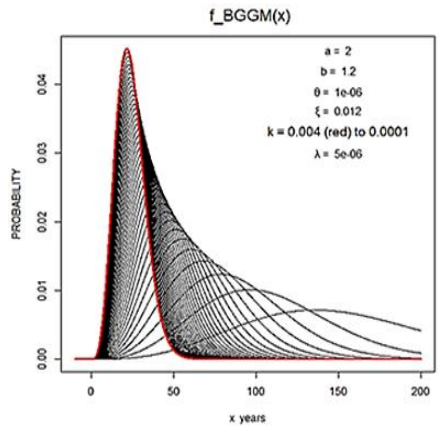
[5] Ο δείκτης αυτός επηρεάζεται έντονα από τις αλλαγές στις οικονομικές και κοινωνικές συνθήκες μιας χώρας (Kim & Saada, 2013).

$\theta \mid \xi, \kappa, \lambda, \alpha, \beta$	*Παράγοντας που διαμορφώνεται από την Βρεφική θνησιμότητα*
	• **Ανοδική πορεία** της παραμέτρου οδηγεί σε: ▪ Μετατόπιση της καμπύλης προς τα αριστερά (κόκκινο χρώμα), συσσωρεύοντας τους θανάτους στις πολύ νεαρές ηλικίες. ▪ Υποδηλώνει μείωση χρόνου ζωής της μέσης ηλικίας στον πληθυσμό • **Καθοδική πορεία** της παραμέτρου οδηγεί: ▪ Στη δημιουργία μιας «πλατύκυρτης» καμπύλης με αντίστοιχη μετατόπιση θανάτων προς τα μεγαλύτερα έτη. <u>Γενικό σχόλιο:</u> *Όσο η βρεφική θνησιμότητα παρουσιάζει αύξηση τιμών τόσο η καμπύλη σ.π.π μετατοπίζεται προς τα αριστερά.*

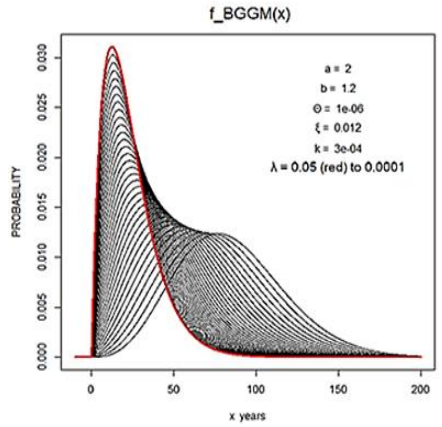
Σχήμα 2: Οι τιμές της παραμέτρου θ. Η παράμετρος μετακινεί την σ.π.π της BGGM κατανομή προς τα αριστερά καθώς οι τιμές της παραμέτρου αυξάνονται.

$\xi \mid \theta, \kappa, \lambda, \alpha, \beta$	*Παράγοντας που διαμορφώνεται από την Γήρανση*
	• **Ανοδική πορεία** της παραμέτρου οδηγεί: ▪ Την καμπύλη θνησιμότητας (κόκκινο χρώμα) σε λεπτόκυρτη μορφή, σε ένα ηλικιακό εύρος 85+ ▪ Σε περιορισμό του «χρόνου ζωής» στη καμπύλη θνησιμότητας, στο ανώτατο όριο. Στη συνέχεια η καμπύλη δείχνει να πέφτει απότομα θεωρώντας πως ο άνθρωπος δεν ξεπερνά ή ξεπερνά σε μικρό βαθμό το φράγμα των 110 ετών. • **Καθοδική πορεία** της παραμέτρου οδηγεί: ▪ Την καμπύλη θνησιμότητας σε «πλατύκυρτη» μορφή, με αυξημένη διασπορά, αφήνοντας «χώρο» σε πιθανή αύξηση του νεανικού πληθυσμού. <u>Γενικό σχόλιο:</u> *Αντιπαραθέτοντας την παράμετρο ξ με την παράμετρο θ, η κορυφή της καμπύλης θνησιμότητας μετακινείται αριστερά όταν υπάρχει αύξηση βρεφικής θνησιμότητας και δεξιά όταν υπάρχει αύξηση ποσοστού γήρανσης.*

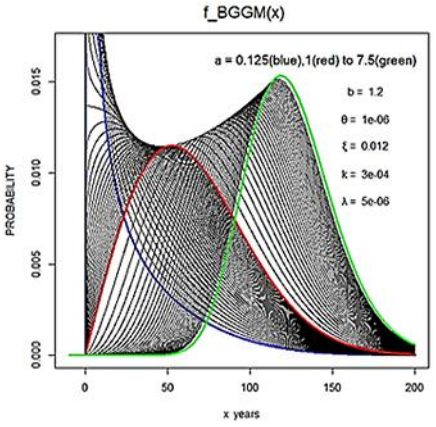
Σχήμα 3: Οι τιμές της παραμέτρου ξ. Η παράμετρος μετακινεί την σ.π.π της BGGM κατανομής προς τα αριστερά καθώς οι τιμές της παραμέτρου αυξάνονται.

$\kappa \mid \xi, \theta, \lambda, \alpha, \beta$	*Τυχαίος παράγοντας κινδύνου εξαρτώμενος της ηλικίας*
	• **Ανοδική πορεία** της παραμέτρου οδηγεί σε: ▪ Μετατόπιση της καμπύλης θνησιμότητας (κόκκινο χρώμα) σε ένα ηλικιακό εύρος μεταξύ 20 έως 50 ετών, όπου ως παράγοντας κινδύνου παρουσιάζεται η ηλικία. • **Καθοδική πορεία** της παραμέτρου: ▪ Μεγαλώνει την διασπορά της καμπύλης θνησιμότητας σε μεγαλύτερο ηλικιακό εύρος Γενικό σχόλιο: *Στη θεωρητική υπόθεση πως το κ θα γίνει μηδέν, δηλαδή οι άνθρωποι θα πεθαίνουν μόνο από την φυσιολογική φθορά, η καμπύλη τείνει να γίνει μία ευθεία γραμμή εφαπτόμενη του άξονα x' x.*

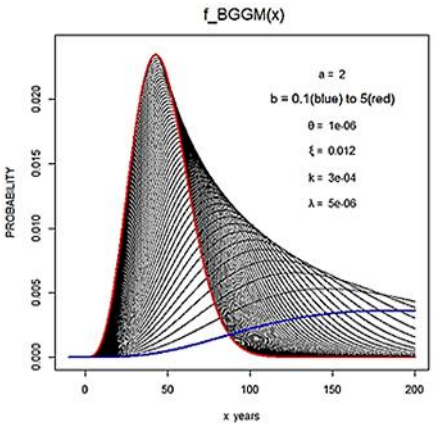
Σχήμα 4: Οι τιμές της παραμέτρου κ, όπως διαμορφώνονται από σχετικές αλλαγές στις τιμές. Η παράμετρος μετακινεί την σ.π.π της BGGM κατανομής προς το μηδέν με μεγαλύτερη ή αντίστοιχα μικρότερη ταχύτητα. Αύξηση στην κ παράμετρο ισοδυναμεί με μετακίνηση της κατανομής προς τα αριστερά.

$\lambda \mid \xi, \theta, \kappa, \alpha, \beta$	*Τυχαίος παράγοντας κινδύνου που επηρεάζει το σύνολο του πληθυσμού και είναι ανεξάρτητος της ηλικίας*
	• **Ανοδική πορεία** της παραμέτρου οδηγεί σε: ▪ Μετατόπιση της καμπύλης θνησιμότητας προς τα αριστερά, ταυτόχρονα «απλώνοντας» τον κίνδυνο του αιφνίδιου θανάτου σε ένα μεγάλο εύρος (ουσιαστικά σε όλη την ανθρώπινη ζωή). ▪ Μείωση του χρόνου ζωής «ισομερώς» σε όλες τις ηλικιακές ομάδες. • **Καθοδική πορεία** της παραμέτρου: ▪ Μεγαλώνει την διασπορά της καμπύλης θνησιμότητας σε όλο το ηλικιακό εύρος. Γενικό σχόλιο: Π*άντα θα υπάρχει ο παράγοντας «ξαφνικός κίνδυνος» που θα προκαλέσει αύξηση θανάτων κατά μήκος μιας χρονικής περιόδου. Η μόνη παράμετρος που δεν μηδενίζεται ποτέ.*

Σχήμα 5: Οι τιμές της παραμέτρου λ, όπως διαμορφώνονται από σχετικές αλλαγές στις τιμές. Η παράμετρος μετακινεί την σ.π.π της BGGM κατανομής προς τα αριστερά με «κλιμακωτό» τρόπο.

$\alpha \mid \xi, \theta, \lambda, \kappa, \beta$	*Παράμετρος της Βήτα κατανομής – καθορίζει το σχήμα (shape) της BGGM κατανομής*
	• **Ανοδική πορεία** της παραμέτρου οδηγεί: ▪ Το σχήμα «καμπάνα» της κατανομής (πράσινο χρώμα) προς τα δεξιά. Αποτέλεσμα αυτού είναι η «οριακή» ηλικία (η ηλικία πέρα από την οποία ο άνθρωπος δε ζει θεωρητικά) να αυξάνεται. • **Καθοδική πορεία** της παραμέτρου οδηγεί σε: ▪ Μετακίνηση της καμπύλης θνησιμότητας (μπλε χρώμα) προς τα αριστερά στις αντίστοιχες μικρότερες ηλικιακές ομάδες Γενικό σχόλιο: *Για την κίνηση της παραμέτρου αν* • *α<1 η καμπύλη μετατοπίζεται προς τα αριστερά (μπλε χρώμα)* • *α=1 η καμπύλη συγκεντρώνεται γύρω από τα 50 έτη (κόκκινο χρώμα)* • *α>1 η καμπύλη μετατοπίζεται προς τα δεξιά με μικρότερη διασπορά (πράσινο χρώμα).*

Σχήμα 6: Οι τιμές της παραμέτρου α, όπως διαμορφώνονται από σχετικές αλλαγές στις τιμές. Η παράμετρος α καθορίζει το σχήμα στη σ.π.π της BGGM κατανομής.

$\beta \mid \xi, \theta, \kappa, \alpha, \lambda$	*Παράμετρος της Βήτα κατανομής – καθορίζει την κλίμακα (scale) της BGGM κατανομής*
	• **Ανοδική πορεία** της παραμέτρου οδηγεί σε: ▪ Μετακίνηση της καμπύλης θνησιμότητας (κόκκινο χρώμα) προς τα αριστερά στις αντίστοιχες μικρότερες ηλικιακές ομάδες, με αντίστοιχη αύξηση στο ύψος της καμπύλης. • **Καθοδική πορεία** της παραμέτρου οδηγεί σε: ▪ Μετακίνηση της καμπύλης θνησιμότητας (μπλε χρώμα) προς τα δεξιά στις αντίστοιχες μεγαλύτερες ηλικιακές ομάδες, με ταυτόχρονη μείωση στο ύψος της καμπύλης. Γενικό σχόλιο: *Η κίνηση της παραμέτρου διαμορφώνει ως προς τον άξονα x και ως προς τον άξονα y την καμπύλη της θνησιμότητας.*

Σχήμα 7: Οι τιμές της παραμέτρου β, όπως διαμορφώνονται από σχετικές αλλαγές στις τιμές. Η παράμετρος β καθορίζει την κλίμακα ύψους στη σ.π.π της BGGM κατανομής.

Συγκεντρωτικά, η περίοδος μελέτης καλύπτει το διάστημα από το 1960 έως σήμερα με ιστορικά δεδομένα και γίνεται προβολή της τάσης της θνησιμότητας έως το 2045. Εξαίρεση αποτέλεσε η Γερμανία, όπου τα διαθέσιμα στοιχεία θνησιμότητας αρχίζουν από το 1990 και μετά[6]. Η ανάλυση μεταξύ των ετών 2010 – 17 αποτέλεσε το «σκαλοπάτι» της στατιστικής μετάβασης στην πρόβλεψη. Η «στατιστική ανθεκτικότητα – robustness» των παραμέτρων εξετάστηκε με βάση τα κριτήρια που αναλύθηκαν στο 6ο κεφάλαιο, και κρίθηκε ως ικανοποιητική.

Ενδεικτικά, στον παρόν εδάφιο, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές, προκειμένου να γίνουν εμφανείς οι όποιες διαφοροποιήσεις μεταξύ των δύο φύλων αλλά και μεταξύ των χωρών. Συνολικά τα δεδομένα καθώς και η χαρτογραφική αποτύπωσή αυτών, είναι διαθέσιμα στην ιστοσελίδα https://veegee.shinyapps.io/panagiotis_phd/. Η συγκεκριμένη ιστοσελίδα δημιουργήθηκε στα πλαίσια της διατριβής προκειμένου να είναι πιο εύκολο για τον ερευνητή να μελετήσει συγκεντρωτικά όλα τα διαθέσιμα δεδομένα από τις 22 χώρες και για τα δύο φύλα για όλο το χρονικό εύρος ανάλυσης. Είναι μία πιλοτική ιστοσελίδα που στηρίζεται στο λογισμικό της R και φιλοδοξεί να αποτελέσει πηγή έρευνας και αναφοράς για διαφορετικούς επιστημονικούς κλάδους.

Τα έτη επιλογής είναι το 1960, 1970, 1980, 1990, 2000, 2010, 2015, 2020, 2025, 2030, 2035, 2040, 2044 και 2045. Κάθε έτος έχει την αντίστοιχη ευρωπαϊκή μέση τιμή για την κάθε παράμετρο. Αυτό κρίθηκε σκόπιμο για να γίνει εφικτή η μελέτη και η αντίστοιχη εξέλιξη της κάθε παραμέτρου στο χρόνο (έτη ανάλυσης) και στο χώρο (χώρες ανάλυσης). Για την καλύτερη οπτικοποίηση / εξομάλυνση (smooth) των αποτελεσμάτων γραφικά, έγινε χρήση του μετασχηματισμού $e^{\sqrt{παράμετρος}}$ (Campbell et al., 2009) όπου αποτελεί μία απλή μέθοδο εξομάλυνσης των δεδομένων που προέκυψαν από τις εκτιμήσεις. Οι τιμές των επιλεγμένων ετών για την κάθε παράμετρο καθώς και οι αντίστοιχες ετήσιες μέσες τιμές της κάθε παραμέτρου παρατίθενται στους πίνακες 22 - 25. Οι εκτιμήσεις των παραμέτρων εμφανίζουν τιμές με 14 δεκαδικά ψηφία και έγινε προσέγγιση σε 4 δεκαδικά.

Ως αδυναμία της προτεινόμενης κατανομής, θα μπορούσε να αναφερθεί ότι ο αριθμός των παραμέτρων της $f_{BGGM}(x;\theta,\xi,\kappa,\lambda,\alpha,\beta)$ είναι άλλοτε υψηλότερος (από των *Gompertz (1825),*

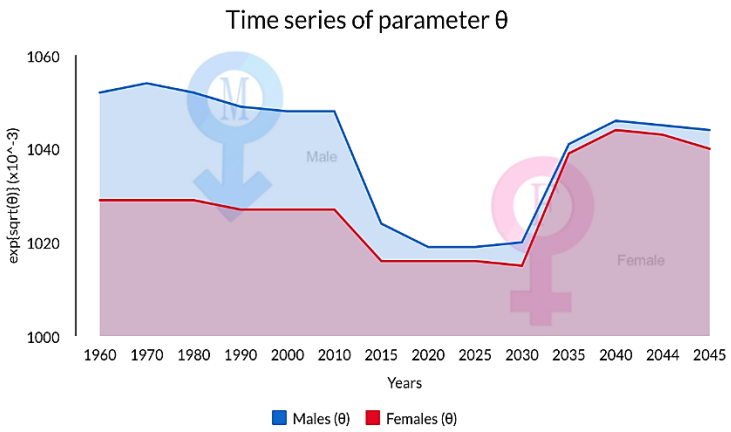
[6] Η πτώση του Τείχους του Βερολίνου (Νοέμβριος 1991) αποτέλεσε μια νέα αφετηρία για την χώρα, αφού για διάστημα άνω των 28 ετών, αποτελούσε το σύμβολο μιας Ευρώπης διχοτομημένης.

Makeham (1860), Steffenson (1930), Perks (1932), Harper (1936) και Weibull (1939)) και άλλοτε χαμηλότερος (από των *Heligman* και *Pollard (1980))* από άλλα αντίστοιχα μοντέλα θνησιμότητας που έχουν παρουσιαστεί κατά καιρούς. Ωστόσο, κάθε μια από αυτές τις παραμέτρους μπορεί να δώσει μία συγκεκριμένη δημογραφική ερμηνεία. Οπότε και τα αποτελέσματα μοντελοποίησης πλέον γίνονται εύκολα στην ανάλυσή τους και πιο χρήσιμα για την κατανόηση των ηλικιακών και χρονικών ειδικών παρατηρήσεων που σχετίζονται με τη θνησιμότητα.

Πορεία Βρεφικής Θνησιμότητας (Παράμετρος ϑ)

Το αν η βρεφική θνησιμότητα εξελίσσεται χρονικά με χαμηλές ή υψηλές τιμές έχει αντίκτυπο και στις άλλες παραμέτρους της ανθρώπινης θνησιμότητας που εξετάζονται. Γίνεται εύκολα αντιληπτό πως μία αύξηση στους θανάτους νεογνών σε μία χώρα έχει επίδραση στο δείκτη θνησιμότητας ολόκληρου του πληθυσμού, με συνέπειες τόσο κοινωνικές όσο και οικονομικές.

Η παράμετρος ϑ στον πίνακα 22, θεωρείται «Θετική (+)», όταν η τιμή της βρίσκεται κάτω από τον μέσο όρο της Ευρώπης των 22 χωρών, ενώ αν είναι πάνω από το μέσο όρο της Ευρώπης θεωρείται «Αρνητική (-)».



Γράφημα 30. Η χρονική εξέλιξη της βρεφικής θνησιμότητας για τις 22 χώρες της Ευρώπης και για τα δύο φύλα στο παρελθόν, το παρόν και το μέλλον.

Σχολιάζοντας την δημογραφική και χωρική εξέλιξη της βρεφικής θνησιμότητας από το 1960 έως το 2030 για τις 22 χώρες της Ευρώπης, τα ευρήματα είναι ως ένα βαθμό αναμενόμενα ως προς την εξέλιξη τους. Από το γράφημα 30, διαπιστώνεται πως σε όλα τα έτη από το παρελθόν ως το εγγύς μέλλον, η ανδρική βρεφική θνησιμότητα βρίσκεται συνεχώς πάνω από την

γυναικεία βρεφική θνησιμότητα παρουσιάζοντας μια σχετικά παρόμοια πορεία στον χρόνο μεταξύ τους.

Κάνοντας έναν χρονικό διαμερισμό στο γράφημα 30, σχεδόν αμετάβλητη παραμένει η διαφορά στα δύο φύλα από το 1960 ως το 2010, με τάση συρρίκνωσης των δύο. Η συρρίκνωση αυτή δεν έγινε επειδή αυξήθηκαν οι βρεφικοί θάνατοι των θηλυκών αλλά αντίθετα μειώθηκαν οι αρσενικοί βρεφικοί θάνατοι, με τα θηλυκά να εμφανίζουν παράλληλη μείωση τιμών.

Αλλαγή της τάσης παρατηρείται την πενταετία 2010 – 15, οι βρεφικοί θάνατοι για τα αρσενικά εμφάνισαν ποσοστό μείωσης 2,3%, ενώ για τα θηλυκά η μείωση αυτή ανήλθε στο 1,1% για το σύνολο το 22 χωρών που συμμετείχαν στην έρευνα. Η συνέχεια εμφανίζει μία σταθερά πτωτική τάση φτάνοντας στα πιο χαμηλά επίπεδα έως και το 2030. Εν συνεχεία το μοντέλο πρόβλεψης δίνει μια ανοδική τάση και για τα δύο φύλα, χωρίς όμως να φτάνουν στις υψηλές τιμές του παρελθόντος. Από το 2040 υπάρχει μία ένδειξη στο γράφημα 30 για μελλοντικό άνοιγμα της «ψαλίδας» ανάμεσα στα δύο φύλα.

Συνεχίζοντας την εξερεύνηση / εξέλιξη της βρεφικής θνησιμότητας για τις 22 χώρες, σε παραλληλισμό και με τα στοιχεία του πίνακα 22 διαχρονικά υπάρχουν κάποιες χώρες που εμφάνισαν και θα συνεχίσουν να εμφανίζουν τιμές βρεφικής θνησιμότητας κάτω από τον μέσο όρο της Ευρώπης. Να αναφερθεί πως ο μέσος όρος της Ευρώπης, υπολογιστικά, εξήχθη με βάση της 22 χώρες που συμμετείχαν στην ανάλυση και όχι με το σύνολο των χωρών που υπάρχουν σήμερα (2020) στην Ευρωπαϊκή Ένωση.

Ενδεικτικά, από το 1960 έως και το 2045 (μελλοντική εκτίμηση) οι 6 χώρες με τις χαμηλότερες τιμές για άνδρες και γυναίκες είναι η Δανία, η Φινλανδία, η Σουηδία, η Γαλλία, η Ιταλία και η Ισπανία. Ενώ από το 1990 έως και το 2045, η Γερμανία, η Ελλάδα και το Ηνωμένο Βασίλειο θα διατηρήσουν χαμηλές τιμές βρεφικής θνησιμότητας.

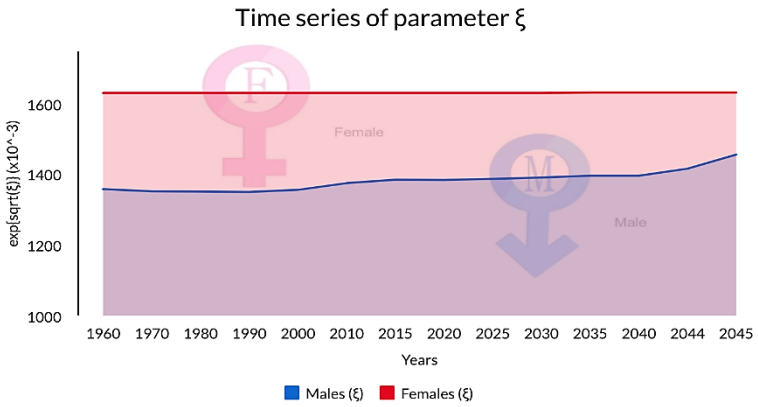
Τις δεκαετίες 1960, 70, 80 η Ολλανδία, η Νορβηγία, η Ελβετία και η Πορτογαλία αποτύπωναν υψηλές τιμές βρεφικής θνησιμότητας για άνδρες και γυναίκες, όμως στη συνέχεια η σχετική θέση των χωρών αυτών ως προς το μέσο όρο βελτιώθηκε. Ορόσημο φαίνεται πως αποτέλεσε για το σύνολο των 22 χωρών η δεκαετία 1990 και μετά όπου στο σύνολό τους οι χώρες άρχισαν την σταδιακή μείωση των τιμών της παραμέτρου ϑ. Ενώ ακόμα και οι χώρες που παρέμειναν άνω του μέσου όρου της Ευρώπης εκείνων των ετών φαίνεται να βελτίωσαν τη σχετική τους θέση (πίνακας 7). Τα έτη 2008 έως 2015, περίοδος έντονης οικονομικής ύφεσης κυρίως για το σύνολο των νότιων χωρών της Ευρώπης, το κομμάτι της βρεφικής θνησιμότητας δεν φάνηκε να επηρεάζεται ποιοτικά, συνεχίζοντας αντίστοιχα την πτωτική τάση.

Κλείνοντας, οι χώρες με έντονη διαβάθμιση τιμών σε ολόκληρη την χρονολογική αποτύπωση είναι η Ιρλανδία, η Εσθονία και η Λετονία. Τόσο οι άνδρες όσο και οι γυναίκες, κινούνται σε ένα μεταβλητό όριο που φαίνεται να επηρεάζεται πολύ από δεκαετία σε δεκαετία. Επίσης, το μοντέλο πρόβλεψης, από το 2030 έως το 2045, «προειδοποιεί» για αύξηση της βρεφικής θνησιμότητας, κάτι το οποίο θα πρέπει να προβληματίσει. Ίσως να οφείλεται στην τάση που έχουν τα δεδομένα στα μοντέλα πρόβλεψης για κυκλική επανάληψη του παρελθόντος στο μέλλον ή σε κάποια δυσάρεστη πληθυσμιακή εξέλιξη, σε κάθε περίπτωση χρειάζεται έλεγχο και μια σωστή αντιμετώπιση, ώστε να περιορισθεί αυτή η εξέλιξη.

Πορεία δημογραφικής Γήρανσης (Παράμετρος ξ)

Η παράμετρος ***ξ,*** επηρεάζεται από το πλήθος των ανθρώπων άνω των 70 ετών προς το σύνολο του πληθυσμού σε μία γεωγραφική περιοχή (Andreopoulos et al., 2019). Αντίστοιχα, το υψηλό ποσοστό ηλικιωμένων θα μπορούσε να οφείλεται στο καλό σύστημα υγείας της χώρας, σε μία αντίστοιχα ποιοτική ζωή σε επίπεδο διατροφικών συνηθειών, σε μία ποιοτική αντιμετώπιση των ηλικιωμένων από την εκάστοτε κυβέρνηση και πολλά άλλα. Αυτό ναι μεν δίνει εικόνα μακροζωίας και ευημερίας σε έναν πληθυσμό, όμως ίσως να σημαίνει και αντίστοιχη μείωση του δυναμικού νεανικού πληθυσμού που οφείλεται σε παράγοντες όπως είναι η μείωση των γεννήσεων ή κάποια αιτία που προκάλεσε συρρίκνωση του νεανικού πληθυσμού (π.χ. πόλεμος ή αύξηση της παραμέτρου ϑ).

Εξετάζοντας τις πρόσφατες πληθυσμιακές μεταβολές (πίνακας 23) διαπιστώνεται ότι, και στις 22 χώρες που συμμετέχουν στην ανάλυση, η διαδικασία γήρανσης του πληθυσμού (η τάση δηλ. αύξησης του ποσοστού των ηλικιωμένων στον συνολικό πληθυσμό – παράμετρος ***ξ***) συνεχίζεται απρόσκοπτα από το 1960 και θα συνεχίζει να αυξάνεται τουλάχιστον έως το 2045 (τάση πρόβλεψης), με το ειδικό βάρος των ηλικιωμένων στην Ευρώπη να αυξάνεται. Η ανάλυση των δεδομένων αναδεικνύει και τους διαφοροποιημένους ρυθμούς γήρανσης μεταξύ των χωρών.



Γράφημα 31. Η χρονική εξέλιξη της γήρανσης για τις 22 χώρες της Ευρώπης και για τα δύο φύλα στο παρελθόν, το παρόν και το μέλλον. Η όποια διαφοροποίηση στο γυναικείο φύλο είναι ουσιαστικά αμελητέα.

Εστιάζοντας στην παράμετρο ***ξ***, οι μικρές τιμές ερμηνεύονται ως χαμηλό ποσοστό των ατόμων άνω των 70 ετών προς το σύνολο του πληθυσμού της συγκεκριμένης χώρας που εξετάζεται. Στον πίνακα 23, επιλέχθηκε η τιμή της παραμέτρου όταν βρίσκεται κάτω από τον

μέσο όρο της Ευρώπης των 22 χωρών, να θεωρείται «Αρνητική (-)», ενώ αν είναι πάνω από το μέσο όρο της Ευρώπης να θεωρείται «Θετική (+)». Σύμφωνα με την βιβλιογραφία και τα δημογραφικά ευρήματα που υπάρχουν και έχουν δημοσιευθεί ως σήμερα, η δημογραφική γήρανση στο ανδρικό φύλο είναι χαμηλότερη σε σχέση με το γυναικείο.

Τα ευρήματα από την δημογραφική και χωρική εξέλιξη του ποσοστού γήρανσης (γράφημα 31) από το 1960 έως το 2045 για τις 22 χώρες της Ευρώπης, είναι αξιόλογα και αποτυπώνουν ως ένα βαθμό την ιστορία της εξέλιξης του πληθυσμού της Ευρώπης. Σχολιάζοντας το γράφημα 31, διαπιστώνεται πως σε όλα τα έτη κατά το παρελθόν ως το εγγύς μέλλον, πληθυσμιακά οι γυναίκες ήταν εκείνες που κατάφερναν να ξεπερνούν σε μεγαλύτερο ποσοστό από τους άνδρες το όριο των 70 ετών. Σε όλη την ανάλυση ανάμεσα στα δύο φύλα, οι γυναίκες εμφανίζουν τα υψηλότερα ποσοστά γήρανσης ή μακροζωίας, ανάλογα την οπτική γωνία που εξετάζεται το φαινόμενο.

Η υψηλή τιμή της παραμέτρου $\boldsymbol{\xi}$, ερμηνεύεται επομένως ως μακροζωία αν αναφέρεται στον συνδυασμό «καλών» τιμών των 4 παραμέτρων και ως «δυσάρεστη» εξέλιξη όταν αναφέρεται στην συρρίκνωση του νεανικού / δυναμικού πληθυσμού. Το οποίο σημαίνει ότι θα συνοδεύεται από μονομερή αύξηση της παραμέτρου $\boldsymbol{\xi}$.

Σύμφωνα με την ανάλυση από το 1960 έως το 2045, οι χώρες Ισπανία, Γαλλία, Πορτογαλία, Ελλάδα, Ιταλία και Βέλγιο εμφανίζουν αυξητική τάση της τιμής του ποσοστού γήρανσης τόσο για άνδρες όσο και για γυναίκες. Αξίζει να σημειωθεί, όπως φαίνεται και στο γράφημα 31, ότι η πορεία στο γυναικείο φύλο παραμένει σχεδόν σταθερή στο σύνολό της σε αντίθεση με το ανδρικό φύλο που η διαχρονική αύξηση του ποσοστού ηλικιωμένων κρίνεται σημαντικά αυξημένη στο παρόν και στο προσεχές μέλλον.

Η σχετική θέση των χωρών, που η ανάλυση τις τοποθετεί κάτω από το μέσο όρο είναι η Δανία, η Εσθονία, η Λετονία, η Λιθουανία, η Πολωνία και οριακά το Ηνωμένο Βασίλειο (πίνακας 23). Συνδυάζοντας το ιστορικό με το δημογραφικό προφίλ, η Εσθονία παρουσιάζει πολλές διακυμάνσεις, που όπως φαίνεται επηρεάστηκε δυσανάλογα από γεγονότα που συνέβησαν στην περιοχή της κατά το τελευταίο μισό του 20ου αιώνα[7], με τον πληθυσμό της να εμφανίζει μείωση τελικά από το 1991 έως το 2016 (αύξηση παραμέτρου $\boldsymbol{\vartheta}$ και παραμέτρου $\boldsymbol{\xi}$ ταυτόχρονα).

[7] Η άνοδος και η πτώση της Σοβιετικής Ένωσης, συμπεριλαμβανομένης της προσάρτησης και της ανεξαρτησίας της Εσθονίας, φαίνεται να επηρέασαν σημαντικά την δημογραφική της σύνθεση (Van Elsuwege, P., 2003).

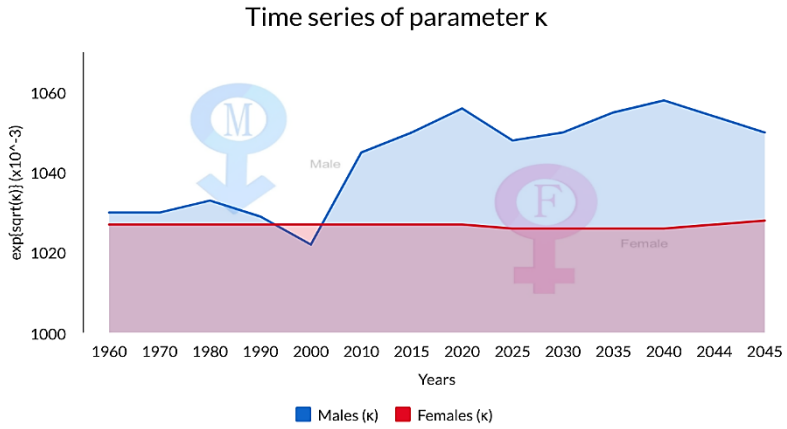
Συνοψίζοντας, η γήρανση στην Ευρώπη ακολουθεί ποικιλόμορφα μονοπάτια, κρύβοντας σημαντικές και ουσιαστικές ανομοιομορφίες. Πάντως η γήρανση εξεταζόμενη σε τοπικό χωρικό επίπεδο δεν μεταφράζεται πάντοτε ως αρνητική εξέλιξη. Σε κάποιες περιπτώσεις η γήρανση θα μπορούσε να είναι αποτέλεσμα εισροής πληθυσμού που συνήθως βρίσκεται σε ηλικία συνταξιοδότησης και ο οποίος εγκαταλείπει την χώρα του αναζητώντας καλύτερη ποιότητα ζωής ή απλά αλλαγή τρόπου ζωής και ταξιδεύει σε μία άλλη. Συνεπώς -υπό προϋποθέσεις- αυτή η μορφή γήρανσης μπορεί να θεωρηθεί θετική εξέλιξη για την οικονομία της χώρας που υποδέχεται αυτό τον πληθυσμό. Από την άλλη και η εγκατάσταση οικονομικών μεταναστών στις χώρες της Ευρώπης θα μπορούσε να λειτουργήσει επίσης βελτιωτικά, ενισχύοντας την τοπική αγορά εργασίας με νέο ηλικιακά εργατικό δυναμικό.

Τελικά, οι διαφοροποιήσεις στα γεωμορφολογικά χαρακτηριστικά, αλλά και η γεωγραφική θέση των χωρών, αλλάζουν και δίνουν άλλη διάσταση στη σημασία της χωρικής συνιστώσας (γήρανση - παράμετρος $\boldsymbol{\xi}$) στη δημογραφική δομή και εξέλιξη των 22 χωρών.

Τυχαίος παράγοντας κινδύνου εξαρτώμενος της ηλικίας (Παράμετρος κ)

Η παράμετρος $\boldsymbol{\kappa}$ εξετάζει την τυχαιότητα του αιφνίδιου θανάτου, είτε λόγω της απότομης χειροτέρευσης της υγείας (ενδογενής παράγοντας) είτε λόγω εξωγενούς τυχαίου παράγοντα (π.χ. τροχαία ατυχήματα, αυτοκτονία) στον άνθρωπο. Η ερμηνεία της παραμέτρου $\boldsymbol{\kappa}$ οφείλεται κατά κύριο λόγο στην ηλικία και ενώ αρχικά θεωρήθηκε ανεξάρτητη του φύλου, η ανάλυση οδήγησε σε αντίθετα αποτελέσματα. Αυτό γίνεται αντιληπτό στο γράφημα 32, όπου οι τιμές τις παραμέτρου μεταβάλλονται στο πέρασμα του χρόνου ανεξάρτητα στα δύο φύλα. Μία γενική παρατήρηση είναι ότι στις γυναίκες ο μέσος όρος της μεταβλητής είναι πιο χαμηλός από των ανδρών συνολικά. Για κάθε άτομο, η επίδραση του τυχαίου παράγοντα κινδύνου με συνέπεια τον θάνατο αυξάνεται στους νεαρούς ενήλικες - οι οποίοι συνήθως υιοθετούν έναν πιο επικίνδυνο τρόπο ζωής - καθώς και για τις ηλικίες μεταξύ 50 και 75 ετών, λόγω ειδικών παθολογικών περιπτώσεων ή γενικότερων ξαφνικών γεγονότων υγείας.

Επιπλέον, δεδομένου ότι η εκτίμησή της μεταβλητής βασίστηκε σε ατομικά δεδομένα / δεδομένα προσωπικού χαρακτήρα (που δεν είναι πάντοτε διαθέσιμα από τις επίσημες στατιστικές αρχές), τα μελλοντικά συμπεράσματα που προκύπτουν από αυτή την παράμετρο αποτελούν ουσιαστικά απλές ενδείξεις.



Γράφημα 32. Η χρονική εξέλιξη της ατομικής θνησιμότητας από τυχαίο παράγοντα κινδύνου (εξαρτώμενη της ηλικίας) για τις 22 χώρες της Ευρώπης και για τα δύο φύλα στο παρελθόν, το παρόν και το μέλλον.

Περνώντας στη δημογραφική και χωρική εξέλιξη της ατομικής θνησιμότητας συναρτήσει της ηλικίας από το 1960 έως το 2045 για τις 22 χώρες της Ευρώπης, τα ευρήματα αποτυπώνουν

ενδιαφέρουσες χωρικές και διαχρονικές διαφοροποιήσεις. Στο γράφημα 32, διαπιστώνεται πως σε όλα τα έτη της ανάλυσης, η παράμετρος *κ* παίρνει υψηλότερες τιμές στους ανδρικούς πληθυσμούς (Wasserman et al., 2005), είτε τα αίτια αφορούν ενδογενείς παράγοντες είτε εξωγενείς παράγοντες (ο διαχωρισμός δεν είναι σαφής λόγω της φύσης των διαθέσιμων δεδομένων). Ο γυναικείος πληθυσμός εμφανίζει μία γενική σταθερότητα με ελάχιστες διακυμάνσεις και μόνο δύο παρατηρήσεις φαίνεται να αξίζουν ιδιαίτερης επισήμανσης. Η πρώτη παρατήρηση αφορά τη μελλοντική μικρή άνοδο που εκτιμάται ότι θα σημειώνεται στο γυναικείο φύλο από το 2040 και μετά. Ενώ, η δεύτερη, αφορά στην μείωση της τιμής της παραμέτρου για το ανδρικό φύλο την περίοδο 1990 έως 2005, το μοναδικό χρονικό διάστημα κατά το οποίο η παράμετρος που αφορά τον τυχαίο παράγοντα κινδύνου λαμβάνει υψηλότερες τιμές για τις γυναίκες σε σχέση με τους άνδρες.

Συγκεντρωτικά, την μεγαλύτερη μεταβολή εμφανίζει το ανδρικό φύλο και αφορά όλες τις χώρες της Ευρώπης που συμμετέχουν στην ανάλυση, από την έναρξη του 21^{ου} αιώνα και μετά. Με την πιο έντονη αποτύπωση να εμφανίζεται στις χώρες: Ιρλανδία, Ισλανδία, Ηνωμένο Βασίλειο, Τσεχία, Εσθονία, Λετονία και Αυστρία. Έρευνες που κατά καιρούς έρχονται στο φως της δημοσιότητας, φανερώνουν μία ανησυχητική τάση των νέων στις βόρειες και λιγότερο στις σκανδιναβικές χώρες της Ευρώπης να γίνονται πιο «επιθετικοί» με τον τρόπο ζωής τους (επικίνδυνη οδήγηση, χρήση ουσιών ή κατάθλιψη που οδηγεί σε αυτοκτονία κυρίως σε σκανδιναβικές χώρες). Παρόμοια αποτελέσματα φαίνεται να εμφανίζονται για τις ίδιες χώρες και στις γυναίκες, με την Πολωνία να είναι η χώρα που εισέρχεται με μεγαλύτερες τιμές σε αυτή την «ομάδα χωρών».

Αυτό που γίνεται αντιληπτό σε σχέση με την ατομική θνησιμότητα και είναι άξιο αναφοράς και μελέτης από άλλους επιστημονικούς κλάδους (όπως οι κοινωνικές επιστήμες) είναι πως ίσως τελικά, οι τοπικές κοινωνικές ή οι πολιτικές αλλαγές της κάθε χώρας επηρεάζουν σε υψηλό βαθμό την παράμετρο ***κ***. Σκιαγραφώντας για παράδειγμα, το κοινωνικοϊστορικό προφίλ της Τσεχίας, θα μπορούσε να αποτελέσει μια τεκμηρίωση του αντίστοιχου συμπεράσματος. Το 1989, μετά το τέλος του κομμουνιστικού καθεστώτος στην Τσεχοσλοβακία (μεγάλη αύξηση της παραμέτρου ***κ*** για τους άνδρες από το 1970 έως το 2000, πίνακας 24), κατά τη διάρκεια της ειρηνικής Βελούδινης Επανάστασης, ακολούθησε η διάλυση της Τσεχοσλοβακίας σε δυο κράτη

το 1993[8]. Ενώ από το 2010 και μετά, με την ειρήνη και την σταθερότητα που επήλθε στην περιοχή της Τσεχίας οι τιμές της παραμέτρου (***κ***) εμφανίζουν πτωτική τάση.

Αυτή η ιστορική αναφορά λειτουργεί ως πιλότος έρευνας και για άλλες χώρες της Ευρώπης που εισήλθαν πρόσφατα μετά από αναταραχές στο εσωτερικό τους στην οικογένεια της Ευρώπης, όπως είναι η Λετονία (είσοδος στην ΕΕ το 2014) και η Εσθονία (είσοδος στην ΕΕ το 2004 – ιδιαίτερη χώρα με μεγάλες αλλαγές στον πληθυσμό της από το 1970 – 2009 λόγω της Σοβιετικής μετανάστευσης[9] και των ακραίων συμβάντων στην περιοχή), χώρες οι οποίες εμφανίζουν υψηλές τιμές της παραμέτρου ***κ*** (πίνακας 24).

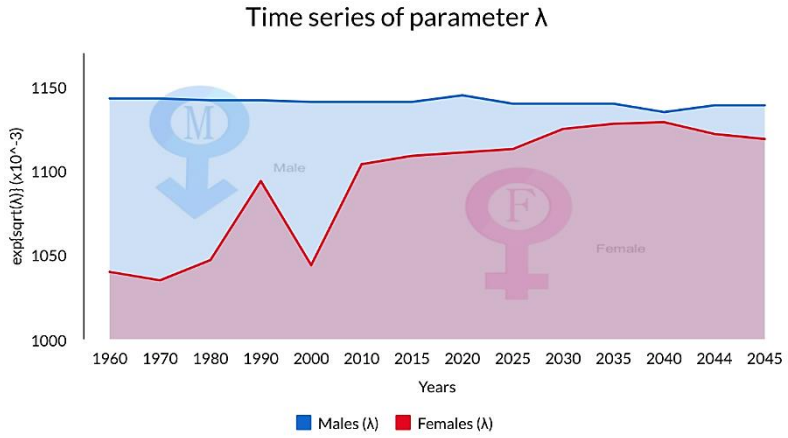
[8] Σλοβακία και Τσεχία έχουν παραμείνει από τότε στενοί συνεργάτες, ενώ ανήκουν μαζί με άλλες χώρες της Κεντρικής Ευρώπης στην ομάδα του Βίσεγκραντ.

[9] Εκείνη την περίοδο, το Σοβιετικό καθεστώς είχε κλείσει τα σύνορα και ουσιαστικά καθιστούσε αδύνατη την μετακίνηση αλλοδαπών προς τις χώρες τους. Οι πολιτικές αναταραχές που ακολούθησαν (ξεκινώντας από το 1939) επέτρεψαν τελικώς το άνοιγμα των συνόρων και τον επαναπατρισμό πολλών πολιτών του Σοβιετικού κράτους.

Τυχαίος παράγοντας κινδύνου που αφορά το σύνολο του πληθυσμού και είναι ανεξάρτητος της ηλικίας (Παράμετρος λ)

Η παράμετρος ***λ,*** εκφράζει τον τυχαίο παράγοντα κινδύνου ο οποίος αφορά το σύνολο του πληθυσμού και είναι ανεξάρτητος ως προς το φύλο ή την ηλικία του ατόμου. Ως τυχαίοι παράγοντες κινδύνου μπορεί να θεωρηθούν γεγονότα που μπορεί να συμβούν και να προκαλέσουν αιφνίδιους θανάτους στον πληθυσμό μιας χώρας. Τέτοια γεγονότα θα μπορούσαν να είναι ένας πόλεμος, μία πανδημία (όπως το 2019 – 21, κορωνοϊός) ή επικίνδυνα περιβαλλοντικά φαινόμενα με ολέθριες συνέπειες (σεισμός, ρύπανση ατμόσφαιρας ή πλημμύρες κλπ.). Υπάρχουν ενδείξεις (γράφημα 33) που εδραιώνουν ως ένα βαθμό την ανεξαρτησία των δύο φύλων, πως τελικά μία καταστροφή δεν επηρεάζει το ίδιο τους άνδρες και τις γυναίκες, ούτε επηρεάζει το ίδιο τις χώρες μεταξύ τους. Σίγουρα όμως η χωρική γειτνίαση των περιοχών παίζει καθοριστικό ρόλο στην εξέλιξη του φαινομένου και κατ΄επέκταση της παραμέτρου ***λ*** που εξετάζεται.

Τα δημογραφικά μέτρα που χρησιμοποιούνται για τη μέτρηση της θνησιμότητας του πληθυσμού ενός γεωγραφικού χώρου, χωρίς να εξετάζουν διαφοροποιήσεις μεταξύ των επιμέρους πληθυσμιακών ομάδων ή των ηλικιών τους, ονομάζονται δείκτες γενικής θνησιμότητας (Παπαδάκης & Τσίμπος, 2004), - με τον ρόλο αυτό ταυτίζεται η παράμετρος ***λ***. Οι δείκτες αυτοί έχουν από τη φύση τους καθολική κάλυψη και αφορούν το σύνολο του πληθυσμού μιας χώρας.



Γράφημα 33. Η χρονική εξέλιξη της συλλογικής θνησιμότητας για τις 22 χώρες της Ευρώπης και για τα δύο φύλα στο παρελθόν, το παρόν και το μέλλον. Η συρρίκνωση που επήλθε στα δύο φύλα είναι εμφανής.

Η δημογραφική και χωρική εξέλιξη της συλλογικής θνησιμότητας στις 22 χώρες της Ευρώπης από το 1960 έως το 2045 εμφανίζει εξαιρετικό ενδιαφέρον τόσο για άνδρες όσο και για γυναίκες. Από το 1960 έως το 2010 (γράφημα 33) η απόσταση στις τιμές της παραμέτρου $\boldsymbol{\lambda}$ ανάμεσα στα δύο φύλα είναι μεγάλη. Το ενδιαφέρον όμως επικεντρώνεται στην αντιμετώπιση που δείχνει διαχρονικά το ένα φύλο σε σχέση με το άλλο στα διάφορα ξαφνικά συμβάντα (Lenart et al., 2019). Όπως φαίνεται στο συγκεντρωτικό γράφημα 33, ναι μεν οι άνδρες κρατάνε ένα υψηλό ποσοστό θανάτων συλλογικά, εντούτοις οι γυναίκες είναι αυτές που εμφανίζουν την μεγαλύτερη ποσοστιαία αύξηση 6,2% στα 50 χρόνια αναφοράς (1960 – 2010), επαληθεύοντας την παραδοχή πως ο γυναικείος πληθυσμός είναι ευάλωτος και τελικά πιο τρωτός.

Χώρες όπως η Ισπανία, η Πολωνία, η Ελλάδα, η Γερμανία (μετά το 1990), η Λετονία και οριακά η Λιθουανία εμφανίζουν υψηλές τιμές συλλογικής θνησιμότητας την περίοδο 1960 – 2010 τόσο για άνδρες όσο και γυναίκες. Οι ιστορικό-κοινωνικές αλλαγές των χωρών[10] αυτών σε εκείνη την περίοδο φαίνεται να προκάλεσε μια αύξηση στους θανάτους των δύο φύλων.

Αν επίσης αναφερθεί επιγραμματικά και η ιστορική διαδρομή της Ελλάδας και γίνει ο αντίστοιχος παραλληλισμός, διαφαίνεται η μεγάλη αύξηση θανάτων ανεξαρτήτου ηλικίας και φύλου. Από το 1930 η Ελλάδα διήγαγε ταραγμένο πολιτικό βίο και ακολούθησε μία μακρά περίοδος ταραχών, κατά την οποία επιβλήθηκε βασιλική δικτατορία, η χώρα βρέθηκε υπό στρατιωτική κατοχή κατά το Β' Παγκόσμιο Πόλεμο, γνώρισε εμφύλιο πόλεμο και μια επταετή στρατιωτική δικτατορία. Ενώ μόλις από το 1974 έως σήμερα το πολίτευμα του κράτους είναι η προεδρευομένη κοινοβουλευτική δημοκρατία.

Περνώντας στην επόμενη χρονολογική φάση από το 2010 έως το 2040 (γράφημα 33) η μεταβολή της παραμέτρου $\boldsymbol{\lambda}$ δείχνει σημάδια σταθεροποίησης. Οι τιμές για άνδρες και γυναίκες είναι πολύ κοντά, ενώ μετά το 2040 το μοντέλο πρόβλεψης δίνει άνοιγμα της «ψαλίδας» ανάμεσα στα δύο φύλα, με πτωτική τάση για τις γυναίκες και αντίστοιχα αυξητική τάση για τους άνδρες.

Απομονώνοντας το κάθε φύλο, σε όλη τη χρονολογική ανάλυση οι άνδρες βρίσκονται πάνω από τις γυναίκες στην κατηγορία των αιφνίδιων θανάτων. Επίσης την περίοδο 2016 – 21, ο

[10] Η Ισπανία, εισέρχεται στην δεκαετία του 1960 μετά από κοινωνικές εντάσεις και εμφύλιες διαμάχες (Α΄ Καρλικός πόλεμος & Ισπανικός εμφύλιος). Η χώρα τότε εισήλθε σε δικτατορία μεταξύ 1939 και 1975 γεγονός το οποίο απομόνωσε τη Ισπανία, ως την μετάβασή της στη δημοκρατία. Αυτές οι εντάσεις αποτυπώνονται στην παράμετρο $\boldsymbol{\lambda}$ με αύξηση θανάτων και στα δύο φύλα.

ανδρικός πληθυσμός εμφανίζει μια γενική αύξηση με την αντίστοιχη μείωση για την ίδια χρονική περίοδο στις γυναίκες. Η καθημερινότητα επαλήθευσε τα ευρήματα αυτά μέσω της πανδημίας (COVID-19) που έπληξε και συνεχίζει να πλήττει όλο τον κόσμο. Υπήρξε μία μεγάλη αύξηση αιφνίδιων θανάτων (Ιταλία, Ισπανία, Πορτογαλία, Γαλλία, Γερμανία, Ηνωμένο Βασίλειο κ.α.), που επηρέασε περισσότερο των ανδρικό πληθυσμό.

Αντίστοιχα εντυπωσιακό εύρημα για το γυναικείο φύλο είναι η μεγάλη πτώση της συλλογικής θνησιμότητας τη δεκαετία 1990 – 2000, την οποία όμως διαδέχθηκε μία εξίσου υψηλή μεταβολή το 2000 – 10 (γράφημα 33).

Κλείνοντας, ένα γενικό συμπέρασμα για τη συλλογική θνησιμότητα ($\boldsymbol{\lambda}$) είναι πως τελικά το «ξαφνικό συμβάν» που θα επηρεάσει το σύνολο του πληθυσμού ανεξάρτητα από την ηλικία και το φύλο, με αύξηση θανάτων, θα υπάρχει πάντα. Η ανθρώπινη φύση πάντα θα καλείται να αντιμετωπίσει αστάθμητους παράγοντες, εκείνο όμως που θα πρέπει να κάνει ο άνθρωπος είναι να διδάσκεται από τα λάθη του παρελθόντος του και να τα χρησιμοποιεί ως γνώσεις για την αντιμετώπιση παρόμοιων φαινομένων στο μέλλον. Τα μοντέλα που χρησιμοποιούνται για μελλοντική πρόβλεψη (BGGM κατανομή) δείχνουν μία τάση για «κυκλική επανάληψη» τέτοιων δυσάρεστων γεγονότων, κάτι το οποίο οι κυβερνήσεις θα μπορούν να το λάβουν σοβαρά υπόψιν τους ώστε να έχουν την ικανότητα να αντιδράσουν μεθοδικά και κυρίως έγκαιρα, σε μία παρόμοια κατάσταση. Μία ακριβής πρόβλεψη των ποσοστών θνησιμότητας των πληθυσμών θα μπορούσε να δημιουργήσει στρατηγικές δημόσιας υγείας και καλύτερη οργάνωση των δημόσιων νοσοκομείων.

Συμβολή των α και β στην καμπύλη θνησιμότητας (Παράμετροι α & β)

Οι παράμετροι ***α*** και ***β*** διαμορφώνουν και τροποποιούν ως προς το σχήμα και την μορφή την $f_{BGGM}(x;\alpha,\beta,\theta,\xi,\kappa,\lambda)$ κατανομή, δίνοντας κάθε φορά διαφορετικές απεικονίσεις (σχήματα 6 & 7). Οι αλλαγές των τιμών τους, προσδίδουν και την ανάλογη καμπύλη μονοτονίας (αύξουσα ή φθίνουσα) στην θνησιμότητα. Η *Beta Gompertz Generalized Makeham* κατανομή, εκ κατασκευής βασίζεται στα ιδιαίτερα πιθανοθεωρητικά χαρακτηριστικά της γενικευμένης Βήτα κατανομής (κεφάλαιο 4). Επομένως οι δύο παράμετροι *α* και *β*, χαρακτηρίζουν μορφολογικά σε μεγάλο βαθμό την Βήτα κατανομή. Η παράμετρος ***α*** (shape) και η παράμετρος ***β*** (scale), χρησιμοποιείται για τη μοντελοποίηση δεδομένων που λαμβάνουν τιμές μέσα στο διάστημα (0,1).

Συνοψίζοντας, ο 20ος αιώνας χαρακτηρίστηκε από υψηλούς ρυθμούς πληθυσμιακής αύξησης στις 22 χώρες της ανάλυσης, κυρίως κατά το δεύτερο μισό του αιώνα, εξαιτίας της θεαματικής μείωσης της θνησιμότητας. Η εντυπωσιακή βελτίωση των δεικτών θνησιμότητας ακολουθήθηκε, με μικρή χρονική υστέρηση όπως συνήθως συμβαίνει, από μια εξίσου σημαντική μείωση της γονιμότητας. Οι εξελίξεις αυτές συνέβησαν σε όλες τις παραπάνω χώρες, όχι όμως με την ίδια ένταση. Οι διαφορετικοί ανά γεωγραφική περιοχή ρυθμοί ανάπτυξης δημιούργησαν διαφορετικές πληθυσμιακές ανακατατάξεις και προκάλεσαν έντονη δημογραφική κινητικότητα συμβάλλοντας στην αστικοποίηση του ευρωπαϊκού πληθυσμού και την ανάπτυξη ιδιαίτερα σημαντικών μεταναστευτικών ρευμάτων. Αύξηση του πληθυσμού, βελτίωση του προσδόκιμου ζωής, μείωση βρεφικής θνησιμότητας, γενικευμένη μείωση της γονιμότητας, αύξηση δημογραφικής γήρανσης, αστικοποίηση και μεταναστευτικά ρεύματα, αποτελούν τις σημαντικότερες τάσεις που διαμόρφωσαν το δημογραφικό τοπίο στα έτη 1960 έως 2020 και θα επηρεάσουν τα έτη 2020 - 2045.

Η γενικότερη **σταδιακή μείωση της θνησιμότητας** σε όλες τις ηλικίες έδωσε το έναυσμα σε μια σειρά εξελίξεων που διαμόρφωσαν το δημογραφικό σκηνικό της Ευρώπης. Από το 1950, και παρά τους δύο Παγκόσμιους Πολέμους που είχαν προηγουμένως ανακόψει την πτωτική τάση της θνησιμότητας, το προσδόκιμο ζωής κατά τη γέννηση ξεπέρασε τα 65 έτη για τους κατοίκους των ανεπτυγμένων περιοχών. Η βελτίωση της διατροφής και των συνθηκών διαβίωσης σταδιακά σε όλες της χώρες της ανάλυσης από το 1980 και μετά, σε συνδυασμό με την ευρεία χρήση αντιβιοτικών και εμβολίων για την αντιμετώπιση θανατηφόρων ασθενειών, συνέβαλαν

στην εντυπωσιακή αύξηση του προσδόκιμου ζωής κατά τη γέννηση με αποτέλεσμα το όφελος σε διάρκεια ζωής να αυξηθεί σημαντικά (Τραγάκη et al., 2015). Όταν όμως η θνησιμότητα μειώνεται ως συνέπεια της οικονομικής ανάπτυξης και της τεχνολογικής προόδου, τότε κατά κανόνα ακολουθείται από τη σταδιακή και σταθερή μείωση της γονιμότητας.

Αυτό έχει ως αποτέλεσμα χρόνο με το χρόνο, οι άνθρωποι στην Ευρώπη να ζουν περισσότερο, ενώ παράλληλα να αποκτούν ολοένα και λιγότερα παιδιά. Ο συνδυασμός των δύο διακριτών δημογραφικών τάσεων οι οποίες αλληλεξαρτώνται, έχει ως αποτέλεσμα τη σταδιακή γήρανση του πληθυσμού. Αύξηση της παραμέτρου $\boldsymbol{\xi}$ και αντίστοιχη μείωση της παραμέτρου $\boldsymbol{\vartheta}$. Επομένως, η πληθυσμιακή γήρανση εκφράζεται με διάφορους δείκτες, που αποτυπώνουν άλλοτε την αριθμητική σχέση μεταξύ διαφορετικών ηλικιακών ομάδων (δείκτες γήρανσης, ηλικιακής εξάρτησης, ανανέωσης ενεργού πληθυσμού), άλλοτε το ποσοστό του πληθυσμού άνω των 70 ετών και άλλοτε την προς τα πάνω μετατόπιση του ηλικιακού κέντρου βάρους ενός πληθυσμού.

Επιπλέον η κοινωνική και οικονομική ευημερία των χωρών μετέβαλλε τρόπους ζωής πολλών δεκαετιών με αρκετές συνέπειες στη θνησιμότητα είτε θετικές, είτε αρνητικές. Η αλλαγή στη ζωή των πολιτών προκάλεσε σημαντικές επιπτώσεις σε θέματα ασφάλειας (αύξηση εγκληματικότητας) και περιβάλλοντος (αύξηση ρυπογόνων τρόπων ζωής) με αποτέλεσμα την αύξηση / μείωση στην τιμή των παραμέτρων $\boldsymbol{\kappa}$ και $\boldsymbol{\lambda}$ τα οποία όμως άρχισαν να γίνονται περισσότερο αισθητά στο τέλος του 20ου αιώνα και αποτελούν κάποιες από τις βασικές προκλήσεις του 21ου αιώνα. Άλλο ένα σημαντικό χρονικό σημείο που χρήζει ιδιαίτερης αναφοράς είναι ότι μέσα στον 20ο αιώνα οι μεταναστευτικές ροές εντάθηκαν προς όλες τις χώρες των 22, τόσο ως προς τον αριθμό των μετακινούμενων ατόμων όσο και ως προς το πλήθος των εμπλεκόμενων κρατών. Άλλαξαν επίσης τα ατομικά χαρακτηριστικά των ατόμων που επιλέγουν να εγκαταλείψουν τη χώρα τους. Παραδοσιακά η μετανάστευση αφορούσε κυρίως νεαρούς άνδρες στην αρχή της παραγωγικής τους ηλικίας. Το πρότυπο αυτό φαίνεται να αλλάζει: στα νέα μεταναστευτικά ρεύματα η ανδρική υπεροχή έχει περιοριστεί ή και εκλείψει (Rovolis and Tragaki, 2006; Tragaki and Rovolis, 2014) ενώ σταθερά αυξάνει η μέση ηλικία των μετακινούμενων, με παράλληλη αύξηση του τοπικού ποσοστού γήρανσης ($\boldsymbol{\xi}$) της χώρας που υποδέχεται τον αντίστοιχο πληθυσμό. Επιπλέον ο τυπικός μετανάστης δεν είναι απαραίτητα άτομο χαμηλών δεξιοτήτων (φαινόμενο brain drain).

Με το πέρασμα της Ευρώπης στο 2000, η καθολικότητα κάποιων δημογραφικών τάσεων φαίνεται να ανατρέπεται. Ωστόσο, απομένει να διαπιστωθεί η διάρκεια και η ένταση αυτών των ανατροπών. Ένα πράγμα όμως είναι πλέον αναμφισβήτητο: τα πληθυσμιακά θέματα που

σχετίζονται με την θνησιμότητα, τη γονιμότητα και την μετανάστευση αναδεικνύονται ως ιδιαίτερα κρίσιμα για το σύνολο των κοινωνικών και οικονομικών εξελίξεων και θα αποτελέσουν τον πυρήνα των μελλοντικών πολιτικών αποφάσεων.

Όλες ανεξαιρέτως οι χώρες κατάφεραν να μειώσουν τους δείκτες βρεφικής θνησιμότητας (***ϑ***), η γενικευμένη βελτίωση όμως, αν και σημαντική, δεν υπήρξε ανάλογη των προσδοκιών. Ανάλογη πρόοδος καταγράφεται και στην παιδική θνησιμότητα. Σύμφωνα με την τελευταία έκθεση του Ο.Η.Ε. σχετικά με την εξέλιξη της θνησιμότητας, ο κίνδυνος θανάτου μεταξύ παιδιών ηλικίας κάτω των πέντε ετών, έχει μειωθεί σχεδόν κατά 50% μέσα στα τελευταία 15 χρόνια (UN, 2014), με το παραδοσιακό πλεονέκτημα των γυναικών έναντι των ανδρών στη μακροζωία να διατηρείται.

Η πληθυσμιακή γήρανση (***ξ***) είναι ίσως η μεγαλύτερη, όχι μόνο δημογραφική, αλλά κυρίως, κοινωνική και οικονομική πρόκληση που καλείται να αντιμετωπίσει ο παγκόσμιος πληθυσμός τις αμέσως επόμενες δεκαετίες. Η επιμήκυνση της διάρκειας ζωής, μια από τις πάγιες επιδιώξεις του ανθρώπου αποτελεί μια από τις σημαντικότερες κατακτήσεις του προηγούμενου αιώνα. Η μεγάλη αυτή κατάκτηση, όμως, περιγράφεται συχνά, ως ο κρίσιμος παράγοντας που είναι πολύ πιθανό να θέσει σε κίνδυνο τη διατήρηση της οικονομικής σταθερότητας και κοινωνικής συνοχής.

Η προσπάθεια αποτύπωσης της δημογραφικής εξέλιξης τόσο χρονικά, παρελθόν – παρόν - μέλλον (έρευνα μελέτης από το 1960 έως το 2045), όσο και χωρικά (έλαβαν μέρος στην έρευνα 22 χώρες της Ευρώπης), δίνει στην επιστήμη την δυνατότητα περαιτέρω ανάλυσης και κατανόησης της ανθρώπινης θνησιμότητας. Η ιστοριογεωγραφία της κάθε χώρας και η ιστοριοκοινωνική της πορεία στο χρόνο αντανακλώνται ικανοποιητικά μέσω των 4 παραμέτρων που αποτυπώνουν την θνησιμότητα (πίνακας 26 & σχήμα 8). Η άνοδος ή (και) η κάθοδος της τιμής της κάθε μία από αυτές συνδέεται στενά με τα κοινωνικά, ιστορικά, οικονομικά και δημογραφικά γεγονότα της κάθε γεωγραφικής περιοχής.

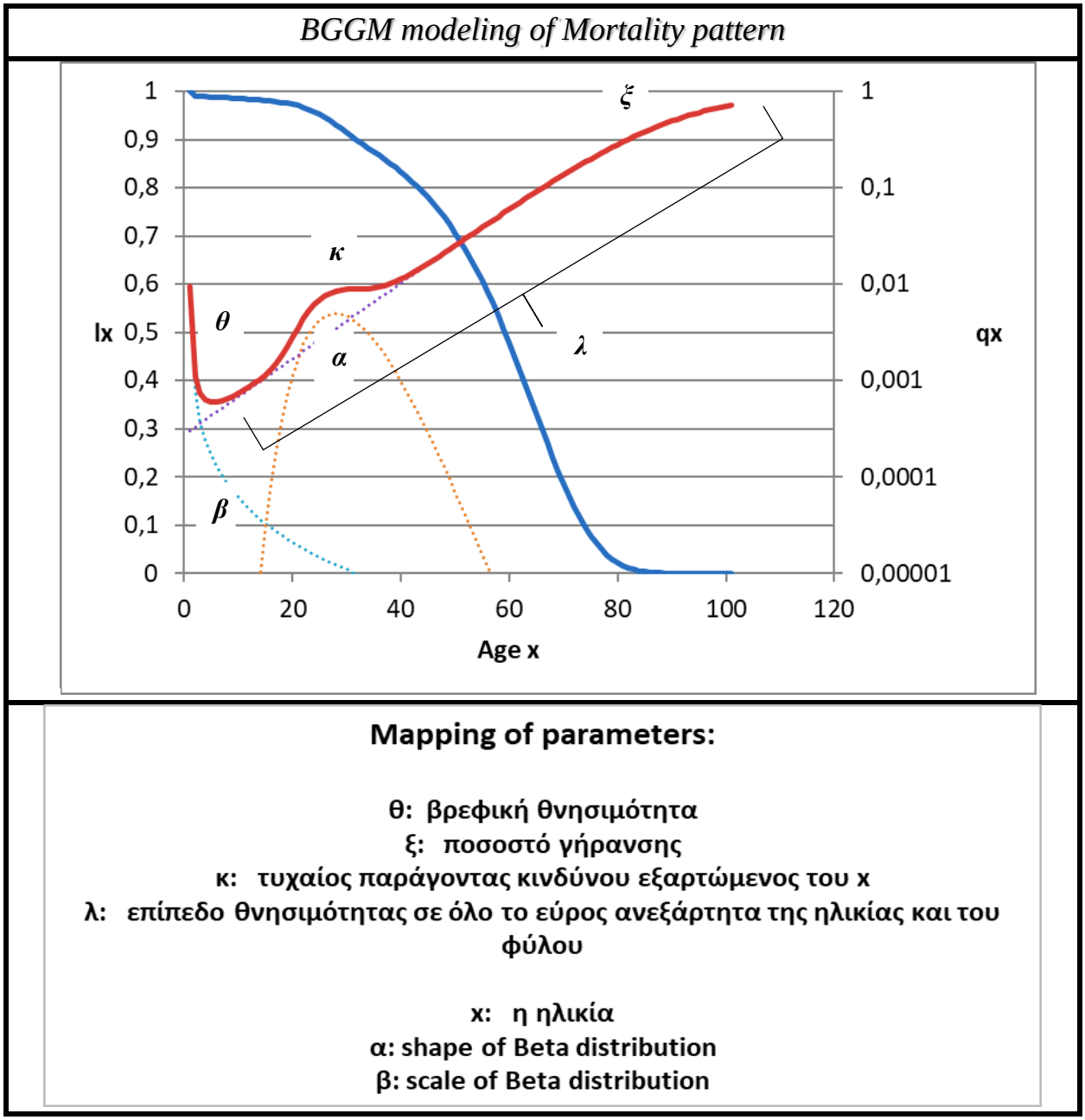
Η προτεινόμενη ***Beta Gompertz Generalized Makeham*** κατανομή, φιλοδοξεί να συμβάλει σε αυτή την προσπάθεια ερμηνείας της ανθρώπινης θνησιμότητας και να είναι ένα επιστημονικό εργαλείο που θα βοηθήσει στη σωστή διαχείριση των δημογραφικών προκλήσεων του 21ου αιώνα. Ως τώρα οι επιστήμονες είχαν στη διάθεσή τους «περιορισμένους» τρόπους «ανάγνωσης» της πορείας της θνησιμότητας, διατηρώντας απλές ενδείξεις εξέλιξης αυτής. Τα μοντέλα (πίνακας 21) που επιχείρησαν την μαθηματική μοντελοποίηση της ανθρώπινης

θνησιμότητας, έχαναν σε ακρίβεια και ευελιξία (κεφάλαιο 2, 3 & 5) ή αδυνατούσαν να συλλάβουν την απαραίτητη / κατάλληλη πληροφορία (πλεονασμός παραμέτρων Heligman-Poland) κάθε φορά. Η BGGM κατανομή, μέσω των «κατάλληλων», τόσο αριθμητικά (ικανοποιητικό goodness of fit με το συγκεκριμένο πλήθος παραμέτρων) όσο και ποιοτικά (ταυτοποίηση της κάθε παραμέτρου με τα πραγματικά δεδομένα ιστορικά και χρονικά), παραμέτρων της (σχήμα 8), επιθυμεί να συμβάλει στη σωστή ανάγνωση των πληθυσμιακών δεδομένων θνησιμότητας, αποδίδοντας στις μελλοντικές προβολές τις κατάλληλες δημογραφικές πληροφορίες σχετικά με τη μελλοντική ανάπτυξη του πληθυσμού μιας περιοχής κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες εξέλιξης της δημογραφικής συνιστώσας, που ονομάζεται θνησιμότητα.

Gompertz κατανομή (1725)	*BGGM κατανομή*
• Εκφράζει τα επιθυμητά αποτελέσματα στις πολύ μεγάλες ή (και) πολύ μικρές ηλικίες. • Αγνοεί την επίδραση του τυχαίου στοιχείου.	• Εκφράζει τα επιθυμητά αποτελέσματα σε όλες τις ηλικίες. • Λαμβάνει υπόψη την επίδραση του τυχαίου στοιχείου.
Generalized Makeham κατανομή (1860)	*BGGM κατανομή*
• Έκφραση ως συνδυασμός γραμμικού και εκθετικού μέρους. • Εξετάζει το σύνολο της θνησιμότητας σε ατομικό και συλλογικό επίπεδο χωρίς ευελιξία στις μεγάλες ηλικίες.	• Μαθηματικός συνδυασμός γραμμικού και εκθετικού μέρους. • Εξετάζει το σύνολο της θνησιμότητας σε ατομικό και συλλογικό επίπεδο με μεγάλη προσαρμογή και ευελιξία σε όλες τις ηλικίες.
Opperman κατανομή (1870)	*BGGM κατανομή*
• Δίνει μία ακριβή αποτύπωση της έντασης της θνησιμότητας στα πρώτα 20 χρόνια • Με 3 παραμέτρους η συνάρτηση	• Εξετάζει το σύνολο της θνησιμότητας σε ατομικό και συλλογικό επίπεδο με μεγάλη προσαρμογή και ευελιξία σε όλες τις ηλικίες.
Weibull κατανομή (1951)	*BGGM κατανομή*
• Η ένταση θνησιμότητας περιγράφεται ως μια συνάρτηση δύναμης σε σχέση με την ηλικία. • Περιγράφεται ως μία γραμμική διαφορική εξίσωση με μεταβλητούς συντελεστές. • Χρησιμοποιείται και στην αναλογιστική επιστήμη.	• Δεν είναι όλοι οι συντελεστές μεταβαλλόμενοι δίνοντας μία σταθερότητα και σχετική ευκολία διαχείρισης μίας κατάστασης. • Δεν έχει δοκιμαστεί σε άλλους τομείς εκτός της θνησιμότητας. Υπάρχουν μόνο ενδείξεις καλής προσαρμογής σε ποικιλία δεδομένων.

Heligman - Pollard κατανομή (1980)	*BGGM κατανομή*
• Είναι η πιο γνωστή έκφραση για την περιγραφή της θνησιμότητας για όλες τις ηλικίες. • Αποτελείται από 8 παραμέτρους. • Κάθε παράμετρος έχει και υποπαραμέτρους. • Πολύ ικανοποιητική προσαρμογή αποκλειστικά σε δεδομένα θνησιμότητα. • Εμφάνιση εξειδίκευσης σε ηλικιακές ομάδες.	• Αποτελεί «νέο» τρόπο έκφρασης (2019 – 20) για την περιγραφή της θνησιμότητας σε όλες τις ηλικίες. • Αποτελείται από 6 παραμέτρους (με τις 2 να αφορούν το σχήμα και μέγεθος της κατανομής και όχι κάποιο εκ των προτέρων δημογραφικό χαρακτηριστικό). • Ενδείξεις για εφαρμογή σε ποικίλες ομάδες δεδομένων. • Δεν υπάρχουν υποπαράμετροι.
Kostaki κατανομή (1992)	*BGGM κατανομή*
• Βελτίωση της κατανομής Heligman-Pollard συνολικά στην προσαρμογή. • Εμφάνιση πληροφορίας θνησιμότητας σε μία δίκλαδη μαθηματική συνάρτηση. • Περιορισμοί των δίκλαδων συναρτήσεων. • Αποτελείται από 9 παραμέτρους. • Εξειδίκευση στο “hump accident”	• Αποτελείται από 6 παραμέτρους με τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα που αναφέρθηκαν. • Ενδείξεις για εφαρμογή και ποικίλες ομάδες δεδομένων. • Παρόμοιο Goodness of fit, με λιγότερη εκ των προτέρων πληροφορία. • Ικανοποιητική εφαρμογή στο “hump accident” ακολουθώντας τα δεδομένα χωρίς την ανάγκη δημιουργίας επιμέρους συναρτήσεων με άλλη επιπλέον παράμετρο.

Πίνακας 21. Άμεση σύγκριση της *Beta Gompertz Generalized Makeham* κατανομής με τους πιο γνωστούς νόμους θνησιμότητας, από το 1725 έως το 1992.



Σχήμα 8. Η θέση των παραμέτρων θ, ξ, κ, λ στην καμπύλη θνησιμότητας

$\theta \mid \xi, \kappa, \lambda$	1960		1970		1980		1990		2000		2010		2015	
	M	F	M	F	M	F	M	F	M	F	M	F	M	F
Denmark	1,0068	1,0189	1,0068	1,0060	1,0022	1,0192	1,0069	1,0192	1,0089	1,0060	1,0150	1,0188	1,0107	1,0118
Finland	1,0267	1,0060	1,0266	1,0061	1,0270	1,0060	1,0211	1,0060	1,0216	1,0061	1,0318	1,0060	1,0236	1,0060
France	1,0083	1,0060	1,0071	1,0060	1,0069	1,0061	1,0028	1,0060	1,0031	1,0061	1,0022	1,0061	1,0013	1,0060
Sweden	1,0068	1,0061	1,0075	1,0060	1,0099	1,0061	1,0080	1,0060	1,0029	1,0061	1,0035	1,0060	1,0021	1,0061
Italy	1,0081	1,0060	1,0071	1,0060	1,0070	1,0059	1,0066	1,0060	1,0036	1,0061	1,0042	1,0060	1,0013	1,0060
Spain	1,0085	1,0060	1,0077	1,0060	1,0071	1,0059	1,0057	1,0061	1,0054	1,0060	1,0037	1,0061	1,0032	1,0060
Lithuania	1,0066	1,0191	1,0069	1,0192	1,0135	1,0192	1,0109	1,0192	1,0264	1,0192	1,0065	1,0189	1,0067	1,0185
Germany	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0061	1,0059	1,0056	1,0061	1,0032	1,0040	1,0016	1,0060
Greece	1,0720	1,0610	1,0730	1,0610	1,0792	1,0410	1,0474	1,0061	1,0219	1,0050	1,0186	1,0060	1,0167	1,0060
Belgium	1,0245	1,0613	1,0251	1,0622	1,0278	1,0612	1,0246	1,0630	1,0163	1,0621	1,0030	1,0425	1,0043	1,0191
Austria	1,0751	1,0192	1,0738	1,0190	1,0902	1,0194	1,0635	1,0192	1,0404	1,0194	1,0665	1,0191	1,0355	1,0124
Czechia	1,0228	1,0514	1,0240	1,0607	1,0251	1,0628	1,0251	1,0413	1,0209	1,0618	1,0205	1,0226	1,0053	1,0109
UK	1,0795	1,0522	1,0801	1,0620	1,0745	1,0620	1,0492	1,0302	1,0480	1,0257	1,0464	1,0246	1,0232	1,0156
Iceland	1,0324	1,0273	1,0689	1,0621	1,0813	1,0614	1,0895	1,0616	1,0619	1,0624	1,0310	1,0115	1,0240	1,0062
Netherlands	1,0662	1,0628	1,0682	1,0614	1,0726	1,0628	1,0932	1,0414	1,0930	1,0620	1,0339	1,0326	1,0146	1,0126
Norway	1,0692	1,0615	1,0722	1,0610	1,0726	1,0611	1,0810	1,0415	1,0800	1,0623	1,0741	1,0328	1,0240	1,0121
Poland	1,1722	1,0511	1,0989	1,0513	1,0108	1,0614	1,0104	1,0120	1,0107	1,0613	1,0753	1,0421	1,0236	1,0156
Estonia	1,0124	1,0620	1,0135	1,0615	1,0101	1,0621	1,0109	1,0421	1,0950	1,0192	1,0918	1,0245	1,0303	1,0239
Switzerland	1,0849	1,0614	1,0722	1,0628	1,0712	1,0614	1,0932	1,0622	1,0908	1,0613	1,0775	1,0621	1,0537	1,0423
Latvia	1,0907	1,0617	1,0149	1,0619	1,0134	1,0621	1,0119	1,0319	1,0150	1,0620	1,0766	1,0512	1,0489	1,0113
Portugal	1,1917	1,0302	1,0991	1,0618	1,0903	1,0609	1,0773	1,0309	1,0885	1,0620	1,0401	1,0615	1,0832	1,0216
Ireland	1,0780	1,0617	1,0765	1,0621	1,0799	1,0622	1,0736	1,0613	1,0992	1,0614	1,0615	1,0622	1,0463	1,0125
Μέση τιμή	*1,0524*	*1,0289*	*1,0540*	*1,0286*	*1,0522*	*1,0289*	*1,0490*	*1,0272*	*1,0480*	*1,0269*	*1,0480*	*1,0267*	*1,0240*	*1,0156*

$\theta \mid \xi, \kappa, \lambda$	2020		2025		2030		2035		2040		2044		2045	
	M	F	M	F	M	F	M	F	M	F	M	F	M	F
Denmark	1,0117	1,0122	1,0126	1,0122	1,0113	1,0128	1,0142	1,0181	1,0149	1,0180	1,0155	1,0180	1,0156	1,0180
Finland	1,0133	1,0060	1,0106	1,0060	1,0131	1,0060	1,0233	1,0060	1,0105	1,0060	1,0138	1,0060	1,0103	1,0060
France	1,0032	1,0060	1,0044	1,0060	1,0053	1,0060	1,0061	1,0060	1,0068	1,0061	1,0073	1,0061	1,0074	1,0061
Sweden	1,0010	1,0060	1,0026	1,0060	1,0035	1,0060	1,0042	1,0059	1,0048	1,0060	1,0053	1,0060	1,0054	1,0061
Italy	1,0031	1,0060	1,0039	1,0060	1,0039	1,0060	1,0051	1,0060	1,0045	1,0060	1,0054	1,0060	1,0036	1,0060
Spain	1,0021	1,0060	1,0013	1,0060	1,0028	1,0061	1,0037	1,0060	1,0044	1,0060	1,0049	1,0060	1,0050	1,0060
Lithuania	1,0076	1,0194	1,0084	1,0193	1,0091	1,0194	1,0098	1,0194	1,0104	1,0192	1,0109	1,0195	1,0110	1,0187
Germany	1,0023	1,0030	1,0037	1,0060	1,0047	1,0061	1,0000	1,0061	1,0000	1,0061	1,0357	1,0061	1,0436	1,0061
Greece	1,0153	1,0060	1,0014	1,0011	1,0121	1,0061	1,0000	1,0061	1,0000	1,0061	1,0450	1,0061	1,0435	1,0061
Belgium	1,0097	1,0128	1,0091	1,0071	1,0116	1,0058	1,0136	1,0576	1,0154	1,0177	1,0167	1,0177	1,0170	1,0194
Austria	1,0132	1,0121	1,0392	1,0192	1,0022	1,0019	1,0264	1,0192	1,0466	1,0192	1,0211	1,0192	1,0108	1,0191
Czechia	1,0051	1,0115	1,0048	1,0061	1,0045	1,0055	1,0043	1,0542	1,0040	1,0454	1,0037	1,0525	1,0036	1,0518
UK	1,0203	1,0102	1,0012	1,0060	1,0055	1,0060	1,0086	1,0060	1,0278	1,0186	1,0103	1,0049	1,0100	1,0107
Iceland	1,0273	1,0092	1,0193	1,0119	1,0058	1,0062	1,0058	1,0062	1,0484	1,0442	1,0586	1,0130	1,0447	1,0117
Netherlands	1,0224	1,0126	1,0301	1,0627	1,0028	1,0063	1,0247	1,0627	1,0216	1,0194	1,0187	1,0194	1,0179	1,0131
Norway	1,0318	1,0122	1,0394	1,0623	1,0037	1,0062	1,0343	1,0155	1,0315	1,0182	1,0290	1,0165	1,0283	1,0061
Poland	1,0308	1,0209	1,0010	1,0061	1,0912	1,0607	1,0613	1,0107	1,0885	1,0189	1,0719	1,0189	1,0436	1,0059
Estonia	1,0625	1,0331	1,0680	1,0523	1,0690	1,0052	1,0784	1,0507	1,0896	1,0499	1,0910	1,0492	1,0763	1,0491
Switzerland	1,0321	1,0122	1,0060	1,0062	1,0059	1,0062	1,0567	1,0624	1,0549	1,0499	1,0533	1,0499	1,0293	1,0117
Latvia	1,0706	1,0312	1,0722	1,0612	1,0738	1,0061	1,0753	1,0610	1,0769	1,0611	1,0781	1,0611	1,0784	1,0612
Portugal	1,0436	1,0122	1,0081	1,0063	1,0664	1,0618	1,0745	1,0624	1,0758	1,0632	1,0723	1,0630	1,0294	1,0628
Ireland	1,0605	1,0325	1,0637	1,0626	1,0623	1,0063	1,0610	1,0626	1,0596	1,0627	1,0584	1,0627	1,0582	1,0627
Μέση τιμή	*1,0191*	*1,0159*	*1,0194*	*1,0162*	*1,0201*	*1,0155*	*1,0405*	*1,0390*	*1,0459*	*1,0439*	*1,0452*	*1,0426*	*1,0436*	*1,0400*

Πίνακας 22. Εκτιμήσεις της παραμέτρου ϑ (βρεφική θνησιμότητα) για επιλεγμένα έτη, τόσο για άνδρες όσο και για γυναίκες. Το πράσινο & κόκκινο χρώμα αφορά την θετική & αρνητική έκβαση της παραμέτρου. Οι χώρες κατατάσσονται σε αύξουσα σειρά ως προς την βρεφική θνησιμότητα. Με την Ιρλανδία να αποτελεί την χώρα με την μεγαλύτερη βρεφική θνησιμότητα.

$\xi \mid \theta, \kappa, \lambda$	1960		1970		1980		1990		2000		2010		2015	
	M	F	M	F	M	F	M	F	M	F	M	F	M	F
France	1,3551	1,6322	1,4550	1,7723	1,4579	1,6330	1,3636	1,6321	1,3721	1,6328	1,4134	1,6335	1,4071	1,6330
Portugal	1,3654	1,6321	1,3621	1,6320	1,3562	1,6311	1,3600	1,6310	1,3578	1,6324	1,3913	1,6323	1,4108	1,6327
Belgium	1,3586	1,6315	1,3589	1,6324	1,3472	1,6314	1,3519	1,6333	1,3622	1,6324	1,3989	1,6329	1,4235	1,6333
Italy	1,3571	1,6323	1,3874	1,6319	1,3569	1,6310	1,3574	1,6322	1,3732	1,6329	1,3806	1,6322	1,3907	1,6326
Netherlands	1,3819	1,6331	1,3604	1,6316	1,3559	1,6331	1,3570	1,6316	1,3573	1,6322	1,3541	1,6329	1,3922	1,6329
Austria	1,3605	1,6322	1,3618	1,6316	1,3538	1,6330	1,3666	1,6323	1,3788	1,6330	1,4176	1,6320	1,4130	1,6332
Germany	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,3678	1,6311	1,3626	1,6325	1,3981	1,6323	1,3984	1,6619
Spain	1,3581	1,6321	1,3485	1,6318	1,3598	1,6312	1,3679	1,6325	1,3543	1,6316	1,3843	1,6328	1,4010	1,6324
Switzerland	1,3571	1,6316	1,3581	1,6331	1,3583	1,6316	1,3816	1,6325	1,3938	1,6315	1,4087	1,6326	1,4221	1,6320
Sweden	1,4010	1,6330	1,3492	1,6315	1,3451	1,6333	1,3474	1,6320	1,3972	1,6329	1,3765	1,6318	1,3943	1,6334
Czechia	1,3596	1,6316	1,3617	1,6309	1,3595	1,6331	1,3587	1,6315	1,3605	1,6321	1,3586	1,6330	1,3572	1,6324
Greece	1,3457	1,3457	1,3202	1,5125	1,0000	1,0000	1,3423	1,6325	1,3489	1,6323	1,3727	1,6324	1,3583	1,6330
Finland	1,3536	1,6317	1,3552	1,6330	1,4556	1,6313	1,3485	1,6318	1,3621	1,6330	1,3987	1,6316	1,4239	1,6322
Ireland	1,3580	1,6317	1,3588	1,6322	1,3579	1,6324	1,3587	1,6315	1,3599	1,6315	1,3678	1,6325	1,3652	1,6323
Iceland	1,3929	1,6315	1,3559	1,7324	1,3518	1,6316	1,3546	1,6318	1,4044	1,6327	1,3701	1,6318	1,3804	1,6321
Norway	1,3801	1,6317	1,3870	1,6311	1,3562	1,6312	1,3481	1,6317	1,3581	1,6326	1,3684	1,6332	1,3770	1,6325
UK	1,3598	1,6324	1,3594	1,6322	1,3573	1,6322	1,3573	1,6324	1,3570	1,6330	1,3605	1,6319	1,3720	1,6317
Denmark	1,3604	1,6313	1,3584	1,7252	1,5586	1,6322	1,3577	1,6321	1,3384	1,6322	1,3781	1,6308	1,3701	1,6318
Estonia	1,3212	1,6322	1,2959	1,6317	1,3511	1,6323	1,3300	1,6322	1,3102	1,6322	1,3542	1,6316	1,3842	1,6319
Lithuania	1,3565	1,6316	1,3572	1,6320	1,3474	1,6320	1,3087	1,6322	1,3101	1,6322	1,3654	1,6311	1,3567	1,6319
Poland	1,3701	1,6322	1,3478	1,6315	1,3426	1,6316	1,3204	1,6322	1,3436	1,6315	1,3422	1,6316	1,3698	1,6308
Latvia	1,3588	1,6318	1,3292	1,6320	1,3461	1,6322	1,3137	1,6320	1,2841	1,6321	1,3018	1,6314	1,3217	1,6315
Μέση τιμή	*1,3589*	*1,6320*	*1,3526*	*1,6320*	*1,3523*	*1,6320*	*1,3512*	*1,6320*	*1,3572*	*1,6323*	*1,3761*	*1,6322*	*1,3864*	*1,6322*

$\xi \mid \theta, \kappa, \lambda$	2020		2025		2030		2035		2040		2044		2045	
	M	F	M	F	M	F	M	F	M	F	M	F	M	F
France	1,4352	1,6342	1,4172	1,6333	1,4535	1,6327	1,4461	1,6347	1,4528	1,6339	1,4391	1,6341	1,4460	1,6336
Portugal	1,4112	1,6325	1,4139	1,6328	1,4108	1,6326	1,4181	1,6327	1,4204	1,6328	1,4247	1,6319	1,4222	1,6331
Belgium	1,4223	1,6350	1,4307	1,6346	1,4312	1,6332	1,4325	1,6338	1,4363	1,6345	1,4494	1,6349	1,4458	1,6346
Italy	1,3854	1,6325	1,3879	1,6325	1,3973	1,6332	1,4035	1,6322	1,3858	1,6326	1,4034	1,6323	1,4584	1,6327
Netherlands	1,3918	1,6345	1,3922	1,6334	1,3952	1,6339	1,3928	1,6344	1,3948	1,6327	1,3957	1,6338	1,4471	1,6328
Austria	1,4249	1,6321	1,4306	1,6323	1,4343	1,6327	1,4439	1,6324	1,4515	1,6323	1,4517	1,6327	1,4509	1,6323
Germany	1,4062	1,6322	1,4140	1,6325	1,4217	1,6328	1,4293	1,6332	1,4368	1,6335	1,4428	1,6337	1,4443	1,6338
Spain	1,4128	1,6333	1,4095	1,6325	1,4115	1,6328	1,4195	1,6326	1,4264	1,6327	1,4213	1,6323	1,4112	1,6325
Switzerland	1,4229	1,6323	1,4375	1,6331	1,4343	1,6327	1,4426	1,6323	1,4398	1,6331	1,4591	1,6331	1,4462	1,6325
Sweden	1,3680	1,6321	1,3972	1,6323	1,4026	1,6331	1,4035	1,6326	1,4055	1,6334	1,4126	1,6325	1,4936	1,6331
Czechia	1,3530	1,6330	1,3572	1,6334	1,3554	1,6329	1,3579	1,6333	1,3549	1,6335	1,3570	1,6332	1,5959	1,6335
Greece	1,3866	1,6324	1,3877	1,6328	1,3935	1,6330	1,3979	1,6336	1,3971	1,6329	1,3998	1,6330	1,3866	1,6329
Finland	1,4242	1,6304	1,4232	1,6309	1,4140	1,6319	1,4356	1,6310	1,4359	1,6315	1,4363	1,6316	1,4279	1,6316
Ireland	1,3570	1,6324	1,3648	1,6326	1,3664	1,6331	1,3656	1,6325	1,3623	1,6328	1,3700	1,6329	1,5761	1,6329
Iceland	1,3429	1,6329	1,3269	1,6323	1,3668	1,6323	1,3878	1,6340	1,3689	1,6328	1,3411	1,6333	1,6074	1,6332
Norway	1,3816	1,6325	1,3805	1,6325	1,3833	1,6328	1,3865	1,6334	1,3874	1,6325	1,3847	1,6332	1,3894	1,6332
UK	1,3736	1,6319	1,3916	1,6326	1,3725	1,6315	1,3713	1,6316	1,3754	1,6316	1,3724	1,6316	1,4444	1,6312
Denmark	1,3718	1,6317	1,3723	1,6318	1,3720	1,6316	1,3769	1,6317	1,3729	1,6318	1,3746	1,6316	1,3726	1,6318
Estonia	1,3521	1,6319	1,3662	1,6319	1,3589	1,6313	1,3692	1,6316	1,3735	1,6318	1,3692	1,6318	1,4494	1,6317
Lithuania	1,3753	1,6320	1,3675	1,6321	1,3676	1,6318	1,3730	1,6316	1,3879	1,6321	1,3478	1,6322	1,4424	1,6320
Poland	1,3646	1,6311	1,3669	1,6315	1,3650	1,6309	1,3755	1,6313	1,3689	1,6311	1,3884	1,6313	1,4477	1,6311
Latvia	1,3189	1,6313	1,3045	1,6313	1,3212	1,6309	1,3118	1,6311	1,2953	1,6313	1,2881	1,6313	1,4201	1,6314
Μέση τιμή	*1,3854*	*1,6324*	*1,3875*	*1,6324*	*1,3925*	*1,6324*	*1,3967*	*1,6325*	*1,3971*	*1,6326*	*1,4172*	*1,6326*	*1,4569*	*1,6326*

Πίνακας 23. Εκτιμήσεις της παραμέτρου ξ (πλήθος ατόμων άνω των 70 ετών προς το σύνολο του πληθυσμού) για επιλεγμένα έτη, τόσο για άνδρες όσο και για γυναίκες. Το πράσινο & κόκκινο χρώμα αφορά την θετική & αρνητική έκβαση της παραμέτρου. Οι χώρες κατατάσσονται σε φθίνουσα σειρά ως προς το ποσοστό γήρανσης. Με την Λετονία να αποτελεί την χώρα με τον πιο νεανικό πληθυσμό και την Γαλλία να αποτελεί την χώρα με τον πιο γερασμένο πληθυσμό (αντίστροφος χρωματισμός).

$\kappa \mid \theta, \xi, \lambda$	1960		1970		1980		1990		2000		2010		2015	
	M	F	M	F	M	F	M	F	M	F	M	F	M	F
Switzerland	1,0154	1,0272	1,0124	1,0268	1,0265	1,0276	1,0109	1,0271	1,0129	1,0262	1,0142	1,0260	1,0137	1,0254
Greece	1,0462	1,0357	1,0779	1,0000	1,0327	1,0297	1,0265	1,0271	1,0414	1,0257	1,0230	1,0260	1,0485	1,0257
Italy	1,0000	1,0269	1,0022	1,0271	1,0288	1,0279	1,0215	1,0272	1,0157	1,0269	1,0092	1,0260	1,0445	1,0260
Finland	1,0191	1,0271	1,0105	1,0268	1,0289	1,0278	1,0211	1,0275	1,0101	1,0268	1,0361	1,0262	1,0361	1,0259
France	1,0051	1,0269	1,0026	1,0270	1,0298	1,0268	1,0067	1,0272	1,0095	1,0269	1,0196	1,0266	1,0248	1,0259
Sweden	1,0199	1,0269	1,0896	1,0272	1,0304	1,0268	1,0000	1,0273	1,0386	1,0269	1,0101	1,0261	1,0101	1,0261
Austria	1,0419	1,0270	1,0000	1,0272	1,0479	1,0268	1,0378	1,0271	1,0449	1,0268	1,0239	1,0260	1,0210	1,0258
Spain	1,0000	1,0270	1,0289	1,0271	1,0174	1,0278	1,0469	1,0271	1,0460	1,0262	1,0411	1,0260	1,0473	1,0267
Belgium	1,0133	1,0272	1,0000	1,0269	1,0490	1,0273	1,0278	1,0268	1,0172	1,0271	1,0151	1,0269	1,0152	1,0270
Denmark	1,0126	1,0272	1,0249	1,0270	1,0322	1,0270	1,0275	1,0270	1,0214	1,0270	1,0327	1,0280	1,0330	1,0276
Germany	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0300	1,0278	1,0082	1,0270	1,0325	1,0257	1,0515	1,0257
Iceland	1,0000	1,0273	1,0563	1,0321	1,0295	1,0272	1,0000	1,0272	1,0413	1,0270	1,0365	1,0261	1,0303	1,0267
Portugal	1,0197	1,0269	1,0000	1,0270	1,0358	1,0274	1,0448	1,0279	1,0000	1,0272	1,0401	1,0261	1,0249	1,0271
Lithuania	1,0216	1,0277	1,0149	1,0271	1,0159	1,0271	1,0267	1,0270	1,0238	1,0270	1,0312	1,0273	1,0292	1,0271
Poland	1,0428	1,0270	1,0655	1,0272	1,0910	1,0272	1,0235	1,0270	1,0108	1,0272	1,0383	1,0276	1,0455	1,0278
Netherlands	1,0154	1,0268	1,0991	1,0372	1,0279	1,0268	1,0000	1,0276	1,0210	1,0272	1,0639	1,0268	1,0723	1,0267
Norway	1,0164	1,0271	1,0200	1,0578	1,0300	1,0279	1,0000	1,0275	1,0000	1,0270	1,0526	1,0268	1,0963	1,0255
Ireland	1,0523	1,0271	1,0374	1,0270	1,0000	1,0270	1,0279	1,0273	1,0000	1,0276	1,0692	1,0271	1,0417	1,0272
Czechia	1,0100	1,0272	1,0000	1,0274	1,1026	1,0268	1,0732	1,0272	1,0101	1,0273	1,0950	1,0268	1,0875	1,0270
Estonia	1,0778	1,0269	1,0757	1,0397	1,0123	1,0269	1,0608	1,0269	1,0101	1,0270	1,1017	1,0275	1,0735	1,0274
Latvia	1,0834	1,0272	1,0000	1,0271	1,0135	1,0270	1,0715	1,0271	1,0621	1,0271	1,0815	1,0272	1,0910	1,0271
UK	1,0992	1,0269	1,0529	1,0270	1,0356	1,0270	1,0313	1,0270	1,0489	1,0269	1,0550	1,0274	1,1083	1,0272
Μέση τιμή	*1,0298*	*1,0271*	*1,0298*	*1,0271*	*1,0332*	*1,0274*	*1,0286*	*1,0272*	*1,0221*	*1,0269*	*1,0445*	*1,0267*	*1,0502*	*1,0266*

$\kappa \mid \theta, \xi, \lambda$	2020		2025		2030		2035		2040		2044		2045	
	M	F	M	F	M	F	M	F	M	F	M	F	M	F
Switzerland	1,0135	1,0247	1,0189	1,0241	1,0171	1,0244	1,0176	1,0242	1,0190	1,0235	1,0304	1,0234	1,0189	1,0239
Greece	1,0269	1,0251	1,0313	1,0249	1,0277	1,0248	1,0285	1,0245	1,0379	1,0238	1,0441	1,0237	1,0339	1,0237
Italy	1,0544	1,0254	1,0676	1,0247	1,0415	1,0241	1,0120	1,0242	1,0281	1,0235	1,0855	1,0232	1,0751	1,0231
Finland	1,0231	1,0268	1,0416	1,0261	1,0361	1,0258	1,0459	1,0263	1,0551	1,0258	1,0105	1,0255	1,0424	1,0253
France	1,0639	1,0257	1,0720	1,0260	1,0499	1,0260	1,0669	1,0253	1,0924	1,0259	1,0535	1,0256	1,0581	1,0258
Sweden	1,0588	1,0271	1,0107	1,0263	1,0114	1,0261	1,0117	1,0264	1,0122	1,0260	1,0323	1,0261	1,0126	1,0259
Austria	1,0568	1,0266	1,0262	1,0259	1,0311	1,0259	1,0503	1,0262	1,0594	1,0255	1,0418	1,0255	1,0384	1,0257
Spain	1,0000	1,0270	1,0289	1,0271	1,0174	1,0278	1,0469	1,0271	1,0460	1,0262	1,0411	1,0260	1,0473	1,0267
Belgium	1,0062	1,0266	1,0115	1,0267	1,0161	1,0273	1,0217	1,0269	1,0191	1,0267	1,0164	1,0266	1,0158	1,0267
Denmark	1,0440	1,0277	1,0315	1,0276	1,0460	1,0279	1,0468	1,0278	1,0467	1,0278	1,0461	1,0278	1,0514	1,0278
Germany	1,0125	1,0252	1,0135	1,0247	1,0344	1,0242	1,0153	1,0237	1,0161	1,0232	1,0367	1,0228	1,0168	1,0227
Iceland	1,0406	1,0265	1,0197	1,0268	1,0221	1,0266	1,0686	1,0259	1,0671	1,0264	1,0128	1,0259	1,0557	1,0260
Portugal	1,0868	1,0270	1,0345	1,0267	1,0323	1,0271	1,0345	1,0271	1,0521	1,0270	1,0523	1,0273	1,0413	1,0266
Lithuania	1,0292	1,0272	1,0376	1,0271	1,0385	1,0272	1,0326	1,0272	1,0383	1,0271	1,0437	1,0271	1,0311	1,0271
Poland	1,0516	1,0276	1,0363	1,0276	1,0325	1,0279	1,0565	1,0278	1,0654	1,0278	1,0365	1,0281	1,0303	1,0281
Netherlands	1,0712	1,0264	1,0435	1,0269	1,0408	1,0267	1,0261	1,0264	1,0181	1,0271	1,0177	1,0268	1,0125	1,0271
Norway	1,0957	1,0255	1,0927	1,0254	1,0955	1,0252	1,1055	1,0250	1,1066	1,0254	1,1085	1,0249	1,1018	1,0248
Ireland	1,0376	1,0272	1,0434	1,0272	1,0251	1,0270	1,0465	1,0272	1,0675	1,0272	1,0644	1,0272	1,0259	1,0278
Czechia	1,1008	1,0269	1,1098	1,0268	1,1029	1,0272	1,1258	1,0269	1,1042	1,0269	1,1148	1,0269	1,1104	1,0268
Estonia	1,0879	1,0274	1,0737	1,0275	1,1007	1,0279	1,0711	1,0277	1,0736	1,0276	1,1021	1,0275	1,0459	1,0276
Latvia	1,0824	1,0272	1,0889	1,0272	1,0843	1,0275	1,0846	1,0272	1,1040	1,0272	1,1030	1,0272	1,0864	1,0271
UK	1,0968	1,0271	1,0981	1,0274	1,1029	1,0274	1,1039	1,0274	1,1029	1,0274	1,0763	1,0375	1,1010	1,0276
Μέση τιμή	*1,0559*	*1,0265*	*1,0479*	*1,0264*	*1,0498*	*1,0264*	*1,0549*	*1,0263*	*1,0583*	*1,0261*	*1,0539*	*1,0266*	*1,0500*	*1,0276*

Πίνακας 24. Εκτιμήσεις της παραμέτρου κ (ατομική θνησιμότητα που οφείλεται σε τυχαίο παράγοντα κινδύνου εξαρτώμενος της ηλικίας) για επιλεγμένα έτη, τόσο για άνδρες όσο και για γυναίκες. Το πράσινο & κόκκινο χρώμα αφορά την θετική & αρνητική έκβαση της παραμέτρου. Οι χώρες κατατάσσονται σε αύξουσα σειρά ως προς τον τυχαίο παράγοντα κινδύνου. Με το Ηνωμένο Βασίλειο να αποτελεί την χώρα με την χειρότερη «επίδοση» και την Ελβετία με την καλύτερη.

$\lambda \mid \theta, \kappa, \xi$	1960		1970		1980		1990		2000		2010		2015	
	M	F	M	F	M	F	M	F	M	F	M	F	M	F
Belgium	1,1202	1,0144	1,1642	1,0876	1,1217	1,0144	1,0884	1,0740	1,1404	1,0293	1,1398	1,1054	1,1399	1,0935
UK	1,1357	1,0242	1,0915	1,0136	1,1371	1,0143	1,0645	1,0422	1,1407	1,0293	1,1407	1,0817	1,1403	1,0781
Czechia	1,1617	1,0444	1,2310	1,0758	1,0000	1,0140	1,0897	1,0244	1,1406	1,0000	1,1403	1,0000	1,1406	1,0095
Iceland	1,1071	1,0144	1,1385	1,0120	1,3829	1,1114	1,2144	1,1730	1,1402	1,1203	1,1415	1,0861	1,1409	1,0898
Netherlands	1,2739	1,0640	1,1136	1,0143	1,4919	1,1005	1,1522	1,1408	1,1405	1,0340	1,1404	1,0488	1,1415	1,0988
Switzerland	1,1132	1,0144	1,2270	1,0789	1,2589	1,1008	1,0267	1,0140	1,1417	1,0317	1,1404	1,1282	1,1388	1,0947
Austria	1,1234	1,0143	1,1609	1,0758	1,1451	1,1005	1,0976	1,0240	1,1402	1,0365	1,1413	1,1540	1,1388	1,1087
Norway	1,1534	1,0743	1,2036	1,0243	1,2180	1,1010	1,2696	1,1408	1,1401	1,0630	1,1401	1,0351	1,1384	1,0950
Sweden	1,1530	1,0541	1,2864	1,0111	1,2462	1,1001	1,0458	1,0141	1,1404	1,0211	1,1415	1,0568	1,1392	1,0455
Latvia	1,1252	1,0144	1,1025	1,0297	1,0509	1,0143	1,1335	1,0143	1,1429	1,0397	1,1437	1,0996	1,1433	1,0355
Poland	1,1277	1,0314	1,0351	1,0144	1,0429	1,0111	1,1048	1,0743	1,1437	1,0000	1,1408	1,1026	1,1423	1,0145
Lithuania	1,1273	1,0147	1,1002	1,0301	1,1210	1,0144	1,1417	1,1403	1,1427	1,0274	1,1443	1,0377	1,1424	1,0640
Ireland	1,2382	1,0544	1,1140	1,0243	1,0124	1,0142	1,0145	1,0244	1,1409	1,0394	1,1402	1,0835	1,1408	1,1365
Spain	1,1453	1,0743	1,0952	1,0540	1,0321	1,0141	1,0272	1,0774	1,1416	1,0354	1,1401	1,1687	1,1393	1,1255
Finland	1,1736	1,0443	1,1465	1,0441	1,2150	1,1004	1,1858	1,1408	1,1402	1,0967	1,1416	1,1077	1,1414	1,0860
Portugal	1,1610	1,0543	1,1139	1,0114	1,0632	1,0144	1,0488	1,0642	1,1405	1,0963	1,1413	1,1630	1,1419	1,1350
France	1,1710	1,0442	1,1304	1,0142	1,1640	1,1004	1,3071	1,1905	1,1399	1,0448	1,1395	1,1897	1,1403	1,2079
Greece	1,0569	1,0526	1,1346	1,0326	1,0000	1,0006	1,0415	1,0840	1,1381	1,0507	1,1407	1,1392	1,1403	1,1306
Estonia	1,1458	1,0643	1,1638	1,0288	1,0510	1,0142	1,4775	1,2504	1,1427	1,0362	1,1408	1,1024	1,1400	1,1297
Germany	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0967	1,0412	1,1403	1,0000	1,1380	1,1496	1,1413	1,1701
Italy	1,1855	1,0492	1,2173	1,0443	1,1947	1,1000	1,2246	1,1905	1,1404	1,0197	1,1410	1,1245	1,1407	1,1400
Denmark	1,1675	1,0444	1,1559	1,0443	1,1900	1,1004	1,2570	1,1227	1,1427	1,1309	1,1418	1,1250	1,1410	1,1143
Μέση τιμή	*1,1431*	*1,0398*	*1,1426*	*1,0346*	*1,1419*	*1,0472*	*1,1415*	*1,0939*	*1,1410*	*1,0437*	*1,1409*	*1,1041*	*1,1406*	*1,1088*

$\lambda \mid \theta, \kappa, \xi$	2020		2025		2030		2035		2040		2044		2045	
	M	F	M	F	M	F	M	F	M	F	M	F	M	F
Belgium	1,1385	1,1072	1,1370	1,0966	1,1382	1,0982	1,1382	1,1100	1,1359	1,1104	1,1354	1,1067	1,1262	1,1036
UK	1,1402	1,0478	1,1403	1,0787	1,1401	1,0926	1,1396	1,0826	1,1389	1,0745	1,1390	1,0792	1,0728	1,1396
Czechia	1,1400	1,0994	1,1388	1,0127	1,1387	1,0949	1,1387	1,0979	1,1380	1,0182	1,1385	1,0694	1,0199	1,0104
Iceland	1,2200	1,0763	1,1393	1,1082	1,1395	1,1190	1,1373	1,0966	1,1340	1,1000	1,1384	1,1003	1,1217	1,0914
Netherlands	1,1393	1,1103	1,1390	1,1262	1,1387	1,0900	1,1386	1,1146	1,1342	1,1030	1,1382	1,0840	1,0928	1,1094
Switzerland	1,1382	1,1023	1,1379	1,1050	1,1383	1,1043	1,1386	1,1076	1,1365	1,1102	1,1374	1,1189	1,1182	1,1038
Austria	1,1396	1,1070	1,1394	1,1064	1,1382	1,1118	1,1385	1,1213	1,1384	1,1205	1,1382	1,1261	1,1310	1,1039
Norway	1,1383	1,1057	1,1382	1,0996	1,1378	1,0986	1,1376	1,1032	1,1331	1,1059	1,1374	1,1070	1,1267	1,1037
Sweden	1,1399	1,0883	1,1406	1,0920	1,1389	1,0581	1,1393	1,0959	1,1323	1,0981	1,1400	1,0621	1,0744	1,1038
Latvia	1,1500	1,0887	1,1436	1,0997	1,1457	1,1074	1,1439	1,0516	1,1434	1,0900	1,1435	1,0354	1,0766	1,1130
Poland	1,1523	1,0623	1,1409	1,0101	1,1416	1,0814	1,1405	1,1053	1,1407	1,0604	1,1401	1,1030	1,0907	1,1408
Lithuania	1,1422	1,0990	1,1418	1,0256	1,1427	1,0163	1,1430	1,0611	1,1212	1,0435	1,1409	1,0130	1,0709	1,1416
Ireland	1,1406	1,1481	1,1399	1,1486	1,1387	1,1440	1,1395	1,1458	1,1111	1,1555	1,1382	1,1472	1,1604	1,1483
Spain	1,1434	1,1107	1,1398	1,1221	1,1388	1,1291	1,1387	1,1307	1,1386	1,1342	1,1390	1,1365	1,1705	1,1392
Finland	1,1425	1,0533	1,1423	1,1011	1,1406	1,1357	1,1413	1,1081	1,1402	1,1255	1,1400	1,0926	1,1218	1,1008
Portugal	1,1435	1,1406	1,1396	1,1179	1,1394	1,1953	1,1408	1,1811	1,1403	1,1818	1,1386	1,1499	1,1780	1,1373
France	1,1392	1,1937	1,1386	1,2132	1,1404	1,2154	1,1379	1,2298	1,1348	1,2351	1,1372	1,2383	1,2370	1,1371
Greece	1,1433	1,1247	1,1403	1,1320	1,1398	1,1730	1,1397	1,1588	1,1406	1,1532	1,1402	1,1754	1,2005	1,1403
Estonia	1,1403	1,1251	1,1403	1,1321	1,1427	1,1394	1,1406	1,1491	1,1399	1,1451	1,1396	1,1488	1,1713	1,1597
Germany	1,1499	1,1611	1,1405	1,2104	1,1401	1,2285	1,1397	1,2457	1,1393	1,2620	1,1390	1,2746	1,3777	1,1389
Italy	1,1403	1,1522	1,1410	1,1753	1,1394	1,1915	1,1396	1,1542	1,1348	1,1710	1,1404	1,1878	1,1922	1,1201
Denmark	1,1410	1,1241	1,1412	1,1167	1,1412	1,1192	1,1405	1,1314	1,1407	1,1331	1,1411	1,1340	1,1347	1,1207
Μέση τιμή	*1,1447*	*1,1107*	*1,1400*	*1,1127*	*1,1400*	*1,1254*	*1,1397*	*1,1277*	*1,1353*	*1,1286*	*1,1391*	*1,1216*	*1,1391*	*1,1191*

Πίνακας 25. Εκτιμήσεις της παραμέτρου λ (συλλογική θνησιμότητα που οφείλεται σε τυχαίο παράγοντα κινδύνου ανεξάρτητος της ηλικίας & του φύλου) για επιλεγμένα έτη, τόσο για άνδρες όσο και για γυναίκες. Το πράσινο & κόκκινο χρώμα αφορά την θετική & αρνητική έκβαση της παραμέτρου. Οι χώρες κατατάσσονται σε αύξουσα σειρά ως προς τον τυχαίο παράγοντα κινδύνου. Με την Δανία και την Ιταλία να αποτελούν τις χώρες με την χειρότερη «επίδοση» και το Βέλγιο με την καλύτερη.

Χρονολόγιο γεγονότων για τις 22 χώρες της Ευρώπης και πώς επιδρούν στις παραμέτρους *ϑ, ξ, κ, λ* **Περίοδος: 1960 - 2020**			
Ηνωμένο Βασίλειο	1946 - 1974	Φαινόμενο baby-boom	*ϑ:* στο μέσο όρο της ΕΕ *ξ:* χαμηλά ποσοστά γήρανσης *κ:* πολύ υψηλός ατομικός παράγοντας κινδύνου *λ:* πολύ καλή η σχετική θέση της χώρας αντιμετώπισης του τυχαίου κινδύνου για το σύνολο του πληθυσμού στην ΕΕ
	1980 - 2020	Δέχεται κάθε χρόνο υψηλό ποσοστό μεταναστευτικών ροών κυρίως εξαιτίας της οικονομικής της ανάπτυξης επηρεάζοντας τους πληθυσμιακούς της δείκτες	
Αυστρία	1998 - 2013	Είναι στις χώρες όπου η καθαρή μετανάστευση ήταν αισθητά υψηλότερη από την ετήσια αύξηση του μεταναστευτικού αποθέματος.	*ϑ:* στο μέσο όρο της ΕΕ με πτωτική τάση *ξ:* μέτρια προς υψηλά ποσοστά γήρανσης *κ:* χαμηλός ατομικός παράγοντας κινδύνου *λ:* πολύ καλή η σχετική θέση της χώρας αντιμετώπισης του τυχαίου κινδύνου για το σύνολο του πληθυσμού στην ΕΕ
	2002	Κατατάχθηκε στις 10 χώρες της ΕΕ με την χαμηλότερη τιμή βρεφικής θνησιμότητας (Human Development Index, 2002)	
Βέλγιο	1960 - 2020	Ανεπτυγμένη χώρα με οικονομία υψηλού εισοδήματος. Έχει πολύ υψηλά πρότυπα ζωής, ποιότητας ζωής, υγειονομικής περίθαλψης, εκπαίδευσης, και κατατάσσεται ως "πολύ υψηλή" στον Δείκτη Ανθρώπινης Ανάπτυξης. Κατατάσσεται επίσης ως μία από τις ασφαλέστερες ή πιο ειρηνικές χώρες στον κόσμο.	*ϑ:* χαμηλά ποσοστά βρεφικής θνησιμότητας *ξ:* υψηλά ποσοστά γήρανσης *κ:* χαμηλός προς μέτριος ατομικός παράγοντας κινδύνου *λ:* άριστη η σχετική θέση της χώρας αντιμετώπισης του τυχαίου κινδύνου για το σύνολο του πληθυσμού στην ΕΕ
Γαλλία	2004	Η χώρα που υιοθέτησε το σύστημα των κυλιόμενων δειγματοληπτικών απογραφών.	*ϑ:* πολύ υψηλά ποσοστά βρεφικής θνησιμότητας *ξ:* πολύ υψηλά ποσοστά γήρανσης *κ:* στο μέσο όρο ο ατομικός παράγοντας κινδύνου *λ:* αρνητική η σχετική θέση της χώρας αντιμετώπισης του τυχαίου
	2009 - 2012	Οικονομική ύφεση	
	2016	Υψηλό προσδόκιμο ζωής και σύμφωνα με τις εκτιμήσεις του Παγκόσμιου Οργανισμού Υγείας ήταν 82,9 χρόνια (80,1 χρόνια οι άνδρες και 85,7 οι γυναίκες), αλλά με έντονο το φαινόμενο της πληθυσμιακής γήρανσης	

		από τα μέσα του 20ου αιώνα και μετά.	κινδύνου για το σύνολο του πληθυσμού στην ΕΕ
Γερμανία	1989 - 1990	Πτώση του Τείχους του Βερολίνου	*ϑ:* χαμηλά ποσοστά βρεφικής θνησιμότητας *ξ:* υψηλά ποσοστά γήρανσης *κ:* χαμηλός προς μέτριος ατομικός παράγοντας κινδύνου *λ:* αρνητική η σχετική θέση της χώρας ως προς την αντιμετώπιση του τυχαίου κινδύνου για το σύνολο του πληθυσμού στην ΕΕ
	1990 - 2020	Ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού είναι αρνητικός, με τελευταία εκτίμηση -0,05% σε ετήσια βάση, και διατηρείται σε αυτό το επίπεδο αποκλειστικά από το μεταναστευτικό ρεύμα και τους μετανάστες που ζουν εκεί.	
Δανία	1960 - 2020	Υψηλό βιοτικό επίπεδο. Με νεανικό πληθυσμό στην ηλικιακή της πυραμίδα.	*ϑ:* τα χαμηλότερα ποσοστά βρεφικής θνησιμότητας *ξ:* χαμηλά ποσοστά γήρανσης *κ:* χαμηλός ατομικός παράγοντας κινδύνου *λ:* η χειρότερη επίδοση της χώρας ως προς την αντιμετώπιση του τυχαίου κινδύνου για το σύνολο του πληθυσμού στην ΕΕ
Ελβετία	1960 - 2020	Υψηλό βιοτικό επίπεδο. Ανεπτυγμένο εμπόριο, βιομηχανία και τουρισμό. Μεταναστευτικές ροές στη χώρα από άτομα μεγαλύτερης ηλικίας.	*ϑ:* μέτρια ποσοστά βρεφικής θνησιμότητας *ξ:* υψηλά ποσοστά γήρανσης *κ:* πολύ χαμηλός ατομικός παράγοντας κινδύνου *λ:* θετική η επίδοση της χώρας ως προς την αντιμετώπιση του τυχαίου κινδύνου για το σύνολο του πληθυσμού στην ΕΕ
Ελλάδα	1960 - 2015	Χώρα με εμφυλίους και πολέμους ως το 1945. Κατατάχθηκε ως η 29η καλύτερη χώρα σε επίπεδο ποιότητας ζωής στον κόσμο για το 2015.	*ϑ:* μέτρια προς χαμηλά ποσοστά βρεφικής θνησιμότητας *ξ:* υψηλά ποσοστά γήρανσης *κ:* πολύ υψηλός ο ατομικός παράγοντας κινδύνου *λ:* θετική η επίδοση της χώρας ως προς την αντιμετώπιση του τυχαίου κινδύνου για το σύνολο του πληθυσμού στην ΕΕ
	2015 - 2020	Μεγάλες μεταναστευτικές ροές στο εσωτερικό της από άτομα που ζητούν άσυλο με σκοπό να εισέλθουν στην Ευρώπη.	

Εσθονία	1991	Ανεξαρτησία της χώρας από την ΕΣΣΔ	ϑ: αστάθεια και υψηλά τα ποσοστά βρεφικής θνησιμότητας ξ: χαμηλά ποσοστά γήρανσης κ: υψηλός ο ατομικός παράγοντας κινδύνου λ: κακή η επίδοση της χώρας ως προς την αντιμετώπιση του τυχαίου κινδύνου για το σύνολο του πληθυσμού στην ΕΕ
	2016	Η ένταση του δείκτη γήρανσης προχωράει με γοργό ρυθμό (Π.Ο.Υ.)	
	2000 - 2020	Χώρα με έντονες εισοδηματικές ανακατατάξεις.	
Ιρλανδία	1946 - 1982	Δημογραφική ανανέωση (baby-boom)	ϑ: αστάθεια και υψηλά τα ποσοστά βρεφικής θνησιμότητας ξ: στο μέσο όρο είναι τα ποσοστά γήρανσης κ: υψηλός ο ατομικός παράγοντας κινδύνου λ: μέτρια η επίδοση της χώρας ως προς την αντιμετώπιση του τυχαίου κινδύνου για το σύνολο του πληθυσμού στην ΕΕ
	1998	Συμφωνία Μπέλφαστ	
Ισλανδία	2008 - 2010	Οικονομική κρίση Περιορισμένα μεταναστευτικά ρεύματα	ϑ: στο μέσο όρο τα ποσοστά βρεφικής θνησιμότητας ξ: μέτρια προς χαμηλά τα ποσοστά γήρανσης κ: σχετικά υψηλός ο ατομικός παράγοντας κινδύνου λ: στο μέσο όρο η επίδοση της χώρας ως προς την αντιμετώπιση του τυχαίου κινδύνου για το σύνολο του πληθυσμού στην ΕΕ
Ισπανία	1960	Άρχισε η οικονομική ανάκαμψη	ϑ: χαμηλά τα ποσοστά βρεφικής θνησιμότητας ξ: μέτρια προς υψηλά τα ποσοστά γήρανσης κ: χαμηλός ο ατομικός παράγοντας κινδύνου λ: μέτρια προς υψηλή η επίδοση της χώρας ως προς την αντιμετώπιση του
	2008 - 2012	Οικονομική κρίση	

			τυχαίου κινδύνου για το σύνολο του πληθυσμού στην ΕΕ
Ιταλία	1960 - 2020	Έχει ένα υψηλό προσδόκιμο ζωής, ενώ δεν επηρεάστηκε δημογραφικά από το baby-boom, ούτε και οι άλλες χώρες του Ευρωπαϊκού νότου – Ελλάδα, Ισπανία και Πορτογαλία. Βρίσκεται ανάμεσα στις χώρες με τον πιο γοργό ρυθμό γήρανσης των τελευταίων δεκαετιών.	*ϑ:* χαμηλά τα ποσοστά βρεφικής θνησιμότητας *ξ:* υψηλά τα ποσοστά γήρανσης *κ:* σχετικά χαμηλός ο ατομικός παράγοντας κινδύνου *λ:* υψηλά τα ποσοστά θνησιμότητας της χώρας ως προς την αντιμετώπιση του τυχαίου κινδύνου για το σύνολο του πληθυσμού στην ΕΕ
	2008 - 2012	Οικονομική κρίση	
	2015 - 2020	Μεγάλες μεταναστευτικές ροές στο εσωτερικό της από άτομα που ζητούν άσυλο με σκοπό να εισέλθουν στην Ευρώπη.	
Λετονία	1991	Ανεξαρτησία από την ΕΣΣΔ	*ϑ:* υψηλά τα ποσοστά βρεφικής θνησιμότητας *ξ:* πολύ χαμηλά τα ποσοστά γήρανσης *κ:* σχετικά χαμηλός ο ατομικός παράγοντας κινδύνου *λ:* μέτρια τα ποσοστά θνησιμότητας της χώρας ως προς την αντιμετώπιση του τυχαίου κινδύνου για το σύνολο του πληθυσμού στην ΕΕ
	2000 - 2020	Οικονομική ανάκαμψη αλλά και Μεγάλη ύφεση	
Λιθουανία	1990	Ανεξαρτησία από την ΕΣΣΔ	*ϑ:* υψηλά τα ποσοστά βρεφικής θνησιμότητας *ξ:* πολύ χαμηλά τα ποσοστά γήρανσης *κ:* πολύ υψηλός ο ατομικός παράγοντας κινδύνου *λ:* υψηλά τα ποσοστά θνησιμότητας της χώρας ως προς την αντιμετώπιση του τυχαίου κινδύνου για το σύνολο του πληθυσμού στην ΕΕ
	1960 - 2020	Χώρα με έντονες κοινωνικές και οικονομικές ταραχές, με αρνητικό αντίκτυπο στους βασικούς δημογραφικούς της δείκτες. Η Λιθουανία σημείωσε δραματική αύξηση των αυτοκτονιών στα μετασοβιετικά χρόνια (παράμετρος *κ*) και τώρα καταγράφει το τέταρτο υψηλότερο ποσοστό αυτοκτονίας ανά ηλικία στον κόσμο, σύμφωνα με την ΠΟΥ. Η Λιθουανία έχει επίσης το υψηλότερο ποσοστό ανθρωποκτονίας στην ΕΕ.	
	2015	Το προσδόκιμο ζωής στη Λιθουανία κατά τη γέννηση ήταν 73,4 (67,4 έτη για τους άνδρες και 78,8 για τις γυναίκες) και το ποσοστό βρεφικής θνησιμότητας ήταν 6,2 ανά 1.000 γεννήσεις (ιδιαίτερα υψηλό).	

Νορβηγία	1960 - 2020	Η χώρα έχει το τέταρτο υψηλότερο κατά κεφαλή εισόδημα στον κόσμο, κατά την Παγκόσμια Τράπεζα και το ΔΝΤ.	ϑ: στο μέσο όρο τα ποσοστά βρεφικής θνησιμότητας ξ: χαμηλά τα ποσοστά γήρανσης κ: υψηλός ο ατομικός παράγοντας κινδύνου λ: χαμηλά τα ποσοστά θνησιμότητας της χώρας ως προς την αντιμετώπιση του τυχαίου κινδύνου για το σύνολο του πληθυσμού στην ΕΕ
	1990 - 2020	Η ιδιαιτερότητα της χώρας άγεται στους πολλούς μετανάστες από άλλες χώρες που έχουν εγκατασταθεί στην περιοχή, ίσως αυτός είναι και ο λόγος της ασταθούς συμπεριφοράς στην ατομική θνησιμότητα	
Ολλανδία	1960 - 2020	Διαθέτει ένα καλά οργανωμένο οικονομικό σύστημα. Είναι χώρα με έντονες μεταναστευτικές ροές. Ο πληθυσμός της γηράσκει με αργούς ρυθμούς. Είναι μια φιλελεύθερη χώρα με έντονη ατομική ελευθερία που δεν καταλήγει όλα τα χρόνια σε χαμηλές τιμές της παραμέτρου κ	ϑ: στο μέσο όρο τα ποσοστά βρεφικής θνησιμότητας ξ: μέτρια προς υψηλά τα ποσοστά γήρανσης κ: υψηλός ο ατομικός παράγοντας κινδύνου λ: χαμηλά τα ποσοστά θνησιμότητας της χώρας ως προς την αντιμετώπιση του τυχαίου κινδύνου για το σύνολο του πληθυσμού στην ΕΕ
Πολωνία	1960 - 2020	Οι κομματικές διενέξεις στο εσωτερικό της, η δικτατορική διακυβέρνηση και οι συνεχείς απειλές από το εξωτερικό, και ιδιαίτερα από την Ναζιστική Γερμανία και την Σοβιετική Ένωση, δεν επέτρεψαν την ανάπτυξη του κράτους ως το 1990. Πρόκειται για μια δημογραφικά ασταθή χώρα κυρίως ως το 2000.	ϑ: υψηλά τα ποσοστά βρεφικής θνησιμότητας ξ: χαμηλά τα ποσοστά γήρανσης κ: υψηλός ο ατομικός παράγοντας κινδύνου λ: στο μέσο όρο τα ποσοστά θνησιμότητας της χώρας ως προς την αντιμετώπιση του τυχαίου κινδύνου για το σύνολο του πληθυσμού στην ΕΕ
Πορτογαλία	1960 - 2000	Η είσοδος στον 20ο αιώνα σημαδεύεται από οικονομική αστάθεια που έχει πολλαπλές συνέπειες τόσο στην πολιτική όσο και στην κοινωνική ζωή της χώρας: πολιτικές ταραχές, αναστατώσεις και στις ένοπλες δυνάμεις, εξάρτηση από ξένα οικονομικά κέντρα και μεγάλο μεταναστευτικό ρεύμα προς την Αμερική και τις Αφρικανικές αποικίες.	ϑ: πολύ υψηλά τα ποσοστά βρεφικής θνησιμότητας ξ: πολύ υψηλά τα ποσοστά γήρανσης κ: μέτριος προς υψηλός ο ατομικός παράγοντας κινδύνου λ: πολύ υψηλά τα ποσοστά θνησιμότητας της χώρας ως προς την αντιμετώπιση του τυχαίου κινδύνου
	2010 - 2015	Μεγάλη οικονομική ύφεση	

			για το σύνολο του πληθυσμού στην ΕΕ
Σουηδία	1960 - 2020	Έχει υψηλό βιοτικό επίπεδο και η χώρα γενικά θεωρείται σύγχρονη, πολιτικά φιλελεύθερη και με ισχυρό κοινωνικό κράτος. Κατατάσσεται υψηλά σε πολλές μετρήσεις εθνικών επιδόσεων, συμπεριλαμβανομένης της ποιότητας ζωής, της υγείας, της εκπαίδευσης, της προστασίας των πολιτικών ελευθεριών, της οικονομικής ανταγωνιστικότητας, της ισότητας, της ευημερίας και της ανθρώπινης ανάπτυξης.	*ϑ:* χαμηλά τα ποσοστά βρεφικής θνησιμότητας *ξ:* στο μέσο όρο τα ποσοστά γήρανσης *κ:* χαμηλός ο ατομικός παράγοντας κινδύνου *λ:* στο μέσο όρο τα ποσοστά θνησιμότητας της χώρας ως προς την αντιμετώπιση του τυχαίου κινδύνου για το σύνολο του πληθυσμού στην ΕΕ
Τσεχία	1990	Επικρατούν έντονες κοινωνικές ταραχές και αλλαγές, ενώ μετά ακολούθησε η διάλυση της Τσεχοσλοβακίας σε δύο κράτη	*ϑ:* μέτρια προς υψηλά τα ποσοστά βρεφικής θνησιμότητας *ξ:* μέτρια προς υψηλά τα ποσοστά γήρανσης *κ:* πολύ υψηλός ο ατομικός παράγοντας κινδύνου *λ:* χαμηλά τα ποσοστά θνησιμότητας της χώρας ως προς την αντιμετώπιση του τυχαίου κινδύνου για το σύνολο του πληθυσμού στην ΕΕ
Φινλανδία	1980 - 2000	Η χώρα γνώρισε παρατεταμένους μεγάλους ρυθμούς ανάπτυξης κυρίως λόγω της βιομηχανίας της.	*ϑ:* πολύ χαμηλά τα ποσοστά βρεφικής θνησιμότητας *ξ:* στο μέσο όρο τα ποσοστά γήρανσης *κ:* αυξομειώνεται συνεχώς ο ατομικός παράγοντας κινδύνου *λ:* στο μέσο όρο τα ποσοστά θνησιμότητας της χώρας ως προς την αντιμετώπιση του τυχαίου κινδύνου για το σύνολο του πληθυσμού στην ΕΕ
	2000 - 2010	Υψηλά ποσοστά κατάθλιψης εμφάνισαν οι νέοι σύμφωνα με στατιστικά της Eurostat	

Πίνακας 26. Χρονική αποτύπωση των γεγονότων που μπορεί να επηρέασαν την βρεφική θνησιμότητα, το ποσοστό γήρανσης, τον τυχαίο παράγοντα κινδύνου σε ατομικό επίπεδο και σε συλλογικό επίπεδο για την κάθε χώρα από το 1960 έως το 2020.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ανδρεόπουλος, Π. ΧΩΡΙΚΑ ΚΡΥΜΜΕΝΑ ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΑ ΜΟΝΤΕΛΑ POISSON, ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΗ ΧΑΡΤΟΓΡΑΦΗΣΗ ΑΣΘΕΝΕΙΩΝ, 1ο Συνέδριο Χωρικής Ανάλυσης: Πρακτικά, Αθήνα, 2013, Σ. Καλογήρου (Επ.) ISBN: 978-960-86818-6-6

Ανδρεόπουλος Π., Μπερσίμης Φ., (2016) *'Ανάπτυξη Πιθανοθεωρητικών κατανομών από Μαθηματικά μοντέλα Θνησιμότητας'*, Πρακτικά του 33ου Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας - ΕΜΕ, Χανιά (Κρήτη), Ελλάδα

Καλογήρου, Σ. (2015). Χωρική Ανάλυση. *Σύλλογος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Ζωγράφου*. https://repository.kallipos.gr/bitstream/11419/5029/1/00_master_document-KOY.pdf

Κολυβά Μαχαίρα, Φ., & Χατζόπουλος, Σ. (2015). Μαθηματική στατιστική.

Παπαδάκης, Μ., & Τσίμπος, Κ. (2004). Δημογραφική Ανάλυση: Αρχές-Μέθοδοι-Υποδείγματα. *Αθήνα: Εκδόσεις Σταμούλης Αθ*.

Παπαϊωάννου, Τ., & Φερεντίνος, Κ. (2000). Ιατρική Στατιστική και Στοιχεία Βιομαθηματικών. *Αθήνα, Εκδόσεις" Αθ. Σταμούλης ΑΕ*.

Παπάς, Α. (2004). Εισαγωγή στη χρηματοοικονομική λογιστική. *Εκδόσεις Μπένου, Αθήνα*.

Σπύρου, Σ. (2009). Εισαγωγή στη Συμπεριφορική Χρηματοοικονομική. Κεφαλαιαγορές και επενδυτική ψυχολογία. *Εκδ. Γ. Μπένου*.

Τραγάκη, Α., Μπάγκαβος, Χ., & Ντούνας, Δ. (2015). Περί Δημογραφίας και Πληθυσμιακών Εξελίξεων. *Σύλλογος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Ζωγράφου*. https://repository.kallipos.gr/bitstream/11419/4670/1/15123_%CE%A0%CE%B5%CF%81%CE%AF_%CE%94%CE%B7%CE%BC%CE%BF%CE%B3%CF%81%CE%B1%CF%86%CE%AF%CE%B1%CF%82.pdf

ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ahmad, O. B., Boschi-Pinto, C., Lopez, A. D., Murray, C. J., Lozano, R., & Inoue, M. (2001). Age standardization of rates: a new WHO standard. *Geneva: World Health Organization*, *9*, 10.

Akaikei, H. (1973). Information theory and an extension of maximum likelihood principle. In *Proc. 2nd Int. Symp. on Information Theory* (pp. 267-281).

Akinsete, A., Famoye, F., & Lee, C. (2008). The beta-Pareto distribution. *Statistics*, *42*(6), 547-563.

Amemiya, T. (1985). *Advanced econometrics*. Harvard university press.

Andreopoulos P. and Bersimis G. F. (2015) "Mortality Modelling Using Probability Distributions." *SCinTE* 1: 189.

Andreopoulos P., Tragaki A., Bersimis F. (2018) *'New distributions to Mortality modelling: A different approach'*, Proceedings of 5th Stochastic Modeling Techniques and Data Analysis International Conference with Demographics Workshop, Chania, Crete, Greece

Andreopoulos, P., Bersimis, G. F., Tragaki, A., & Rovolis, A. (2019). Mortality modeling using probability distributions. Application in Greek mortality data. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, *48*(1), 127-140.

Andreopoulos, P., & Tragaki, A. (2020). On Demographic Approach of the BGGM Distribution Parameters on Italy and Sweden. In *Demography of Population Health, Aging and Health Expenditures* (pp. 169-185). Springer, Cham.

Armstrong, J. S. (1985). *Long-range forecasting* (p. 65). New York ETC.: Wiley.

Atance, D., Debón, A., & Navarro, E. (2020). A Comparison of Forecasting Mortality Models Using Resampling Methods. *Mathematics*, *8*(9), 1550.

Avraam, D., de Magalhaes, J. P., & Vasiev, B. (2013). A mathematical model of mortality dynamics across the lifespan combining heterogeneity and stochastic effects. *Experimental gerontology*, *48*(8), 801-811.

Bailey, T. C., & Gatrell, A. C. (1995). *Interactive spatial data analysis* (Vol. 413). Essex: Longman Scientific & Technical.

Ballester, J., Robine, J. M., Herrmann, F. R., & Rodó, X. (2019). Effect of the Great Recession on regional mortality trends in Europe. *Nature communications*, *10*(1), 1-9.

Barbi, E., Lagona, F., Marsili, M., Vaupel, J. W., & Wachter, K. W. (2018). The plateau of human mortality: Demography of longevity pioneers. *Science*, *360*(6396), 1459-1461.

Barreto-Souza, W., Cordeiro, G. M., & Simas, A. B. (2011). Some results for beta Fréchet distribution. *Communications in Statistics—Theory and Methods*, *40*(5), 798-811.

Booth, H., & Tickle, L. (2008). Mortality modelling and forecasting: A review of methods. *Annals of actuarial science*, *3*(1-2), 3-43.

Breslow, N. (1970). A generalized Kruskal-Wallis test for comparing K samples subject to unequal patterns of censorship. *Biometrika*, *57*(3), 579-594.

Breslow, N. E. (1975). Analysis of survival data under the proportional hazards model. *International Statistical Review/Revue Internationale de Statistique*, 45-57.

Bronikowski, A. M., & Flatt, T. (2010). Aging and its demographic measurement. *Nature Education Knowledge*, *3*(3).

Brown, R. L. (1997). *Issues in the modeling of mortality at advanced ages*. Research Report 97-05, Institute of Insurance and Pension Research, University of Waterloo, Ontario, Canada.

Burnham, K. P., & Anderson, D. R. (2003). *Model selection and multimodel inference: a practical information-theoretic approach*. Springer Science & Business Media.

Cairns, A. J. (2000). A discussion of parameter and model uncertainty in insurance. *Insurance: Mathematics and Economics*, *27*(3), 313-330.

Campbell, S. L., & Meyer, C. D. (2009). *Generalized inverses of linear transformations*. Society for industrial and applied Mathematics.

Carinci, F., Uccioli, L., Benedetti, M. M., & Klazinga, N. S. (2020). An in-depth assessment of diabetes-related lower extremity amputation rates 2000–2013 delivered by twenty-one countries for the data collection 2015 of the Organization for Economic Cooperation and Development (OECD). *Acta Diabetologica*, *57*(3), 347-357.

Castellares, F., & Lemonte, A. J. (2019). On the moments of the generalized Gompertz distribution. *Applied Mathematical Modelling*.

Chalkias, C., Papadopoulos, A. G., Kalogeropoulos, K., Tambalis, K., Psarra, G., & Sidossis, L. (2013). Geographical heterogeneity of the relationship between childhood obesity and socio-environmental status: Empirical evidence from Athens, Greece. *Applied Geography*, *37*, 34-43.

Christensen, K., Doblhammer, G., Rau, R., & Vaupel, J. W. (2009). Ageing populations: the challenges ahead. *The lancet*, *374*(9696), 1196-1208.

Chukwu, A. U., & Ogunde, A. A. (2015). On the beta Makeham distribution and Its applications. *American Journal of Mathematics and Statistics*, *5*(3), 137-143.

Ciecka, J. E. (2008). Edmond Halley's life table and its uses. *J. Legal Econ.*, *15*, 65.

Cliff, A. D., & Haggett, P. (1996). The impact of GIS on epidemiological mapping and modelling. *Spatial analysis: modelling in a GIS environment*, 321-343.

Congdon, P. (2007). *Bayesian statistical modelling* (Vol. 704). John Wiley & Sons.

Currie, I. D., Durban, M., & Eilers, P. H. (2004). Smoothing and forecasting mortality rates. *Statistical modelling*, *4*(4), 279-298.

De Beer, J., & Janssen, F. (2016). A new parametric model to assess delay and compression of mortality. *Population Health Metrics*, *14*(1), 46.

Dellaportas, P., Smith, A. F., & Stavropoulos, P. (2001). Bayesian analysis of mortality data. *Journal of the Royal Statistical Society: Series A (Statistics in Society)*, *164*(2), 275-291.

De Moivre, A. (1725). *Annuities Upon Lives: Or, The Valuation of Annuities Upon Any Number of Lives...* NewsBank Readex.

Domnich, A., Panatto, D., Gasparini, R., & Amicizia, D. (2012). The "healthy immigrant" effect: does it exist in Europe today?. *Italian Journal of Public Health*, *9*(3).

Drevenstedt, G. L., Crimmins, E. M., Vasunilashorn, S., & Finch, C. E. (2008). The rise and fall of excess male infant mortality. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *105*(13), 5016-5021.

Duquenne, M. N. (2014). Returning in rurality: the demographical impacts of the Greek crisis. *Région et Développement*, (39), 205-224.

Eilers, P. H., & Marx, B. D. (1996). Flexible smoothing with B-splines and penalties. *Statistical science*, 89-102.

Elandt-Johnson, R. C. (1980). Incomplete mortality data: follow-up studies. *Survival models and data analysis*, 150-180.

Elandt-Johnson, R. C., & Johnson, N. L. (1999). *Survival models and data analysis* (Vol. 74). John Wiley & Sons.

Elliott, P., & Wartenberg, D. (2004). Spatial epidemiology: current approaches and future challenges. *Environmental health perspectives*, *112*(9), 998-1006.

Eurostat (2019a). Population data. European statistical authority. Retrieved 26 November 2019, from https://ec.europa.eu/eurostat/

Eurostat (2019b). Vector layer of European countries. European statistical authority. Retrieved 26 November 2019, from https://ec.europa.eu/eurostat/

Finkelstein, M. (2012). Discussing the Strehler-Mildvan model of mortality. *Demographic Research*, *26*, 191-206.

Flores, B. E. (1986). A pragmatic view of accuracy measurement in forecasting. *Omega*, *14*(2), 93-98.

Forte, R. M. (2015). *Mastering predictive analytics with R*. Packt Publishing Ltd.

Fotheringham, A. S., Brunsdon, C., & Charlton, M. (2000). *Quantitative geography: perspectives on spatial data analysis*. Sage.

Franses, P. H. (2016). A note on the mean absolute scaled error. *International Journal of Forecasting*, *32*(1), 20-22.

Gavrilov, L. A., & Gavrilova, N. S. (1991). *The Biology of Life Span: A Quantitative Approach*. New York: Harwood Academic

Gavrilov, L. A., & Gavrilova, N. S. (2003). The quest for a general theory of aging and longevity. *Science's SAGE KE*, *2003*(28), 5.

Gavrilov, L. A., & Gavrilova, N. S. (2011). Mortality measurement at advanced ages: a study of the Social Security Administration Death Master File. *North American actuarial journal*, *15*(3), 432-447.

Gavrilov, L. A., & Gavrilova, N. S. (2019). New trend in old-age mortality: Gompertzialization of mortality trajectory. *Gerontology*, *65*(5), 451-457.

Glass, G. E., Schwartz, B. S., Morgan III, J. M., Johnson, D. T., Noy, P. M., & Israel, E. (1995). Environmental risk factors for Lyme disease identified with geographic information systems. *American journal of public health*, *85*(7), 944-948.

Gompertz, B. (1825). XXIV. On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of life contingencies. In a letter to Francis Baily, Esq. FRS &c. *Philosophical transactions of the Royal Society of London*, *115*, 513-583.

Gupta, A. K., & Nadarajah, S. (Eds.). (2004). *Handbook of beta distribution and its applications*. CRC press.

Haberman, S. (1998). Actuarial Methods, *Encyclopedia of Biostatistics*, 1, (P. Armitage and T. Colton (Eds.), 37–49, John Wiley & Sons, New York.

Haberman, S., & Pitacco, E. (1998). *Actuarial models for disability insurance*. CRC Press.

Hagget, P. (2000). a new combination of geography, Volume II, Translated by Sh. *Goodarzinajad, Samat Publication*.

Hatzopoulos, P. (1997). *Statistical and mathematical modelling for mortality trends and the comparison of mortality experiences, through generalised linear models and GLIM* (Doctoral dissertation, City University).

Hayflick, L. (1965). The limited in vitro lifetime of human diploid cell strains. *Experimental cell research*, *37*(3), 614-636.

Heligman, L., & Pollard, J. H. (1980). The age pattern of mortality. *Journal of the Institute of Actuaries*, *107*(1), 49-80.

HMD (2019). Mortality and population data. Human Mortality Database. Retrieved 26 November 2019, from http://www.mortality.org/

Horiuchi, S., & Coale, A. J. (1990). Age patterns of mortality for older women: An analysis using the age-specific rate of mortality change with age. *Mathematical population studies*, *2*(4), 245-267.

Horiuchi, S., & Wilmoth, J. R. (1998). Deceleration in the age pattern of mortality at olderages. *Demography*, *35*(4), 391-412.

Hyndman, R. J., & Koehler, A. B. (2006). Another look at measures of forecast accuracy. *International journal of forecasting*, *22*(4), 679-688.

Irwin, J. O. (1939). The biostatistics of senility. *Human Biology*, *11*(1), 1-23.

Jafari, A. A., Tahmasebi, S., & Alizadeh, M. (2014). The beta-Gompertz distribution. *Revista Colombiana de Estadística*, *37*(1), 141-158.

Jones, M. C. (2004). Families of distributions arising from distributions of order statistics. *Test*, *13*(1), 1-43.

Jones, D. R. (2013). Mathematical Analysis of Mortality Dynamics.

Johnson, N. L., Kotz, S., & Balakrishnan, N. (1995). Continuous univariate distributions, vol. 2 of wiley series in probability and mathematical statistics: applied probability and statistics.

Johnston, R. J., Gregory, D., Pratt, G., & Watts, M. (2000). *The Dictionary of Human Geography. ed*. Oxford, UK: Blackwell Publishers.

Kalogirou, S. (2003). The statistical analysis and modelling of internal migration flows within England and Wales.

Kaa, D. J. (1987). Europe's second demographic transition: Population bulletin.

Keyfitz, N., & Caswell, H. (2005). *Applied mathematical demography* (Vol. 47). New York: Springer.

Kohler, H. P., & Kohler, I. (2002). Fertility decline in Russia in the early and mid 1990s: The role of economic uncertainty and labour market crises. *European Journal of Population/Revue européenne de Démographie*, *18*(3), 233-262.

Kostaki, A., & Zafeiris, K. N. (2019). Dealing with limitations of empirical mortality data in small populations. *Communications in Statistics: Case Studies, Data Analysis and Applications*, *5*(1), 39-45.

Kruger, D. J., & Nesse, R. M. (2006). An evolutionary life-history framework for understanding sex differences in human mortality rates. *Human nature*, *17*(1), 74-97.

Kullback, S. (1959). Statistics and Information theory. *J Wiley Sons, New York*.

Lafaut, D., Vandenheede, H., Surkyn, J., & Coene, G. (2019). Counting the non-existing: causes of death of undocumented migrants in Brussels-Capital Region (Belgium), 2005–2010. *Archives of Public Health*, *77*(1), 42.

Laliotis, I., Ioannidis, J. P., & Stavropoulou, C. (2016). Total and cause-specific mortality before and after the onset of the Greek economic crisis: an interrupted time-series analysis. *The Lancet Public Health*, *1*(2), e56-e65.

Lawless, J. F. (2011). *Statistical models and methods for lifetime data* (Vol. 362). John Wiley & Sons.

Lawson, A. B. (2013). *Bayesian disease mapping: hierarchical modeling in spatial epidemiology*. Chapman and Hall/CRC.

Ledberg, A. (2020). Exponential increase in mortality with age is a generic property of a simple model system of damage accumulation and death. *PloS one*, *15*(6), e0233384.

Lehmann, E. L., & Casella, G. (2006). *Theory of point estimation*. Springer Science & Business Media.

Lenart, P., Kuruczova, D., Joshi, P. K., & Bienertová-Vašků, J. (2019). Male mortality rates mirror mortality rates of older females. *Scientific reports*, *9*(1), 1-9.

Lexis, W. H. R. A. (1879). *Sur la durée normale de la vie humaine et sur la théorie de la stabilité des rapports statistiques*. Vve. F. Henry.

Li, N., & Lee, R. (2005). Coherent mortality forecasts for a group of populations: An extension of the Lee-Carter method. *Demography*, *42*(3), 575-594.

Lenart, P., Kuruczova, D., Joshi, P. K., & Bienertová-Vašků, J. (2019). Male mortality rates mirror mortality rates of older females. *Scientific reports*, *9*(1), 1-9.

London, D. (1985). *Graduation, the revision of estimates*. Actex publications.

Lytrokapi, A. (1998). *Parametric Models of Mortality: Their use in Demography and Actuarial Science*, MSc Dissertation, Athens University of Economics and Business, Department of Statistics, Athens, Greece.

Makeham, W. M. (1860). On the law of mortality and construction of annuity tables. *Journal of the Institute of Actuaries*, *8*(6), 301-310.

Mandelbrot, B. (1967). How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension. *science*, *156*(3775), 636-638.

Manton, K. G., Akushevich, I., & Kulminski, A. (2008). Human mortality at extreme ages: data from the NLTCS and linked Medicare records. *Mathematical Population Studies*, *15*(3), 137-159.

McFadden, D. (1977). *Quantitative methods for analyzing travel behavior of individuals: some recent developments*. Institute of Transportation Studies, University of California.

Miller, M. D. (1949). *Elements of graduation* (No. 1). Actuarial Society of America and American Institute of Actuaries.

Murray, C. J., Lopez, A. D., Chin, B., Feehan, D., & Hill, K. H. (2006). Estimation of potential global pandemic influenza mortality on the basis of vital registry data from the 1918–20 pandemic: a quantitative analysis. *The Lancet*, *368*(9554), 2211-2218.

Myung, I. J. (2003). Tutorial on maximum likelihood estimation. *Journal of mathematical Psychology*, *47*(1), 90-100.

Nadarajah, S., & Kotz, S. (2004). The beta Gumbel distribution. *Mathematical Problems in engineering*, *2004*(4), 323-332.

Nadarajah, S., & Kotz, S. (2006). The beta exponential distribution. *Reliability engineering & system safety*, *91*(6), 689-697.

Neath, A. A., & Cavanaugh, J. E. (2012). The Bayesian information criterion: background, derivation, and applications. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics*, *4*(2), 199-203.

Oksuzyan, A., Juel, K., Vaupel, J. W., & Christensen, K. (2008). Men: good health and high mortality. Sex differences in health and aging. *Aging clinical and experimental research*, *20*(2), 91-102.

Olshansky, S. J., & Ault, A. B. (1986). The fourth stage of the epidemiologic transition: the age of delayed degenerative diseases. *The Milbank Quarterly*, 355-391.

Omran, A. R. (2005). The epidemiologic transition: a theory of the epidemiology of population change. *The Milbank Quarterly*, *83*(4), 731-757.

Openshaw, S., Charlton, M., Wymer, C., & Craft, A. (1987). A mark 1 geographical analysis machine for the automated analysis of point data sets. *International Journal of Geographical Information System*, *1*(4), 335-358.

Papaioannou, T. (1985). Measures of information. *Encyclopedia of statistical sciences*.

Papaioannou, T. (2001). On distances and measures of information: a case of diversity. *Probability and Statistical Models with applications*, 503-515.

Papaioannou, T., & Sachlas, A. (2004). Graduation of mortality rates revisited. *University of*.

Pearson, K. (1897). *The chances of death, and other studies in evolution*. CUP Archive.

Pletcher, S. D. (1999). Model fitting and hypothesis testing for age-specific mortality data. *Journal of Evolutionary Biology*, *12*(3), 430-439.

Pollard, J. H. (1987). Projection of age-specific mortality rates. *Population Bulletin of the United Nations*, (21/22), 55-69.

Pollard, J. H. (1996). On the changing shape of the Australian mortality curve. *Health Transition Review*, 283-300.

Powell, T., & Sammut-Bonnici, T. (2015). Pareto analysis. *Wiley Encyclopedia of Management*, 1-2.

Proschan, F. (1963). Theoretical explanation of observed decreasing failure rate. *Technometrics*, *5*(3), 375-383.

Renshaw, A. E., Haberman, S., & Hatzopoulos, P. (1996). On the duality of assumptions underpinning the construction of life tables. *Insurance Mathematics and Economics*, *2*(18), 136.

Robine, J. M. (2001). Redefining the stages of the epidemiological transition by a study of the dispersion of life spans: The case of France. *Population: An English Selection*, 173-193.

Rorres, C., & Howard, A. Applications of Linear Algebra 3ed. 1984 New York.

Rose, M. R. (1991). *Evolutionary biology of aging*. Oxford University Press on Demand.

Rovolis, A., & Tragaki, A. (2006). Ethnic characteristics and geographical distribution of immigrants in Greece. *European Urban and Regional Studies*, *13*(2), 99-111.

Rychtaříková, J. (2000). Demographic transition or demographic shock in recent population development in the Czech Republic?. *Acta Universitatis Carolinae. Geographica*, *35*(1), 89-102.

Schwarz, G. (1978). Estimating the dimension of a model. *The annals of statistics*, *6*(2), 461-464.

Shannon, C. E. (2001). A mathematical theory of communication. *ACM SIGMOBILE mobile computing and communications review*, *5*(1), 3-55.

Skiadas, C. H., & Skiadas, C. (2007). A Modeling Approach to Life Table Data Sets. *In Recent advances in stochastic modeling and data analysis* (pp. 350-359).

Snow, J. (1854). The cholera near Golden-square, and at Deptford. *Medical Times and Gazette*, *9*, 321-322.

Team, R. C. (2013). R: A language and environment for statistical computing.

Tomlin, C. D. (1990). *Geographic information systems and cartographic modeling* (No. 526.0285 T659). Prentice Hall.

Tragaki, A., & Rovolis, A. (2014). Immigrant population in Italy during the first decade of the 21st century: changing demographics and modified settlement patterns. *European Urban and Regional Studies*, *21*(3), 286-300.

Tragaki, A., & Panagiotakos, D. (2018). Population ageing and cardiovascular health: the case of Greece. *Hellenic journal of cardiology: HJC= Hellenike kardiologike epitheorese*.

Tsimbos, C., Kalogirou, S., & Verropoulou, G. (2014). Estimating spatial differentials in life expectancy in Greece at local authority level. *Population, Space and Place*, *20*(7), 646-663.

UN Revision of World Population Prospects (2017) (Accessed via *https://esa.un.org/unpd/wpp/Download/Standard/Population on November 17, 2017*).

Unwin, D. J. (1981). *Introductory spatial analysis* (Vol. 748). Taylor & Francis.

Van Bavel, J., & Reher, D. S. (2013). The baby boom and its causes: What we know and what we need to know. *Population and Development Review*, *39*(2), 257-288.

Van de Kaa, D. J. (1987). Europe's second demographic transition. *Population bulletin*, *42*(1), 1-59.

Van Elsuwege, P. (2003). State continuity and its consequences: the case of the Baltic States. *Leiden Journal of International Law*, *16*(2), 377-388.

Vassilev, R. (2005). Bulgaria's demographic crisis: Underlying causes and some short-term implications. *Southeast European Politics*, *6*(1), 14-27.

Vaupel, J. W. (2005). Lifesaving, lifetimes and lifetables. Demographic Research, 13, 597-614.

Vaupel, J. W. (2010). Biodemography of human ageing. *Nature*, *464*(7288), 536.

Venter, G. (1983). Transformed beta and gamma distributions and aggregate losses. In *Proceedings of the Casualty Actuarial Society* (Vol. 70, No. 133, pp. 156-193).

Wakefield, J. (2006). Disease mapping and spatial regression with count data. *Biostatistics*, *8*(2), 158-183.

Wachter, K. W. (1999). Evolutionary demographic models for mortality plateaus. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *96*(18), 10544-10547.

Wasserman, D., Cheng, Q. I., & Jiang, G. X. (2005). Global suicide rates among young people aged 15-19. *World psychiatry*, *4*(2), 114.

Wilmoth, J. R., Deegan, L. J., Lundström, H., & Horiuchi, S. (2000). Increase of maximum life-span in Sweden, 1861-1999. *Science*, *289*(5488), 2366-2368.

Wilson, D. L. (1993). A comparison of methods for estimating mortality parameters from survival data. *Mechanisms of ageing and development*, *66*(3), 269-281.

World Health Organization. (2014). Trends in maternal mortality: 1990 to 2013: estimates by WHO, UNICEF, UNFPA, The World Bank and the United Nations Population Division.

Wrigley-Field, E. (2014). Mortality deceleration and mortality selection: Three unexpected implications of a simple model. *Demography*, *51*(1), 51-71.

Wynder, E. L. (1975). A corner of history: John Graunt, 1620-1674, the father of demography. *Preventive medicine*, *4*(1), 85-88.

Yashin, A. I., Iachine, I. A., & Begun, A. S. (2000). Mortality modeling: A review. *Mathematical Population Studies*, *8*(4), 305-332.

Yen, K., Steinsaltz, D., & Mobbs, C. V. (2008). Validated analysis of mortality rates demonstrates distinct genetic mechanisms that influence lifespan. *Experimental gerontology*, *43*(12), 1044-1051.

Zafeiris, K. N. (2019). Mortality differentials among the euro-zone countries: An analysis based on the most recent available data. *Communications in Statistics: Case Studies, Data Analysis and Applications*, *5*(1), 59-73.

Zografos, K., & Balakrishnan, N. (2009). On families of beta-and generalized gamma-generated distributions and associated inference. *Statistical Methodology*, *6*(4), 344-362.

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΕΣ – ΔΙΑΔΙΚΤΥΑΚΕΣ ΠΗΓΕΣ

- https://www.r-project.org/
- https://esa.un.org/unpd/wpp/Download/Standard/Population
- https://www.mortality.org/
- http://www.statistics.gr
- http://ec.europa.eu/eurostat
- http://www.nabla.hr/Index.htm
- https://www.who.int/data/gho (Παγκόσμιος Οργανισμός Υγείας WHO, Προσδόκιμο ζωής και υγιές προσδόκιμο ζωής, Δεδομένα ανά χώρα [2020])

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α’

Το στατιστικό πακέτο της R

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ $A_{\text{BGGM distribution}}$

Ο αντίστοιχος κώδικας σε περιβάλλον R, σε αναλυτική μορφή για την κάθε μία περίπτωση του κεφαλαίου 4 που εξετάστηκε, καθώς και οι αντίστοιχες τιμές και συναρτήσεις της BGGM κατανομής, βρίσκονται στο παρόν παράρτημα υπό τον τίτλο $A_{\text{BGGM distribution}}$.

```
h_x<-function(x,theta,xi,lamda,k,a,b){
hx<- ((k/2)*(x^2)+lamda*x+(theta/xi)*(exp(xi*x)-1) )*(x>0)
return(hx)
}
#_____________________________________________________
dh_x<-function(x,theta,xi,lamda,k,a,b){
dhx<-(k*x+lamda+theta*(exp(xi*x)))*(x>0)
return(dhx)
}
#_____________________________________________________
f_x<-function(x,theta,xi,lamda,k,a,b){
fx<-dh_x(x,theta,xi,lamda,k,a,b)*exp(-
h_x(x,theta,xi,lamda,k,a,b))*(x>0)
return(fx)
}
#_____________________________________________________
F_x<-function(x,theta,xi,lamda,k,a,b){
Fx<- 1-exp(-h_x(x,theta,xi,lamda,k,a,b) )
return(Fx)
}
#_____________________________________________________
f_BGGM<-function(x,theta,xi,lamda,k,a,b){  #g_1(x)
x_0<-x>0
f.BGGM<-NULL
f.BGGM[!x_0]<-0
dhx<-dh_x(x[x_0],theta,xi,lamda,k,a,b)
hx<-  h_x(x[x_0],theta,xi,lamda,k,a,b)
f.BGGM[x_0]<- dhx/beta(a,b)*(1-exp(-hx))^(a-1)*(exp(-hx))^b
return(f.BGGM)
}
```

```
####### Περίπτωση όπου το x-> 0+ ##############################
#------1st

a<-1
b<-0.01
theta<-0.5
lamda<-0.5
xx<-c(seq(-10,-0.00001,by=0.4),seq(-
0.00001,0.0002,by=0.000000001),seq(0.0002,150,by=0.5) )
fBGGM<-NULL
fBGGM<-f_BGGM(xx,theta,xi,lamda,k,a,b)
plot(xx[xx<=0],fBGGM[xx<=0],'l',xlab='x
years',ylab='PROBABILITY',xlim=c(min(xx),max(xx)),ylim=c(0,max(fBGGM)
))
lines(xx[xx>0],fBGGM[xx>0],'l')
mtext("lim (f_BGGM(x)) , x->0 ",line=1 , cex = 1.5)
     text(100,0.02,paste("(θ+λ)/beta(a,b) =
",(theta+lamda)/beta(a,b)),cex= 1)#
     text(100,0.02,paste("(theta+lamda)/beta(a,b) =
",(theta+lamda)/beta(a,b)),cex= 1)
     text(100,0.04,paste("θ = ",theta) ,cex= 1)#
text(100,0.04,paste("theta = ",theta) ,cex= 1)
     text(100,0.035,paste("λ = ", lamda),cex= 1)#
text(100,0.035,paste("lamda = ", lamda),cex= 1)
     text(100,0.030,paste("a = ", a),cex= 1)
     text(100,0.025,paste("b = ", b),cex= 1)
(theta+lamda)/beta(a,b)

#------2nd
a<-1
b<-0.01
theta<-0.3
lamda<-0.2
xx<-c(seq(-10,-0.00001,by=0.4),seq(-
0.00001,0.0002,by=0.000000001),seq(0.0002,150,by=0.5) )
fBGGM<-NULL
fBGGM<-f_BGGM(xx,theta,xi,lamda,k,a,b)
plot(xx[xx<=0],fBGGM[xx<=0],'l',xlab='x
years',ylab='PROBABILITY',xlim=c(min(xx),max(xx)),ylim=c(0,max(fBGGM)
))
lines(xx[xx>0],fBGGM[xx>0],'l')
mtext("lim (f_BGGM(x)) , x->0 ",line=1 , cex = 1.5)
     text(100,0.02,paste("(θ+λ)/beta(a,b) =
",(theta+lamda)/beta(a,b)),cex= 1)
     text(100,0.04,paste("θ = ",theta) ,cex= 1)
     text(100,0.035,paste("λ = ", lamda),cex= 1)
     text(100,0.030,paste("a = ", a),cex= 1)
     text(100,0.025,paste("b = ", b),cex= 1)
(theta+lamda)/beta(a,b)
```

```
#------3rd
a<-1
theta<-3
lamda<-2
xx<-c(seq(-10,-0.00001,by=0.4),seq(-
0.00001,0.0002,by=0.000000001),seq(0.0002,150,by=0.5) )
fBGGM<-NULL
fBGGM<-f_BGGM(xx,theta,xi,lamda,k,a,b)
plot(xx[xx<=0],fBGGM[xx<=0],'l',xlab='x
years',ylab='PROBABILITY',xlim=c(min(xx),max(xx)),ylim=c(0,max(fBGGM)
))
lines(xx[xx>0],fBGGM[xx>0],'l')
mtext("lim (f_BGGM(x)) , x->0 ",line=1 , cex = 1.5)
      text(100,0.02,paste("(θ+λ)/beta(a,b) =
",(theta+lamda)/beta(a,b)),cex= 1)
      text(100,0.04,paste("θ = ",theta) ,cex= 1)
      text(100,0.035,paste("λ = ", lamda),cex= 1)
      text(100,0.030,paste("a = ", a),cex= 1)
      text(100,0.025,paste("b = ", b),cex= 1)
(theta+lamda)/beta(a,b)

#------4th
a<-1
theta<-8
lamda<-2
xx<-c(seq(-10,-0.00001,by=0.4),seq(-
0.00001,0.0002,by=0.000000001),seq(0.0002,150,by=0.5) )
fBGGM<-NULL
fBGGM<-f_BGGM(xx,theta,xi,lamda,k,a,b)
plot(xx[xx<=0],fBGGM[xx<=0],'l',xlab='x
years',ylab='PROBABILITY',xlim=c(min(xx),max(xx)),ylim=c(0,max(fBGGM)
))
lines(xx[xx>0],fBGGM[xx>0],'l')
mtext("lim (f_BGGM(x)) , x->0 ",line=1 , cex = 1.5)
      text(100,0.05,paste("(θ+λ)/beta(a,b) =
",(theta+lamda)/beta(a,b)),cex= 1)
      text(100,0.09,paste("θ = ",theta) ,cex= 1)
      text(100,0.08,paste("λ = ", lamda),cex= 1)
      text(100,0.07,paste("a = ", a),cex= 1)
      text(100,0.06,paste("b = ", b),cex= 1)
(theta+lamda)/beta(a,b)
#------5th
a<-0.8
theta<-0.005
lamda<-0.005
xx<-c(seq(-10,-0.00001,by=0.4),seq(-
0.00001,0.0002,by=0.000000001),seq(0.0002,150,by=0.5) )
```

```
fBGGM<-NULL
fBGGM<-f_BGGM(xx,theta,xi,lamda,k,a,b)
plot(xx[xx<=0],fBGGM[xx<=0],'l',xlab='x
years',ylab='PROBABILITY',xlim=c(min(xx),max(xx)),ylim=c(0,max(fBGGM)
))
lines(xx[xx>0],fBGGM[xx>0],'l')
mtext("lim (f_BGGM(x)) , x->0 ",line=1 , cex = 1.5)
     text(100,0.02,paste("(theta+lamda)/beta(a,b) =
",(theta+lamda)/beta(a,b)),cex= 1)
     text(100,0.04,paste("theta = ",theta) ,cex= 1)
     text(100,0.035,paste("lamda = ", lamda),cex= 1)
     text(100,0.030,paste("a = ", a),cex= 1)
     text(100,0.025,paste("b = ", b),cex= 1)
(theta+lamda)/beta(a,b)
```

❖

```
#################################################################
#---------------------------------------------------------------
#                      HAZARD FUNCTION
#---------------------------------------------------------------
#################################################################

Hazard.plots<-function(x,theta,xi,lamda,k,a,b,inone,2){
BETA_G<-pbeta( 1-exp(-h_x(x,theta,xi,lamda,k,a,b)),a,b )
g.1<-f_BGGM(x,theta,xi,lamda,k,a,b)
Hazard.f<-g.1 /(1-BETA_G)
if (inone==FALSE) {plot(x,Hazard.f,'l')
} else { lines(x,Hazard.f,type='l',lty=2)
}
}

#---------------------------------------------------------------
################# 1st PLOT OF HAZART FUNCTION #################
#---------------------------------------------------------------

x<-seq(-10,110,by=0.1)
BETA_G<-pbeta( 1-exp(-h_x(x,0.01,0.002,0.000001,0.0005,4,0.6)),a,b )
g.1<-f_BGGM(x,0.01,0.002,0.000001,0.0005,4,0.6)
Hazard.f<-g.1 /(1-BETA_G)
 plot(x,Hazard.f,'l',lwd=1.2,xlab='years',ylab='h(x)',main='HAZARD
FUNCTION')

BETA_G<-pbeta( 1-exp(-h_x(x,0.01,0.002,0.000001,0.0005,7,2)),a,b )
g.1<-f_BGGM(x,0.01,0.002,0.000001,0.0005,7,2)
```

```
Hazard.f<-g.1 /(1-BETA_G)
 lines(x,Hazard.f,type='l',lty=2,col='orange',lwd=2)

BETA_G<-pbeta( 1-exp(-h_x(x,0.01,0.002,0.01,0.0005,7,2) ),a,b )
g.1<-f_BGGM(x,0.01,0.002,0.01,0.0005,7,2)
Hazard.f<-g.1 /(1-BETA_G)
 lines(x,Hazard.f,type='l',lty=3,col='green',lwd=3)

BETA_G<-pbeta( 1-exp(-h_x(x,0.01,0.05,0.00001,0.00005,10,0.3) ),a,b )
g.1<-f_BGGM(x,0.01,0.05,0.00001,0.00005,10,0.3)
Hazard.f<-g.1 /(1-BETA_G)
 lines(x,Hazard.f,type='l',lty=4,col='blue',lwd=2)

BETA_G<-pbeta( 1-exp(-h_x(x,0.01,0.002,0.000001,0.0005,4,1.2) ),a,b )
g.1<-f_BGGM(x,0.01,0.002,0.000001,0.0005,4,1.2)
Hazard.f<-g.1 /(1-BETA_G)
 lines(x,Hazard.f,type='l',lty=5,col='red',lwd=2)
abline(0,0)


#-----------------------------------------------------------------
################## 2nd PLOT OF HAZART FUNCTION #################
#-----------------------------------------------------------------

BETA_G<-pbeta( 1-exp(-h_x(x,0.0001,0.003,0.005,0.0005,0.8,1.8)),a,b )
g.1<-f_BGGM(x,0.0001,0.003,0.005,0.0005,0.8,1.8)
Hazard.f<-g.1 /(1-BETA_G)
 plot(x,Hazard.f,'l',lwd=1.4,xlab='years',ylab='h(x)',main='HAZARD
FUNCTION')

BETA_G<-pbeta( 1-exp(-h_x(x,0.0001,0.008,0.0001,0.0003,0.6,1.2)),a,b
)
g.1<-f_BGGM(x,0.0001,0.008,0.0001,0.0003,0.6,1.2)
Hazard.f<-g.1 /(1-BETA_G)
 lines(x,Hazard.f,type='l',lty=2,lwd=2,col='red')

BETA_G<-pbeta( 1-exp(-h_x(x,0.0004,0.002,0.000001,0.0005,3.2,1.5)
),a,b )
g.1<-f_BGGM(x,0.0004,0.002,0.000001,0.0005,3.2,1.5)
Hazard.f<-g.1 /(1-BETA_G)
 lines(x,Hazard.f,type='l',lty=3,lwd=3,col='green')

BETA_G<-pbeta( 1-exp(-h_x(x,0.01,0.002,0.000001,0.0005,1.2,1.2) ),a,b
)
g.1<-f_BGGM(x,0.01,0.002,0.000001,0.0005,1.2,1.2)
Hazard.f<-g.1 /(1-BETA_G)
 lines(x,Hazard.f,type='l',lty=4,lwd=2,col='blue')
abline(0,0)
```

❖

```
#################################################################
#######             test binomial series (TAYLOR)
#################################################################

seira_f_BGGM<-function(n,x,theta,xi,lamda,k,a,b){
Seira<-NULL
Seira[x==x]<-0
x_0<-x>0
dhx<-dh_x(x[x_0],theta,xi,lamda,k,a,b)
hx<-  h_x(x[x_0],theta,xi,lamda,k,a,b)
A<- ((-1)^(0:n))*choose((a-1),0:n)
N<-sum(x_0)
Neg<-sum(!x_0)
for (t in 1:N) {
B<- dhx[t]/beta(a,b)*(exp(-hx)[t])^((0:n)+b)
Seira[Neg+t]<-sum(A*B)}
return(Seira)
}


#################### GOOD EXAMBLE FOR n>4 ####################
a<-3.2
b<-1.2
u<-0.000001#THETA
j<-0.012#KSI
k<-0.003
l<-0.000001

theta<-u
xi<-j
lamda<-l

q<-2
w<-3
n<-6
plot_S<-function(q,w,n,theta,xi,lamda,k,a,b){
x<-seq(-10,130,1)
par(mfrow=c(q,w))
for (N in 1:n){

fBGGM<-f_BGGM(x,theta,xi,lamda,k,a,b)    # g_1(x)
```

```
seira<-seira_f_BGGM(N,x,theta,xi,lamda,k,a,b)
plot(x,seira,type='l',lty =2,col='red',xlab='x
years',ylab='PROBABILITY')
mtext(paste("for n =",N ),line=1 , cex = 0.8)
lines(x,fBGGM,type='l')
lines(x,seira,type='l',lty =2,col='red')
}
}
plot_S(2,2,4,theta,xi,lamda,k,a,b)

#################################################################
####### end test binomial (διωνυμικό ανάπτυγμα ) (TAYLOR)

############################### several shapes of BGGM function
############################### plots for f(x)=h'(x)exp(-h(x)
############################### plots for F(x)=1-e^(-h(x))
############################### plots for f_BGGM
x<-seq(-10,200,1)
a<-1.5
b<-1.7
u<-3.5E-06 #THETA
j<-0.15#KSI
k<-0.00005
l<-1E-06

theta<-u
xi<-j
lamda<-l
Fx<-F_x(x,theta,xi,lamda,k,a,b)
plot(x,Fx,'l',xlab='x  years',ylab='PROBABILITY')
      mtext(" F(x)=1-exp(-h(x))",line=1 , cex = 1.5)
      text(150,0.6,paste("a = ",round(a,7)),cex= 1)
      text(150,0.5,paste("b = ",round(b,7)),cex= 1)
      text(150,0.4,paste("θ = ",round(theta,7)),cex= 1)
      text(150,0.3,paste("ξ = ",round(xi,7)),cex= 1)
      text(150,0.2,paste("k = ",round(k,7)),cex= 1)
      text(150,0.1,paste("λ = ",round(l,7)),cex= 1)
fx<-f_x(x,theta,xi,lamda,k,a,b)
plot(x,fx,'l',xlab='x  years',ylab='PROBABILITY')
      mtext(" f(x)=h'(x)exp(-h(x))",line=1 , cex = 1.5)
      text(150,0.04,paste("a = ",round(a,7)),cex= 1)
      text(150,0.035,paste("b = ",round(b,7)),cex= 1)
      text(150,0.03,paste("θ = ",round(theta,7)),cex= 1)
      text(150,0.025,paste("ξ = ",round(xi,7)),cex= 1)
      text(150,0.020,paste("k = ",round(k,7)),cex= 1)
      text(150,0.015,paste("λ = ",round(l,7)),cex= 1)
fBGGM<-f_BGGM(x,theta,xi,lamda,k,1,b)
plot(x,fBGGM,'l',xlab='x  years',ylab='PROBABILITY')
```

```
      mtext(" f_BGGM(x)",line=1 , cex = 1.5)
      text(150,0.04,paste("a = ",round(a,7)),cex= 1)
      text(150,0.035,paste("b = ",round(b,7)),cex= 1)
      text(150,0.03,paste("θ = ",round(theta,7)),cex= 1)
      text(150,0.025,paste("ξ = ",round(xi,7)),cex= 1)
      text(150,0.020,paste("k = ",round(k,7)),cex= 1)
      text(150,0.015,paste("λ = ",round(l,7)),cex= 1)
x<-seq(-10,200,1)
a<-1.2
b<-0.2
u<-1E-06 #THETA
j<-0.012#KSI
k<-0.003
l<-5E-06

theta<-u
xi<-j
lamda<-l
### gia to theta
Fx<-NULL
Fx<-F_x(x,theta,xi,lamda,k,a,b)
plot(x,Fx,'l',xlab='x  years',ylab='PROBABILITY')
      mtext(" F(x)=1-exp(-h(x))",line=1 , cex = 1.5)
      text(150,0.6,paste("a = ",round(a,7)),cex= 1)
      text(150,0.5,paste("b = ",round(b,7)),cex= 1)
      text(150,0.4,paste("θ = ",round(theta,7)),cex= 1)
      text(150,0.3,paste("ξ = ",round(xi,7)),cex= 1)
      text(150,0.2,paste("k = ",round(k,7)),cex= 1)
      text(150,0.1,paste("λ = ",round(l,7)),cex= 1)
fx<-f_x(x,theta,xi,lamda,k,a,b)
plot(x,fx,'l',xlab='x  years',ylab='PROBABILITY')
      mtext(" f(x)=h'(x)exp(-h(x))",line=1 , cex = 1.5)
      text(150,0.025,paste("a = ",round(a,7)),cex= 1)
      text(150,0.022,paste("b = ",round(b,7)),cex= 1)
      text(150,0.019,paste("θ = ",round(theta,7)),cex= 1)
      text(150,0.016,paste("ξ = ",round(xi,7)),cex= 1)
      text(150,0.013,paste("k = ",round(k,7)),cex= 1)
      text(150,0.010,paste("λ = ",round(l,7)),cex= 1)
fBGGM<-NULL
fBGGM<-f_BGGM(x,theta,xi,lamda,k,1,b)
plot(x,fBGGM,'l',xlab='x  years',ylab='PROBABILITY')
      mtext(" f_BGGM(x)",line=1 , cex = 1.5)
      text(150,0.013,paste("a = ",round(a,7)),cex= 1)
      text(150,0.0115,paste("b = ",round(b,7)),cex= 1)
      text(150,0.010,paste("θ = ",round(theta,7)),cex= 1)
      text(150,0.0085,paste("ξ = ",round(xi,7)),cex= 1)
      text(150,0.007,paste("k = ",round(k,7)),cex= 1)
      text(150,0.0055,paste("λ = ",round(l,7)),cex= 1)
```

```
#################################################################
##### several shapes of BGGM function vs specific parameters ##
################################ for theta ######################
Z<-0
for (z in seq(0.04,0.0001,by=-0.001)) {
print(z)
Z<-Z+1
print(Z)
fBGGM<-f_BGGM(x,z,xi,lamda,k,a,b)
if (Z==1) {
plot(x,fBGGM,'l',xlab='x  years',ylab='PROBABILITY',col='red',lwd =
3)
     mtext(" f_BGGM(x)",line=1 , cex = 1.5)
     text(150,0.029,paste("a = ",round(a,7)),cex= 1)
     text(150,0.027,paste("b = ",round(b,7)),cex= 1)
     text(150,0.025,paste("? = 0.04 (red) to 0.001"),cex= 1.2)
     text(150,0.023,paste("? = ",round(xi,7)),cex= 1)
     text(150,0.021,paste("k = ",round(k,7)),cex= 1)
     text(150,0.019,paste("? = ",round(l,7)),cex= 1)
} else { lines(x,fBGGM,'l') }
}
fBGGM<-f_BGGM(x,0.04,xi,l,k,a,b)
lines(x,fBGGM,col='red',lwd = 3,'l')
################################ for lamda ######################
Z<-0
for (z in seq(0.05,0.00001,by=-0.0015)) {
print(z)
Z<-Z+1
print(Z)
fBGGM<-f_BGGM(x,theta,xi,z,k,a,b)
if (Z==1) {
plot(x,fBGGM,'l',xlab='x  years',ylab='PROBABILITY',col='red',lwd =
3)
     mtext(" f_BGGM(x)",line=1 , cex = 1.5)
     text(150,0.029,paste("a = ",round(a,7)),cex= 1)
     text(150,0.027,paste("b = ",round(b,7)),cex= 1)
     text(150,0.025,paste("T = ", round(theta,7)),cex= 1)
     text(150,0.023,paste("? = ",round(xi,7)),cex= 1)
     text(150,0.021,paste("k = ",round(k,7)),cex= 1)
     text(150,0.019,paste("? = 0.05 (red) to 0.0001"),cex= 1.2)
} else { lines(x,fBGGM,'l') }
}
fBGGM<-f_BGGM(x,theta,xi,0.05,k,a,b)
```

```
lines(x,fBGGM,col='red',lwd = 3,'l')

############################### for k ########################

Z<-0
for (z in seq(0.004,0.0001,by=-0.0001)) {
print(z)
Z<-Z+1
print(Z)
fBGGM<-f_BGGM(x,theta,xi,l,z,a,b)
if (Z==1) {
plot(x,fBGGM,'l',xlab='x  years',ylab='PROBABILITY',col='red',lwd =
3)
     mtext(" f_BGGM(x)",line=1 , cex = 1.5)
     text(150,0.045,paste("a = ",round(a,7)),cex= 1)
     text(150,0.042,paste("b = ",round(b,7)),cex= 1)
     text(150,0.039,paste("? = ", round(theta,7)),cex= 1)
     text(150,0.036,paste("? = ",round(xi,7)),cex= 1)
     text(150,0.033,paste("k = 0.004 (red) to 0.0001"),cex= 1.2)
     text(150,0.030,paste("? = ",round(l,7)),cex= 1)
} else { lines(x,fBGGM,'l') }
}
fBGGM<-f_BGGM(x,theta,xi,l,0.004,a,b)
lines(x,fBGGM,col='red',lwd = 3,'l')

############################### for xi ########################
Z<-0
for (z in seq(0.2,0.0001,by=-0.005)) {
print(z)
Z<-Z+1
print(Z)
fBGGM<-f_BGGM(x,theta,z,l,k,a,b)
if (Z==1) {
plot(x,fBGGM,'l',xlab='x  years',ylab='PROBABILITY',col='red',lwd =
3)
     mtext(" f_BGGM(x)",line=1 , cex = 1.5)
     text(150,0.060,paste("a = ",round(a,7)),cex= 1)
     text(150,0.055,paste("b = ",round(b,7)),cex= 1)
     text(150,0.050,paste("?  = ", round(theta,7)),cex= 1)
     text(150,0.045,paste("? = 0.2 (red) to 0.005"),cex= 1.2)
     text(150,0.040,paste("k = ",round(k,7)),cex= 1)
     text(150,0.035,paste("? = ",round(l,7)),cex= 1)
} else { lines(x,fBGGM,'l') }
}
fBGGM<-f_BGGM(x,theta,0.2,l,k,a,b)
lines(x,fBGGM,col='red',lwd = 3,'l')
############################### for a ########################
times<-c(seq(0.125,0.975,by=0.025),seq(1,7.5,by=0.2) )
Z<-0
```

```
for (z in times) {
print(z)
Z<-Z+1
print(Z)
fBGGM<-f_BGGM(x,theta,xi,l,k,z,b)
if (Z==1) {
plot(x,fBGGM,'l',xlab='x
years',ylab='PROBABILITY',ylim=c(0,0.017),col='blue',lwd = 3)
     mtext(" f_BGGM(x)",line=1 , cex = 1.5)
     text(140,0.0162,paste("a = 0.125(blue),1(red) to
7.5(green)"),cex= 1.2)
     text(170,0.0145,paste("b = ",round(b,7)),cex= 1)
     text(170,0.013,paste("? = ", round(theta,7)),cex= 1)
     text(170,0.0115,paste("? = ",round(xi,7)),cex= 1)
     text(170,0.01,paste("k = ",round(k,7)),cex= 1)
     text(170,0.0085,paste("? = ",round(l,7)),cex= 1)
} else { lines(x,fBGGM,'l') }
}
fBGGM<-f_BGGM(x,theta,xi,l,k,1,b)
lines(x,fBGGM,col='red',lwd = 3,'l')
fBGGM<-f_BGGM(x,theta,xi,l,k,8,b)
lines(x,fBGGM,col='green',lwd = 3,'l')
############################### for b ##########################
times<-c(seq(5,1,by=-0.1),seq(0.1,0.9,by=0.1) )
Z<-0
for (z in times) {
print(z)
Z<-Z+1
print(Z)
fBGGM<-f_BGGM(x,theta,xi,l,k,a,z)
if (Z==1) {
plot(x,fBGGM,'l',xlab='x
years',ylab='PROBABILITY',ylim=c(0,0.024),col='red',lwd = 3)
     mtext(" f_BGGM(x)",line=1 , cex = 1.5)
     text(150,0.022,paste("a = ",round(a,7)),cex= 1)
     text(150,0.020,paste("b = 0.1(blue) to 5(red)"),cex= 1.2)
     text(150,0.018,paste("? = ", round(theta,7)),cex= 1)
     text(150,0.016,paste("? = ",round(xi,7)),cex= 1)
     text(150,0.014,paste("k = ",round(k,7)),cex= 1)
     text(150,0.012,paste("? = ",round(l,7)),cex= 1)
} else { lines(x,fBGGM,'l') }
}
fBGGM<-f_BGGM(x,theta,xi,l,k,a,5)
lines(x,fBGGM,col='red',lwd = 3,'l')
fBGGM<-f_BGGM(x,theta,xi,l,k,a,0.1)
lines(x,fBGGM,col='blue',lwd = 3,'l')
```

```
################################### STATS ####################
# PLOTS & STATS OF pdf and cdf of BGGM #

####### 1st Example #####
a<-3.2
b<-1.2
theta<-1e-06
xi<-0.012
k<-0.003
l<-1e-06
x<-seq(-10,160,by=0.2)
y<-f_BGGM(x,theta,xi,lamda,k,a,b)
N<-length(x)
dx<-x[2:N]-x[1:(N-1)]
M<-sum(x[2:N]*y[2:N]*dx)
DIASPORA<-sum(  x[2:N]^2*y[2:N]*dx )-M^2
SD<-sqrt(DIASPORA)
par(mfrow=c(1,2))
plot(x,y,'l',xlab='x  years',ylab='PROBABILITY')
mtext("f(x) of BGGM",line=1 , cex = 1.2)
      text(120,0.03,paste("MEAN = ",round(M,1)),cex= 1)
      text(120,0.025,paste("SD = ",round(SD,1)),cex= 1)
DX<-cumsum(dx*(y[2:N]+y[1:(N-1)])/2)
Y<-c(0,DX,1)
X<-c(x,(x[N]+dx[length(dx)]) )
Q1<-Quart(X,Y,1/4)
Q2<-Quart(X,Y,2/4)
Q3<-Quart(X,Y,3/4)
plot(X,Y,'l',xlab='x  years',ylab='PROBABILITY')
mtext("F(x) of BGGM",line=1 , cex = 1.2)
      text(100,0.6,paste("Q1 = ",round(Q1,1)),cex= 1)
      text(100,0.7,paste("Q2 = ",round(Q2,1)),cex= 1)
      text(100,0.8,paste("Q3 = ",round(Q3,1)),cex= 1)
      text(100,0.46,paste("a = ",round(a,7)),cex= 1)
      text(100,0.38,paste("b = ",round(b,7)),cex= 1)
      text(100,0.30,paste("theta = ",round(theta,7)),cex= 1)
      text(100,0.22,paste("xi = ",round(xi,7)),cex= 1)
      text(100,0.16,paste("k = ",round(k,7)),cex= 1)
      text(100,0.08,paste("l = ",round(l,7)),cex= 1)
mtext("MEAN - SD - Q1 - Q2=MEDIAN - Q3", side = 3, line = -1.5, outer
= TRUE, cex = 1.5)
stat<-round(c(M,SD,Q1,Q2,Q3),3)



####### 2nd Example #####
a<-4
b<-1
theta<-0.0004
```

```
xi<-0.002
k<-0.0005
l<-1e-06

x<-seq(-10,200,by=0.2)
y<-f_BGGM(x,theta,xi,lamda,k,a,b)
N<-length(x)
dx<-x[2:N]-x[1:(N-1)]
M<-sum(x[2:N]*y[2:N]*dx)
DIASPORA<-sum(  x[2:N]^2*y[2:N]*dx )-M^2
SD<-sqrt(DIASPORA)
par(mfrow=c(1,2))
plot(x,y,'l',xlab='x  years',ylab='PROBABILITY')
mtext("f(x) of BGGM",line=1 , cex = 1.2)
      text(150,0.016,paste("MEAN = ",round(M,1)),cex= 1)
      text(150,0.0145,paste("SD = ",round(SD,1)),cex= 1)
DX<-cumsum(dx*(y[2:N]+y[1:(N-1)])/2)
Y<-c(0,DX,1)
X<-c(x,(x[N]+dx[length(dx)]) )
Q1<-Quart(X,Y,1/4)
Q2<-Quart(X,Y,2/4)
Q3<-Quart(X,Y,3/4)
plot(X,Y,'l',xlab='x  years',ylab='PROBABILITY')
mtext("F(x) of BGGM",line=1 , cex = 1.2)
      text(165,0.6,paste("Q1 = ",round(Q1,1)),cex= 1)
      text(165,0.7,paste("Q2 = ",round(Q2,1)),cex= 1)
      text(165,0.8,paste("Q3 = ",round(Q3,1)),cex= 1)
      text(165,0.46,paste("a = ",round(a,7)),cex= 1)
      text(165,0.38,paste("b = ",round(b,7)),cex= 1)
      text(165,0.30,paste("theta = ",round(theta,7)),cex= 1)
      text(165,0.22,paste("xi = ",round(xi,7)),cex= 1)
      text(165,0.16,paste("k = ",round(k,7)),cex= 1)
      text(165,0.08,paste("l = ",round(l,7)),cex= 1)
mtext("MEAN - SD - Q1 - Q2=MEDIAN - Q3", side = 3, line = -1.5, outer
= TRUE, cex = 1.5)
stat<-round(c(M,SD,Q1,Q2,Q3),3)




############################################################
###   function for plotting pdf, cdf and Hazard function - also
Statistic measures ##########################################
x<-seq(-10,200,by=0.1)
matrix.stats<-function(x,theta,xi,lamda,k,a,b,PLOT){
y<-f_BGGM(x,theta,xi,lamda,k,a,b)
N<-length(x)
dx<-x[2:N]-x[1:(N-1)]
```

```
M<-sum(x[2:N]*y[2:N]*dx)
DIASPORA<-sum(  x[2:N]^2*y[2:N]*dx )-M^2
SD<-sqrt(DIASPORA)
DX<-cumsum(dx*(y[2:N]+y[1:(N-1)])/2)
Y<-c(0,DX,1)
X<-c(x,(x[N]+dx[length(dx)]) )
q1<-X[Y>=0.25][1]
q2<-X[Y>=0.50][1]
q3<-X[Y>=0.75][1]
 if (PLOT==TRUE){
 par(mfrow=c(1,3))
 plot(x,y,'l',xlab='x  years',ylab='PROBABILITY')
 plot(X,Y,'l',xlab='x  years',ylab='PROBABILITY')
 plot(x,Hazard.f,'l',xlab='x  years',ylab='PROBA   **  BILITY')
 }
 STATS<-list(param=c(theta=theta,xi=xi,k=k,l=lamda,a=a,b=b),
stats=round(c(M=M,SD=SD,Q1=q1,MEDIAN=q2,Q3=q3),2))
 return(STATS)
}
##### RUN #####
matrix.stats(x,0.000001,0.012,0.000001,0.003,3.2,1.2,TRUE)
matrix.stats(x,0.0001,0.012,0.000001,0.003,3.2,1.2,TRUE)
matrix.stats(x,0.0004,0.002,0.000001,0.0005,3.2,1.2,TRUE)
matrix.stats(x,0.01,0.002,0.000001,0.0005,3.2,1.2,TRUE)
matrix.stats(x,0.01,0.002,0.000001,0.0005,4,1.2,TRUE)
matrix.stats(x,0.01,0.002,0.000001,0.0005,4,0.6,TRUE)
matrix.stats(x,0.01,0.002,0.000001,0.0005,7,2,TRUE)
matrix.stats(x,0.01,0.002,0.01,0.0005,7,2,TRUE)
matrix.stats(x,0.01,0.05,0.00001,0.00005,10,0.3,TRUE)
matrix.stats(x,0.007,0.05,0.00001,0.00005,10,0.3,TRUE)
```

❖

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ A_1

Υπολογισμός **τιμής ορίου**, όταν το $x \to 1$. Για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων $\theta, \xi, \kappa, \lambda, \alpha, \beta > 0$ δύναται να υπολογιστεί μέσω του παρακάτω κώδικα σε περιβάλλον R.

```
########## θέτω τις παραμέτρους με κατάλληλες τιμές #############

parametroi<-c(   ,     ,     ,     ,     ,     )
a<-parametroi[1]
b<-parametroi[2]
u<-parametroi[3] #THETA
j<-parametroi[4] #KSI
l<-parametroi[5]
k<-parametroi[6]
a ; b ; u ; j ; l ; k

######### BGGM function [f(x)] ###################################

BGGM_pdf<-function(x,a,b,u,j,l,k) {

par1<-u*exp(j*x)+l+k*x
par2<-exp(-k*x^2/2-l*x-u/j*(exp(j*x)-1))
fx<-par1*par2

return(fx)
}

x<-1               #lim (x→ 1)
BGGM_pdf(1,a,b,u,j,l,k)

######### BGGM fuction F(x) ######################################

BGGM_cdf<-function(x,a,b,u,j,l,k) {
Fx<-1-exp( -k*x^2/2-l*x-u/j*(exp(j*x)-1) )
return(Fx)
}
x<-1                #lim (x→ 1)
Fx<-BGGM_cdf(x,a,b,u,j,l,k)

BGGM_cdf(1,a,b,u,j,l,k)


######### BGGM lim f(x) όταν το lim (x→ 1) ####################

BGGM<-function(x,a,b,u,j,l,k){
gx<-BGGM_pdf(x,a,b,u,j,l,k)/beta(a,b)*( BGGM_cdf(x,a,b,u,j,l,k) )^(a-
1)*( 1-BGGM_cdf(x,a,b,u,j,l,k) )^(b-1)
return(gx)
}

g_x<-BGGM(1,a,b,u,j,l,k)
g_x
```

❖

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ A_2

Υπολογισμός της **μέσης τιμής** του ολοκληρώματος της BGGM κατανομής, όταν το $0 \leq x \leq 100$ παριστάνει τα έτη ζωής. Για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων $\theta, \xi, \kappa, \lambda, \alpha, \beta > 0$ δύναται να υπολογιστεί μέσω του παρακάτω κώδικα σε περιβάλλον R.

```
######### BGGM integrate [f(x)] όταν το  0 ≤ x ≤ 100  ##############
x<-c(0:100)
BGGM<-function(x,a,b,u,j,l,k){
gx<-
((x))*BGGM_pdf(x,a,b,u,j,l,k)/beta(a,b)*(BGGM_cdf(x,a,b,u,j,l,k))^(a-
1)*(1-BGGM_cdf(x,a,b,u,j,l,k))^(b-1)
return(gx)
}

g_x<-BGGM(1,a,b,u,j,l,k)
g_x

### ολοκλήρωμα της E(x) ########################################
Integrand1<-function(x){gx<-(x)*BGGM_pdf(x,a,b,u,j,l,k)/beta(a,b)*(
BGGM_cdf(x,a,b,u,j,l,k) )^(a-1)*( 1-BGGM_cdf(x,a,b,u,j,l,k) )^(b-1)
return(gx)
}
integrate(integrand,0,100)
```

❖

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ A_3

Υπολογισμός της **μέσης τιμής της ροπογεννήτριας** του ολοκληρώματος της BGGM κατανομής, όταν το $0 \leq x \leq 100$ παριστάνει τα έτη ζωής και $-1 \leq t \leq 1$. Για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων $\theta, \xi, \kappa, \lambda, \alpha, \beta > 0$ δύναται να υπολογιστεί μέσω του παρακάτω κώδικα σε περιβάλλον R.

```
##### BGGM integrate [f(x)] όταν το  0 ≤ x ≤ 100  και −1 ≤ t ≤ 1  ######
x<-c(0:100)
t<-c(-1:1)                  # μετασχηματισμός
BGGM<-function(x,a,b,u,j,l,k,t){
gx<-
(exp(t*x))*BGGM_pdf(x,a,b,u,j,l,k)/beta(a,b)*(BGGM_cdf(x,a,b,u,j,l,k)
)^(a-1)*(1-BGGM_cdf(x,a,b,u,j,l,k))^(b-1)
return(gx)
}

g_x<-BGGM(1,a,b,u,j,l,k,t)
g_x

## ολοκλήρωμα της E(e^tx) ########################################
Integrand2<-function(x){gx<-
(exp(t*x))*BGGM_pdf(x,a,b,u,j,l,k)/beta(a,b)*(
BGGM_cdf(x,a,b,u,j,l,k) )^(a-1)*( 1-BGGM_cdf(x,a,b,u,j,l,k) )^(b-1)
return(gx)
}
integrate(integrand,0,100)
```

❖

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ A_4

R-code {Splines}

Regression Splines

Η παλινδρόμηση με τη μέθοδο των Splines παρέχει μία προσέγγιση που επιτρέπει σε ένα μοντέλο παλινδρόμησης να συλλάβει λειτουργίες / τάσεις σε ένα πρότυπο, έστω X, επιτρέποντας συγχρόνως τις «ευέλικτες» σχέσεις μεταξύ του X και της μέσης απόκρισης ως συνάρτηση της μεταβλητής X ή αλλιώς την αναμενόμενη μέση τιμή της Y δεδομένου του X, $E(Y|X)$.

Μια κυβική spline (cubic spline) με σημεία (knots) $t_1, \dots, t_k$ έχει γραμμικούς, τετραγωνικούς και κυβικούς όρους για το x, και έναν όρο της μορφής $(x - t_1)^3 > 0$ για κάθε

σημείο. Θυμίζεται ότι ως σημείο $t_1, \dots, t_k$ μπορεί να θεωρηθεί η ηλικία. Αυτοί οι όροι είναι εύκολο να υπολογιστούν και μπορούν να εισαχθούν ως παράγοντες πρόβλεψης σε μια παλινδρόμηση. Ο κώδικας της ***R*** έχει μια συνάρτηση $\boldsymbol{bs}()$ που περιλαμβάνεται στο πακέτο της βιβλιοθήκης splines ως μέρος της βασικής εγκατάστασης.

Παράδειγμα: Έστω πως θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε παλινδρόμηση spline για να εξομαλύνουμε τα ελληνικά δεδομένα. Θα χρησιμοποιήσουμε για παράδειγμα μια κυβική spline με τρεις εσωτερικούς κόμβους ή σημεία ή knots στις ηλικίες 25, 50 και 75.

Ο αριθμός των κόμβων επιλέγεται για να ισορροπήσει την ομαλότητα και την καλή προσαρμογή του μοντέλου!

```
######### Application Code – Mortality Splines ##############

library(splines)
library(sp)
Data_2011
test <- lm(Deaths ~ bs(Age, knots=c(25, 50, 75)), data=Data_2011)
Data2011 <- cbind(Data_2011, smooth=fitted(test))
plot(Data2011[,3])
lines(Data2011[,5], col='red')
```

❖

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ A_5

R-code {Splines}

Natural Splines

Οι φυσικές splines είναι ένας άλλος τύπος ευέλικτης λειτουργίας με βάση το πολυώνυμο που ξεκινάει με κυβική σφήνα (υψωμένος εκθέτης εις την $3^η$). Μερικές φορές υπάρχουν λίγες πληροφορίες στα άκρα του εύρους του δείγματος που εξετάζεται. Οι φυσικές κυβικές σφήνες (natural splines), οι οποίες περιορίζονται να είναι γραμμικές εκτός της εμβέλειας των δεδομένων, παρέχουν ένα χρήσιμο εργαλείο υπό τις συνθήκες αυτές. Για παράδειγμα τα πολυώνυμα που χρησιμοποιούνται στα άκρα πρέπει να τελειώνουν με

μηδενική καμπυλότητα. Στον κώδικα ***R*** υπάρχει η αντίστοιχη συνάρτηση $\boldsymbol{ns}()$ στη βιβλιοθήκη των splines.

```
######### Application Code – Mortality natural Splines ##########
#   Analysis of male Greece mortality data for 2011
#
library(splines)
library(MASS)
Data_2011
Age <- cbind(seq(1,100,by=1))
Exposure <- Data_2011[ ,1]
Deaths <- Data_2011[ ,2]
Mortality.rate = Deaths/Exposure         # Mortality Rate
Mortality.rate
fit2 <- glm(Deaths ~ ns(Age, knots=c(6,12,18)))
print(summary(fit2))                                                  #####
The fitted model
fitted.mean <- predict( fit2 )
pdf(file="TheNaturalSpline.pdf")
plot(Age, Mortality.rate )
lines(Age, fit2$fit/Exposure, col = "red", lwd = 2 col="red" )
#
#Function type fit with a smooth function, example Gompertz with ns()
function
#
Age2=Age^2
Gompertz.Smooth <- glm(Deaths ~ ns(Age, df = 8)  +  ns(Age2, df = 8)
+  offset(log(Exposure)), family = "poisson")
plot(Age, log(Deaths/Exposure), pch = 16, col = "blue")
lines(Age, log(Gompertz.Smooth$fit/Exposure),pch = 16,col = "red", lwd
= 2)
```

Η συνάρτηση $\boldsymbol{ns}$ δημιουργεί την αρχική βάση spline φυσικής παλινδρόμησης δεδομένου ενός διανύσματος εισόδου. Οι κόμβοι μπορούν να προσδιοριστούν είτε μέσω ενός λόγου

βαθμού ελευθερίας df το οποίο παίρνει έναν ακέραιο είτε μέσω ενός κόμβου που παίρνει ένα διάνυσμα που δίνει την επιθυμητή τοποθέτηση των σημείων.

Μια **εξομαλυμένη καμπύλη** (smoothing spline) έχει έναν κόμβο σε κάθε σημείο δεδομένων, αλλά εισάγει μια ποινή για την έλλειψη ομαλότητας. Εάν η ποινή είναι μηδέν, λαμβάνεται μια συνάρτηση που παρεμβάλλει τα δεδομένα. Εάν η ποινή είναι άπειρη, παρέχεται μια ευθεία γραμμή τοποθετημένη από τα συνήθη ελάχιστα τετράγωνα.

❖

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ A_6

Η μαθηματική μοντελοποίηση των παραπάνω συναρτήσεων κατανομών, έγινε με χρήση του ανοιχτού κώδικα R (www.r-project.org), ενώ ο αντίστοιχος κώδικας που κατασκευάστηκε για την εξαγωγή των αποτελεσμάτων (πίνακες 5 ως 8) και των αντίστοιχων γραφημάτων 21^{α} ως 22^{β} βρίσκεται παρακάτω. Στο παρόν παράρτημα παρουσιάζεται ο αλγόριθμος για τους **άνδρες** με τα αντίστοιχα δεδομένα, όπως ελήφθησαν από την ΕΛ.ΣΤΑΤ. Αφορούν την **Βόρεια Ελλάδα** για το έτος **2011**. Ομοίως έγινε και η αντίστοιχη ανάλυση για τις άλλες τρεις περιπτώσεις.

```
# 1 model # Mortality data for Males 2011 for each age #########
# North GR ######
Data_2011<-
cbind(c(43131,22124,21382,21611,21004,21003,20533,20775,20996,21918,2
1666,21021,21667,21730,21978,22392,22634,23233,25273,25018,24845,2516
9,24899,24480,25279,25845,26795,28012,28661,30288,31007,29940,29553,2
9948,30785,29943,30585,30358,30642,30315,31517,32081,32585,31466,3024
9,29161,28316,27749,28170,29692,29381,28089,26919,27225,27302,25952,2
4755,25056,25374,25841,22920,21619,23225,25446,24284,20947,18668,1735
5,18709,22416,22403,21690,20949,20922,19972,20227,19003,16596,16323,1
6259,13950,12505,10986,9362,7828,5544,4386,3215,2864,2466,1694,1069,8
33,611,525,413,289,266,189,222),
c(99,2,3,5,3,2,3,2,4,3,1,3,2,4,8,11,13,7,8,14,15,14,21,22,24,15,19,28
,27,29,23,29,24,42,28,32,37,31,41,40,70,70,63,86,108,95,97,102,102,13
2,146,131,160,197,218,191,236,217,244,267,269,288,294,369,392,368,378
,355,430,413,456,638,638,700,768,924,937,903,956,1026,1005,1054,1117,
1080,997,894,749,601,560,555,445,247,203,191,170,140,112,80,61,36))

Data_2011<-as.data.frame(
cbind(Data_2011,Data_2011[,2]/Data_2011[,1],Data_2011[,2]/sum(Data_20
11[,2]) ) )
colnames(Data_2011)<-c('Pop_Year','Deaths_Year',    'Mortality_Rate',
'Mor_Rate.sum' )

plot(Data_2011[,4])
lines(Data_2011[,3],col='red')
```

```
library(MASS)
#################################################################
#################################################################
#     Fitting the Exponential model  ############################
Data_2011
Age = cbind(seq(1,100,by=1))
Exposure = Data_2011[ ,1]
Deaths = Data_2011[ ,2]
Mortality.rate = Deaths/Exposure        # Mortality Rate
Mortality.rate
par(mfrow=c(1,2))
plot(Age, Mortality.rate, ylab = "mortality", pch = 16)
plot(Age, log(Mortality.rate), ylab = "log(mortality)", pch = 16)
#################################################################
#     Fit the Exponential model
#
Exponential   =   glm(Deaths   ~   Age   +   offset(log(Exposure))   ,
family=Gamma(link='log'))
names(Exponential)
summary(Exponential)
Exponential$fit
round(cbind(Age_group=Age, Deaths, Y_hat=Exponential$fit), digits = 2)
lines(Age, log(Exponential$fit/Exposure), col = "red", lwd = 2)
title("Exponential model")

par(mfrow=c(1,2))
plot(Age, Mortality.rate, ylab = "mortality", pch = 16)
lines(Age, Exponential$fit/Exposure, col = "red", lwd = 2)
plot(Age, log(Mortality.rate), ylab = "log(mortality)", pch = 16)
lines(Age, log(Exponential$fit/Exposure), col = "red", lwd = 2)

b0=Exponential$coef[1]
b1=Exponential$coef[2]
plot(Exponential$fit, Deaths)

#    Residuals
```

```
#
#    Pearson residuals
#
Resid.Pearson = (Deaths - Exponential$fit)/sqrt(Exponential$fit)
round(cbind(Age,   Resid.Pearson,   residuals(Exponential,   type   =
"pearson")), digits = 4)
plot(Age, Resid.Pearson, ylab = "Residual", main = "Pearson residuals",
pch = 16)
abline(h = 0, lwd = 2, col = "red")
################################################################
#
#    Deviance residuals
#
Sign = sign(Deaths - Exponential$fit)
Resid.Deviance = Sign * sqrt(2*(Deaths*log(Deaths/Exponential$fit) -
Deaths+Exponential$fit))
round(cbind(Age,   Resid.Deviance,   residuals(Exponential,   type   =
"deviance")), digits = 4)
points(Age, Resid.Deviance, col = "red", pch = 16)

################################################################

Final.results<-cbind(Deaths,
Exponential.Fit.age=round(Exponential$fit))
Final.results
par(mfrow=c(1,1))
plot(Mortality.rate, main = "Exponential")
lines(Exponential$fit/Exposure, col = 'red')
AIC(Exponential)
logLik(Exponential)

################################################################
# 2 model ######## Mortality data for Males 2011 for each age #
#     Fitting the Gompertz model - the offset
plot(Age, Mortality.rate, ylab = "mortality", pch = 16)
plot(Age, log(Mortality.rate), ylab = "log(mortality)", pch = 16)
################################################################
```

```
#     Fit the Gompertz model
#
Gompertz = glm(Deaths ~ Age + offset(log(Exposure)), family = poisson)
names(Gompertz)
summary(Gompertz)
Gompertz$fit
round(cbind(Age_group=Age, Deaths, Y_hat=Gompertz$fit), digits = 2)
lines(Age, log(Gompertz$fit/Exposure), col = "red", lwd = 2)
title("Gompertz model")

par(mfrow=c(1,2))
plot(Age, Mortality.rate, ylab = "mortality", pch = 16)
lines(Age, Gompertz$fit/Exposure, col = "red", lwd = 2)
plot(Age, log(Mortality.rate), ylab = "log(mortality)", pch = 16)
lines(Age, log(Gompertz$fit/Exposure), col = "red", lwd = 2)
#
b0=Gompertz$coef[1]
b1=Gompertz$coef[2]
plot(Gompertz$fit, Deaths)
#    Residuals
#
#    Pearson residuals
#
Resid.Pearson = (Deaths - Gompertz$fit)/sqrt(Gompertz$fit)
round(cbind(Age,    Resid.Pearson,    residuals(Gompertz,    type    =
"pearson")), digits = 4)
plot(Age, Resid.Pearson, ylab = "Residual", main = "Pearson residuals",
pch = 16)
abline(h = 0, lwd = 2, col = "red")
##################################################################
#
#    Deviance residuals
#
#    These are the components of the LRT statistic which in our case
is
#
Sign = sign(Deaths - Gompertz$fit)
```

```
Resid.Deviance = Sign * sqrt(2*(Deaths*log(Deaths/Gompertz$fit) -
Deaths+Gompertz$fit))
round(cbind(Age, Resid.Deviance, residuals(Gompertz, type =
"deviance")), digits = 4)
points(Age, Resid.Deviance, col = "red", pch = 16)

#################################################################
Final.results<-cbind(Deaths, Gompertz.Fit.age=round(Gompertz$fit))
Final.results
par(mfrow=c(1,1))
plot(Mortality.rate, main = "Gompertz")
lines(Gompertz$fit/Exposure, col = 'red')
AIC(Gompertz)
logLik(Gompertz)

#################################################################
# 3 model ######### Mortality data for Males 2011 for each age #
#     Fitting the GompertzMakeham model
Data_2011
Age = cbind(seq(1,100,by=1))
Exposure = Data_2011[ ,1]
Deaths = Data_2011[ ,2]
Mortality.rate = Deaths/Exposure        # Mortality Rate
Mortality.rate
par(mfrow=c(1,2))
plot(Age, Mortality.rate, ylab = "mortality", pch = 16)
plot(Age, log(Mortality.rate), ylab = "log(mortality)", pch = 16)
#################################################################

#     Fit the GompertzMakeham model
#
GompertzMakeham = glm(Deaths ~ Age + Exposure + offset(log(Exposure)),
family = poisson)
names(GompertzMakeham)
summary(GompertzMakeham)
GompertzMakeham$fit
```

```
round(cbind(Age_group=Age, Deaths, Y_hat=GompertzMakeham$fit), digits
= 2)
lines(Age, log(GompertzMakeham$fit/Exposure), col = "red", lwd = 2)
title("GompertzMakeham model")

par(mfrow=c(1,2))
plot(Age, Mortality.rate, ylab = "mortality", pch = 16)
lines(Age, GompertzMakeham$fit/Exposure, col = "red", lwd = 2)
plot(Age, log(Mortality.rate), ylab = "log(mortality)", pch = 16)
lines(Age, log(GompertzMakeham$fit/Exposure), col = "red", lwd = 2)

Final.results<-cbind(Deaths,
GompertzMakeham.Fit.age=round(GompertzMakeham$fit))
Final.results
par(mfrow=c(1,1))
plot(Mortality.rate, main = "GompertzMakeham")
lines(GompertzMakeham$fit/Exposure, col = 'red')
AIC(GompertzMakeham)
logLik(GompertzMakeham)

#################################################################
# 4 model ######### Mortality data for Males 2011 for each age #
#     Fitting the Beta- Gompertz model
Data_2011
Age = cbind(seq(1,100,by=1))
Exposure = Data_2011[ ,1]
Deaths = Data_2011[ ,2]
Mortality.rate = Deaths/Exposure        # Mortality Rate
Mortality.rate

par(mfrow=c(1,2))

plot(Age, Mortality.rate, ylab = "mortality", pch = 16)
plot(Age, log(Mortality.rate), ylab = "log(mortality)", pch = 16)

#################################################################
#     Fit the Beta - Gompertz model
```

```
#
Age2=Age^2
Beta.Gompertz = glm(Deaths ~ (Age + Age2), family = Gamma(link =
"inverse"))  #metasxhmatismos gia na einai sto (0, 1)
names(Beta.Gompertz)
Beta.Gompertz$fit
round(cbind(Age_group=Age, Deaths, Y_hat=Beta.Gompertz$fit), digits =
2)
lines(Age, log(Beta.Gompertz$fit/Exposure), col = "red", lwd = 2)
title("Beta - Gompertz model")

par(mfrow=c(1,1))
plot(Age, Mortality.rate, ylab = "mortality", pch = 16)
lines(Age, Beta.Gompertz$fit/Exposure, col = "red", lwd = 2)



summary(Beta.Gompertz)
AIC(Beta.Gompertz)
logLik(Beta.Gompertz)

#################################################################
# 5 model ######### Mortality data for Males 2011 for each age #
#     Fitting the Beta - Gompertz - Makeham model
Data_2011
Age = cbind(seq(1,100,by=1))
Exposure = Data_2011[ ,1]
Deaths = Data_2011[ ,2]
Mortality.rate = Deaths/Exposure        # Mortality Rate
Mortality.rate
par(mfrow=c(1,2))
plot(Age, Mortality.rate, ylab = "mortality", pch = 16)
plot(Age, log(Mortality.rate), ylab = "log(mortality)", pch = 16)

#################################################################
#     Fit the Beta - Gompertz - Makeham model
#
Age2=Age^2
```

```
Beta.Gompertz.Makeham = glm(Deaths ~ Age + Age2 + log(Exposure), family
= Gamma(link = "inverse"))  #metasxhmatismos gia na einai sto (0, 1)
names(Beta.Gompertz.Makeham)
Beta.Gompertz.Makeham$fit
round(cbind(Age_group=Age,Deaths,   Y_hat=Beta.Gompertz.Makeham$fit),
digits = 2)
lines(Age, log(Beta.Gompertz.Makeham$fit/Exposure), col = "red", lwd
= 2)
title("Beta.Gompertz.Makeham model")

par(mfrow=c(1,1))
plot(Age, Mortality.rate, ylab = "mortality", pch = 16)
lines(Age, Beta.Gompertz.Makeham$fit/Exposure, col = "red", lwd = 2)

Final.results<-cbind(Deaths,
Beta.Gompertz.Makeham.Fit.age=round(Beta.Gompertz.Makeham$fit))
Final.results
par(mfrow=c(1,1))
plot(Mortality.rate, main = "Beta.Gompertz.Makeham")
lines(Beta.Gompertz.Makeham$fit/Exposure, col = 'red')

summary(Beta.Gompertz.Makeham)
AIC(Beta.Gompertz.Makeham)
logLik(Beta.Gompertz.Makeham)

#################################################################
# 6 model ######### Mortality data for Males 2011 for each age #
#     Fitting the Beta - Gompertz - Makeham2 model
Data_2011
Age = cbind(seq(1,100,by=1))
Exposure = Data_2011[ ,1]
Deaths = Data_2011[ ,2]
Mortality.rate = Deaths/Exposure        # Mortality Rate
Mortality.rate
par(mfrow=c(1,2))
plot(Age, Mortality.rate, ylab = "mortality", pch = 16)
plot(Age, log(Mortality.rate), ylab = "log(mortality)", pch = 16)
```

```
#################################################################
#     Fit the Beta - Gompertz - Makeham2 model
#
library(splines)
Age2=Age^2
Beta.Gompertz.Makeham2 = glm(Deaths ~ ns(Age, df = 8) + ns(Age2, df =
8) + ns(Exposure, df = 8) + log(Exposure), family = Gamma(link =
"inverse"))
#metasxhmatismos gia na einai sto (0, 1)
names(Beta.Gompertz.Makeham2)
Beta.Gompertz.Makeham2$fit
round(cbind(Age_group=Age, Deaths, Y_hat=Beta.Gompertz.Makeham2$fit),
digits = 2)
lines(Age, log(Beta.Gompertz.Makeham2$fit/Exposure), col = "red", lwd
= 2)
title("Beta.Gompertz.Makeham2 model")

par(mfrow=c(1,1))
plot(Age, Mortality.rate, ylab = "mortality", pch = 16)
lines(Age, Beta.Gompertz.Makeham2$fit/Exposure, col = "red", lwd = 2)

Final.results<-cbind(Deaths,
Beta.Gompertz.Makeham2.Fit.age=round(Beta.Gompertz.Makeham2$fit))
Final.results
par(mfrow=c(1,1))
plot(Mortality.rate, main = "Beta.Gompertz.Makeham2")
lines(Beta.Gompertz.Makeham2$fit/Exposure, col = 'red')

summary(Beta.Gompertz.Makeham2)
AIC(Beta.Gompertz.Makeham2)
logLik(Beta.Gompertz.Makeham2)

#################################################################
# Mortality.rate for all models
par(mfrow=c(1,1))
```

```
plot(log(Mortality.rate), main = "Crude Death Rate (Males 2011) -
North", xlab = "Age")
lines(log(Exponential$fit/Exposure), col = 'gray', lwd = 2)
lines(log(Gompertz$fit/Exposure), col = 'blue', lwd = 2)
lines(log(GompertzMakeham$fit/Exposure), col = 'green', lwd = 2)
lines(log(Beta.Gompertz$fit/Exposure), col = 'orange', lwd = 2)
lines(log(Beta.Gompertz.Makeham$fit/Exposure), col = 'pink', lwd = 2)
lines(log(Beta.Gompertz.Makeham2$fit/Exposure), col = 'red', lwd = 2)
legend(5,    0.27,    legend    =    c("Exponential",    "Gompertz",
"GompertzMakeham", "Beta.Gompertz", "Beta.Gompertz.Makeham", "BGGM" ),
lty = 1, lwd = 2, col =c("gray", "blue", "green", "orange", "pink",
"red"), cex = 0.9)
```

❖

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ A_7

Η **μαθηματική μοντελοποίηση** των παραπάνω συναρτήσεων κατανομών της παρούσας διδακτορικής διατριβής και ειδικότερα της Beta Gompertz Generalized Makeham κατανομής, έγινε με χρήση του ανοιχτού κώδικα R (www.r-project.org), ενώ ο αντίστοιχος κώδικας που κατασκευάστηκε για την **εξαγωγή των αποτελεσμάτων** και των **εκτιμήσεων των παραμέτρων** $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\lambda}$ (πίνακες 11 & 12) και του αντίστοιχου γραφήματος 24 βρίσκεται παρακάτω.

Στο παρόν παράρτημα παρουσιάζεται ο αλγόριθμος για τους **άνδρες** με τα αντίστοιχα δεδομένα θνησιμότητας, όπως αντλήθηκαν από την Human Mortality Database. Αφορούν τις 22 χώρες της Ευρώπης για τα έτη από το **1993** έως το **2013**. Εντός του αλγορίθμου περιγράφεται συνοπτικά το κάθε βήμα σε μορφή σχολίου, καθώς και το τι ακριβώς κάνει η κάθε εντολή στην R. Ομοίως έγινε και η αντίστοιχη ανάλυση από το 1993 – 2013 για τον γυναικείο πληθυσμό των αντίστοιχων χωρών.

Προφανώς όπου χρειάστηκε μεγαλύτερη χρονολογική ανάλυση δεδομένων, στα Ευρωπαϊκά δεδομένα του 6^{ου} κεφαλαίου για τις 22 χώρες της Ε.Ε, έγινε και η αντίστοιχη χρονική τροποποίηση στον κώδικα και στα δεδομένα θνησιμότητας. Στατιστικά όσο περισσότερα δεδομένα παρέχονται (περισσότερη πληροφορία) τόσο πιο ασφαλή τα συμπεράσματα που εξάγονται στην ανάλυση.

```
## Mortality data for Males 1993 - 2013 for each age #########
# 22 countries of Europe ######

# The purpose of nls.lm (η function που θα χρησιμοποιήσουμε και ανήκει στο πακέτο minpack.lm) is to minimize the sum square of the vector returned by the function fn (A function that returns a vector of residuals, the sum square of which is to be minimized). Με τον κώδικα ορίζουμε εμείς αυτή τη συνάρτηση και η συνάρτηση αυτή επιστρέφει την αντικειμενική συνάρτηση, (by a modification of the Levenberg-Marquardt algorithm.)

#Install any required package
wants <- c("minpack.lm")
has   <- wants %in% rownames(installed.packages())
if(any(!has)) install.packages(wants[!has])
# Καλούμε το πακέτο που χρειαζόμαστε (minpack.lm)

library("minpack.lm")
# Θέτουμε σαν working directory το path στο οποίο έχουμε αποθηκεύσει τα csv με τα δεδομένα

#read all files
setwd("C:/Users/fl497tr/Desktop/Panos/data/")
files <-list.files()
# Αν τρέξουμε για πολλές χώρες ταυτόχρονα, πολλά χρόνια, δεν χωράει το log στο κλασσικό μέρος της R και έτσι το αποθηκεύουμε σε ένα txt αρχείο

sink("C:/Users/fl497tr/Desktop/Panos/log.txt")
#  Η παρακάτω διαδικασία γίνεται για κάθε αρχείο που βρίσκεται στο path που έχουμε ορίσει παραπάνω για αυτό και το παρακάτω «for»

for (i in 1:length(files)) {
# Κάνουμε import το αρχείο με τα δεδομένα.
```

```
ds<-
read.csv2(paste("C:/Users/fl497tr/Desktop/Panos/data/",files[i],sep="
"),stringsAsFactors = FALSE)
#ds<-
read.csv2(paste("C:/Users/fl497tr/Desktop/Panos/40years/",files[i],se
p=""),stringsAsFactors = FALSE)
ds2<-ds[c("Year", "Age", "dx","Lx")]

# Κρατάμε ως μεταβλητές την χώρα και το φύλο(τα λαμβάνουμε από το όνομα
του αρχείου με τα δεδομένα, με προσοχή να μην αλλάξει το στυλ που είναι
γραμμένοι οι τίτλοι των αρχείων) για τα οποία κάνουμε την εκτίμηση
κάθε φορά ώστε αν τρέχουμε πάνω από μια χώρα/φύλο να μπορούμε να
ξεχωρίσουμε το κάθε export για ποια χώρα/φύλο είναι.

country<-strsplit(as.character(files[i]), split="_")[[1]][1]
gend<-strsplit(as.character(files[i]), split="_")[[1]][2]
gender<-strsplit(as.character(gend),split=" ")[[1]][1]
print(country)
print(gender)
# Θεωρούμε διαφορετικές starting values για τις γυναίκες και για τους
άντρες οπότε για αυτό χωρίζεται ο κώδικας σε δύο κομμάτια, ένα για
τους άντρες κι ένα για τις γυναίκες.

  if (gender=="Males") {
# Ορίζεται ένα αρχικά μηδενικό διάνυσμα διάστασης έτη*6 ώστε σε αυτό
θα καταχωρηθούν οι τιμές των εκτιμήσεων a,b,u,j,k,l που θα παραχθούν
παρακάτω.
# a->α, b->β, u->θ, j->ξ, k->κ, l->λ η αντιστοιχία των παραμέτρων.

        v<-matrix(c(0,0,0,0,0,0),  nrow  =length(unique(ds2$Year))  ,
ncol = 6)
        for (i in 1:length(unique(ds2$Year))) {
       print(unique(ds2$Year)[i])

# Ως x θεωρούμε την ηλικία (κρατάμε την ηλικία για την χρονιά που
εξετάζεται σε αυτό το βήμα του for μόνο)
      x<-ds2$Age[ds2$Year==unique(ds2$Year)[i]]
```

```
# Ως y θεωρούμε το dx (κρατάμε το dx για την χρονιά που εξετάζεται σε
αυτό το βήμα του for μόνο)
      y<-ds2$dx[ds2$Year==unique(ds2$Year)[i]]

# Ως z θεωρούμε το Lx (κρατάμε το Lx για την χρονιά που εξετάζεται σε
αυτό το βήμα του for μόνο)
      z<-ds2$Lx[ds2$Year==unique(ds2$Year)[i]]

# Φτιάχνουμε για συνάρτηση όπου σαν μεταβλητές δέχεται τις αρχικές
τιμές των a,b,u,j,k,l και ως export μας δίνει την αντικειμενική
συνάρτηση την οποία και θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε

f<-function(lista) {
# Ορίζεται η BGGM ή BANBE συνάρτηση με τη βοήθεια της g
        g<-exp(-lista$k*x^2/2-lista$l*x-
lista$u/lista$j*(exp(lista$j*x)-1) )
        BANBE<-(lista$u*exp(lista$j*x)+lista$l+lista$k*x)  *  g  *(1-
g)^(lista$a-1)*(1-(1-g))^(lista$b-1)/beta(lista$a,lista$b)
        obj_function<-y/sum(y)-BANBE
        return(obj_function)}
# Καλούμε την nls.lm και θέτουμε τις αρχικές τιμές για τις παραμέτρους
που θέλουμε να εκτιμήσουμε αλλά και τις upper και lower values που
μπορούν να πάρουν. Από αυτά που παράγει η nls.lm χρειαζόμαστε τις
εκτιμήσεις οι οποίες είναι τα par[1], par[2], …, par[6] τα οποία τα
αποθηκεύουμε στο διάνυσμα v. Κάθε νέο έτος που τρέχει ο κώδικας
δημιουργεί μια νέα γραμμή στο διάνυσμα με τις εκτιμήσεις για το έτος
αυτό.

      p<-
nls.lm(par=list(a=2,b=1.6,u=0.00005,j=0.1,k=0.00005,l=0.00005),lower=
c(0,0,0,0,0,0),     upper=c(200,200,100,100,0.001,100),

fn=f,control=nls.lm.control(maxiter=1000,nprint=1,factor = 100))
      v[i,]<-
matrix(c(p$par[[1]],p$par[[2]],p$par[[3]],p$par[[4]],p$par[[5]],p$par
[[6]]))
```

```
    }
# Παράγεται πίνακας με τα έτη και τις εκτιμήσεις για το κάθε έτος.

final_table_men<-data.frame(unique(ds2$Year),v)
    names(final_table_men)<-c("Year","a","b","u","j","k","l")
# Γίνεται «export» το τελικό μας αρχείο με τις εκτιμήσεις των
παραμέτρων.

write.csv(final_table_men,paste("C:/Users/fl497tr/Desktop/Panos/expor
t/final_table_men_",country,".csv",sep="") )

  }
-----------------------------------------------------------------
## Mortality data for Females 1993 - 2013 for each age #########
# 22 countries of Europe ######
# Ομοίως η ίδια διαδικασία εφαρμόζεται και για τις γυναίκες.
 if (gender=="Females") {
        v<-matrix(c(0,0,0,0,0,0),nrow   =length(unique(ds2$Year))   ,
ncol = 6)
        for (i in 1:length(unique(ds2$Year))) {
      print(unique(ds2$Year)[i])
      x<-ds2$Age[ds2$Year==unique(ds2$Year)[i]]
      y<-ds2$dx[ds2$Year==unique(ds2$Year)[i]]
      z<-ds2$Lx[ds2$Year==unique(ds2$Year)[i]]
      f<-function(lista) {

        g<-exp(-lista$k*x^2/2-lista$l*x-
lista$u/lista$j*(exp(lista$j*x)-1) )
        BANBE<-(lista$u*exp(lista$j*x)+lista$l+lista$k*x)  *  g  *(1-
g)^(lista$a-1)*(1-(1-g))^(lista$b-1)/beta(lista$a,lista$b)
        obj_function<-y/sum(y)-BANBE
        return(obj_function)}
        p<-nls.lm(par=list(a=5,     b=1.8,     u=0.00005,     j=0.25,
k=0.00005,l=0.00005),lower=c(1.0001,0,0,0,0,0),upper=c(200,200,100,10
0,0.001,100),

fn=f,control=nls.lm.control(maxiter=1000,nprint=1,factor = 100))
```

```
      v[i,]<-
matrix(c(p$par[[1]],p$par[[2]],p$par[[3]],p$par[[4]],p$par[[5]],p$par
[[6]]))
    }

    final_table_women<-data.frame(unique(ds2$Year),v)
    names(final_table_women)<-c("Year","a","b","u","j","k","l")

write.csv(final_table_women,paste("C:/Users/fl497tr/Desktop/Panos/exp
ort/final_table_women_",country,".csv",sep="") )
      }
}
sink()
```

❖

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ A_{7res}

Στο παρόν παράρτημα παρουσιάζεται ο αλγόριθμος για τους **άνδρες** με τα αντίστοιχα δεδομένα θνησιμότητας, όπως αντλήθηκαν από την Human Mortality Database. Αφορά δεδομένα Σουηδίας από το **1961** ως το **2000**. Εντός του αλγορίθμου παρουσιάζεται το κάθε βήμα σε μορφή σχολίου στην R. Πρόκειται για την ανάλυση των καταλοίπων (residuals) της Beta Gompertz Generalized Makeham κατανομής για το συγκεκριμένο σύνολο δεδομένων.

```
#   rm(list=ls(all=T))
############################################################
                  functions for f_BGGM
############################################################
h_x<-function(x,theta,xi,lamda,k,a,b){
hx<- ((k/2)*(x^2)+lamda*x+(theta/xi)*(exp(xi*x)-1) )*(x>0)
return(hx)
}

dh_x<-function(x,theta,xi,lamda,k,a,b){
dhx<-(k*x+lamda+theta*(exp(xi*x)))*(x>0)
return(dhx)
}

f_BGGM<-function(x,theta,xi,lamda,k,a,b){  #g_1(x)
x_0<-x>0
f.BGGM<-NULL
f.BGGM[!x_0]<-0
dhx<-dh_x(x[x_0],theta,xi,lamda,k,a,b)
hx<-  h_x(x[x_0],theta,xi,lamda,k,a,b)
f.BGGM[x_0]<- dhx/beta(a,b)*(1-exp(-hx))^(a-1)*(exp(-hx))^b
return(f.BGGM)
}
#-------------------------------------------------------------------
#
#read data excel "Sweden_Males Life table_1900 - 2013.csv"
data<-
read.csv(file.choose(),header=T,sep=';',dec=',',stringsAsFactors = F)
as.numeric(data[1:5,3])
C1<-as.numeric(data[,1])
C2<-as.numeric(data[,2])
C3<-as.numeric(data[,3])
C4<-as.numeric(data[,7])
Data<-cbind(Years=C1,Age=C2,dx=C4)
data[1:5,]
Data[1:5,]
# tsec
DATA<-Data[(Data[,1]>1960)&(Data[,1]<2001),]  # DATA are only for
years 1961-2000
dim(DATA)
#read data excel "Men_Sweden.csv"
Men_Sweden<-
read.csv(file.choose(),header=T,sep=';',dec=',',stringsAsFactors = F)
```

```
Men_Sweden<-
(Men_Sweden[(Men_Sweden[,1]>1960)&(Men_Sweden[,1]<2001),])
Men_Sweden[1:5,]
mode(Men_Sweden)

########################################
## PLOT the Residuals for the 40 year ##
########################################

Y<-1961
index<-DATA[,1]==Y
x<-DATA[index,2]
y<-DATA[index,3]/sum(DATA[index,3])
param<-Men_Sweden[Men_Sweden[,1]==Y,2:7]
param<-as.numeric(param)
a<-     param[1]
b<-     param[2]
theta<- param[3] #  u<-param[3]
xi<-    param[4] #  j<-param[4]
k<-     param[5]
lamda<- param[6] #  l<-param[6]

fBGGM<-NULL
fBGGM<-f_BGGM(x,theta,xi,lamda,k,a,b)   # g_1(x)
RES<- y-fBGGM
plot(x,RES,'l',ylim=c(-0.02,0.02),ylab="Residuals",xlab="Age",
     main="Residuals Deaths of Sweden 1961-
2000",col=colors()[floor(runif(1,1,657))])
abline(c(0,0))
MEAN.RES<-RES

for (Y in 1962:2000){
index<-DATA[,1]==Y
x<-DATA[index,2]
y<-DATA[index,3]/sum(DATA[index,3])
param<-Men_Sweden[Men_Sweden[,1]==Y,2:7]
param<-as.numeric(param)
a<-     param[1]
b<-     param[2]
theta<- param[3] #  u<-param[3]
xi<-    param[4] #  j<-param[4]
k<-     param[5]
lamda<- param[6] #  l<-param[6]

fBGGM<-NULL
fBGGM<-f_BGGM(x,theta,xi,lamda,k,a,b)   # g_1(x)
RES<- y-fBGGM
#lines(x,RES,'l',col=rainbow(40)[Y-1961])
lines(x,RES,'l',col=colors()[floor(runif(1,1,657))] )
MEAN.RES<-RES+RES
}
MEAN.RES<-MEAN.RES/40
lines(x,MEAN.RES,'l',col='black',lwd = 3)
```

```
#####################################################################
#      END      ## PLOT the Residuals for the 40 year
#####################################################################
## PLOT the f(x)'s per year ##
#############################
x11(height=8.5 , width=16 ) #, pointsize=10)
par(mfrow=c(2,5))

n<-1
N<-10                 ### per 10 years
result<-
data.frame(Year=rep(NA,N),a=rep(NA,N),b=rep(NA,N),theta=rep(NA,N),xi=
rep(NA,N),k=rep(NA,N),lamda=rep(NA,N),SUM.RES=rep(NA,N))
for (Y in 1991:2000){   #### EPILOGH

#for (Y in 1961:1970){
#for (Y in 1971:1980){
#for (Y in 1981:1990){
#for (Y in 1991:2000){

index<-DATA[,1]==Y
x<-DATA[index,2]
y<-DATA[index,3]/sum(DATA[index,3])
param<-Men_Sweden[Men_Sweden[,1]==Y,2:7]
param<-as.numeric(param)
a<-     param[1]
b<-     param[2]
theta<- param[3] #  u<-param[3]
xi<-    param[4] #  j<-param[4]
k<-     param[5]
lamda<- param[6] #  l<-param[6]

fBGGM<-NULL
fBGGM<-f_BGGM(x,theta,xi,lamda,k,a,b)   # g_1(x)
plot(x,y,main=Y)
lines(x,fBGGM,'l',col='red')
RES<- y-fBGGM
result[n,]<-c(round(Y,0),a,b,theta,xi,k,lamda,sum(RES))
n<-n+1
}
print(noquote(format(result,scientific=FALSE)))
```

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ A_8

Στον ακόλουθο πίνακα 13, παρουσιάζονται οι τιμές των εκτιμήσεων των παραμέτρων $\theta, \xi, \kappa, \lambda$ της Beta Gompertz Generalized Makeham κατανομής για τις 22 χώρες της Ευρώπης **ενδεικτικά** για τα έτη από το 1993 έως το 2013, για άνδρες, ενώ για τις γυναίκες τα διαθέσιμα δεδομένα βρίσκονται στην αντίστοιχη ιστοσελίδα https://veegee.shinyapps.io/panagiotis_phd/, η οποία δημιουργήθηκε με σκοπό την συγκεντρωτική οπτικοποίηση των αποτελεσμάτων για μεγάλο χρονικό εύρος και για όλες τις χώρες. Η ιστοσελίδα επικαιροποιείται και εμπλουτίζεται συνεχώς. Οι εκτιμήσεις εξήχθησαν από την κατασκευή του κατάλληλου αλγορίθμου στην R (παράρτημα A_7, πακέτο: minpack.lm).

Οι παράμετροι α και β, είναι της Βήτα κατανομής. Έχουν μελετηθεί αναλυτικά στη διεθνή βιβλιογραφία και λαμβάνονται υπόψη κατά την δημιουργία και ανάλυση της BGGM distribution. Θυμίζεται, ότι η παράμετρος α είναι το *shape* και η παράμετρος β είναι το *scale* της Beta distribution (Zografos, K., & Balakrishnan, N. 2009).

Η επιλογή προβολής των παρακάτω πινάκων (για τα έτη 1993 – 2013) αποτελεί τον κοινό τόπο των χρονολογικών δεδομένων που υπάρχουν για όλες τις υπό ανάλυση χώρες της Ε.Ε. όπως υπάρχει στην παγκόσμια βάση δεδομένων *Human Mortality Database*. Στην ανάλυση των κεφαλαίων 5 και 6 της διδακτορικής διατριβής, έγινε χρήση των περισσότερων χρονολογικών δεδομένων της κάθε χώρας. Αξίζει να σημειωθεί πως τα δεδομένα για την Ελλάδα ήταν περιορισμένα (1981 – 2013), όπως και της Γερμανίας (1990 – 2017) ενώ της Σουηδίας ήταν τα πιο επικαιροποιημένα με συνεχή καταγραφή (1751 – 2017).

Παράμετροι ανδρών – Γερμανία				
Έτη	**θ**	**ξ**	**κ**	**λ**
1993	0,0000393	0,09687112	0,00000843	0,00022282
1994	0,0000414	0,09439622	0,00008223	0
1995	0,0000408	0,09674867	0,00000768	0,00023673
1996	0,0000341	0,09804875	0,00001084	0,00016168
1997	0,0000405	0,09413392	0,00008411	0
1998	0,0000396	0,09418171	0,00007851	0
1999	0,0000237	0,10077067	0,00001248	0,00011528
2000	0,0000313	0,09573159	0,00006728	0
2001	0,0000306	0,09673576	0,00005539	0

Παράμετροι ανδρών – Γαλλία				
Έτη	**θ**	**ξ**	**κ**	**λ**
1993	0,0000073	0,09651359	0,00004077	0,00088693
1994	0,0000070	0,09669004	0,00004145	0,00088691
1995	0,0000061	0,0960463	0,00003526	0,00072631
1996	0,0000063	0,0965442	0,00004193	0,00084852
1997	0,0000055	0,09715291	0,00004368	0,00089555
1998	0,0000077	0,09786371	0,00005968	0,00129168
1999	0,0000058	0,09953715	0,00005491	0,00114724
2000	0,0000093	0,09992141	0,00008605	0,00183017
2001	0,0000114	0,10367091	0,00014105	0,00313283

2002	0,0000278	0,09678481	0,00011973	0
2003	0,0000078	0,09136266	0,00003090	0,00049571
2004	0,0000105	0,09069141	0,00004012	0,00072886
2005	0,0000195	0,09636973	0,00013047	0,00261264
2006	0,0000171	0,09940352	0,00016490	0,0031833
2007	0,0000151	0,10497145	0,00023578	0,00480893
2008	0,0000121	0,11119827	0,00028561	0,00867254
2009	0,0000106	0,11283306	0,00020441	0,0164106
2010	0,0000097	0,11267936	0,00017634	0,01796557
2011	0,0000108	0,1108747	0,00000501	0,02974284
2012	0,0000086	0,11423054	0,00000001	0,03184033
2013	0,0000058	0,11903498	0,00000004	0,03457192

2002	0,0000086	0,10638644	0,00015156	0,00321084
2003	0,0000077	0,11077163	0,00019648	0,00427216
2004	0,0000101	0,10994938	0,00020597	0,00764448
2005	0,0000079	0,11398856	0,00023108	0,00891737
2006	0,0000075	0,11461908	0,00019970	0,01310942
2007	0,0000063	0,11647522	0,00014128	0,01808159
2008	0,0000071	0,11605631	0,00005272	0,02527349
2009	0,0000059	0,11826297	0,00000000	0,02973767
2010	0,0000051	0,11955704	0,00000019	0,03016863
2011	0,0000045	0,12040688	0,00000004	0,03059394
2012	0,0000029	0,12602732	0,00000000	0,03295184
2013	0,0000021	0,12887526	0,00000008	0,03419687

Παράμετροι ανδρών – Ιταλία

Έτη	θ	ξ	κ	λ
1993	0,000042	0,093778	0	0,00061617
1994	0,0000413	0,093968	0	0,00062729
1995	0,0000433	0,09369	0	0,00070383
1996	0,0000442	0,093446	0	0,00072885
1997	0,0000435	0,093758	0	0,00068035
1998	0,0000443	0,093583	0	0,00071237
1999	0,0000143	0,097095	1,29E-07	0,00025571
2000	0,0000129	0,100583	0,00000247	0,00024185
2001	0,0000473	0,10271	0,0000202	0,00096874
2002	0,0000177	0,099359	0,000005	0,00045309
2003	0,000016	0,10089	0,0000159	0,00038103
2004	0,0000165	0,100792	0,0000139	0,00033651
2005	0,0000164	0,097536	0,0000232	0,00051809
2006	0,0000335	0,093421	0,0000664	0,00326579
2007	0,0000276	0,095957	0,0000756	0,00414495
2008	0,0000222	0,099724	0,00010535	0,0054683
2009	0,0000197	0,102481	0,00012036	0,00844029
2010	0,000018	0,104041	0,0000846	0,01377318
2011	0,0000141	0,106996	0,0000967	0,01492079
2012	0,0000154	0,106617	7,86E-08	0,02229346
2013	0,0000136	0,107119	0,0000043	0,0229867

Παράμετροι ανδρών – Σουηδία

Έτη	θ	ξ	κ	λ
1993	0,0000226	0,1007583	0,0000153	0,000475
1994	0,0000571	0,0936226	0,0000274	0,001495
1995	0,0000324	0,0942819	0,0000286	0,000884
1996	0,0000124	0,1077448	0,0000141	0,000132
1997	0,0000131	0,1070698	9,26E-06	0,000165
1998	8,55E-06	0,1106192	7,01E-06	0,000151
1999	9,51E-06	0,1098234	0,000014	0,000137
2000	8,27E-06	0,1118787	0,0000149	0,000121
2001	3,08E-06	0,1149603	8,72E-06	8,54E-06
2002	5,59E-06	0,0962639	0,0000216	0,000289
2003	0,0000146	0,0938457	0,0000346	0,000945
2004	0,0000141	0,0985852	0,0000963	0,002746
2005	9,35E-06	0,0958593	0,00004	0,001038
2006	0,0000145	0,1020005	0,0001252	0,004109
2007	0,0000105	0,1011416	0,0000794	0,002081
2008	0,0000124	0,1040088	0,0001212	0,003874
2009	9,37E-06	0,1013788	0,0000638	0,001847
2010	0,0000124	0,1021006	0,0000999	0,003055
2011	9,79E-06	0,1065754	0,0001372	0,004267
2012	0,0000103	0,1072739	0,0001193	0,005327
2013	4,61E-06	0,1074584	0,0000898	0,002251

Παράμετροι ανδρών – Εσθονία

Έτη	θ	ξ	κ	λ
1993	0,000157	0,068013	0,0000330	0
1994	6,75E-05	0,07179	0,0000750	0,000904
1995	5,64E-05	0,07542	0,0001070	0,001338
1996	5,51E-05	0,076262	0,0000995	0,001369

Παράμετροι ανδρών – Φινλανδία

Έτη	θ	ξ	κ	λ
1993	0,00008480	0,080391	0,0000058	0,002098
1994	0,00009090	0,080786	0,0000000	0,001827
1995	0,00014300	0,077453	0,0000000	0,003124
1996	0,00011100	0,079646	0,0000000	0,003093

1997	0,000155	0,069793	0,0000812	0,000688
1998	4,02E-05	0,078076	0,0001120	0,001417
1999	7,12E-05	0,073721	0,0000832	0,00104
2000	8,23E-05	0,073014	0,0001020	0,001264
2001	0,000028	0,081801	0,0001060	0,001436
2002	0,000127	0,068156	0,0000568	0,000494
2003	0,000038	0,079203	0,0000976	0,001334
2004	6,25E-05	0,073564	0,0000875	0,001197
2005	2,46E-05	0,079735	0,0000763	0,001151
2006	1,59E-05	0,085004	0,0000871	0,001256
2007	0,000145	0,065506	0,0000180	0
2008	0,000064	0,090195	0,0001220	0
2009	6,87E-05	0,081055	0,0000217	0,0000122
2010	0,000048	0,091936	0,0000938	0
2011	0,000052	0,088492	0,0001150	0
2012	3,99E-05	0,092304	0,0001540	0
2013	3,94E-05	0,092917	0,0001310	0

1997	0,00008030	0,086515	0,0000444	0,003848
1998	0,00006650	0,087876	0,0000663	0,00342
1999	0,00001550	0,097804	0,0000207	0,0000649
2000	0,00004560	0,095516	0,0001000	0,00546
2001	0,00005670	0,095053	0,0000736	0,007631
2002	0,00004970	0,098435	0,0001330	0,002737
2003	0,00002160	0,098133	0,0001100	0,002364
2004	0,00002220	0,099393	0,0001570	0,00333
2005	0,00001240	0,115212	0,0003920	0,006408
2006	0,00001690	0,106768	0,0002170	0,006458
2007	0,00001730	0,107782	0,0002250	0,008582
2008	0,00000567	0,110985	0,0001760	0,003512
2009	0,00000979	0,107871	0,0001860	0,004758
2010	0,00000978	0,112597	0,0002550	0,00706
2011	0,00000663	0,114577	0,0002500	0,005945
2012	0,00000503	0,118223	0,0002450	0,008023
2013	0,00000441	0,116032	0,0002330	0,004881

Παράμετροι ανδρών – Ισλανδία

Έτη	θ	ξ	κ	λ
1993	0,00006203	0,0864773	0,0000000	0,00055146
1994	0,00007834	0,0877519	0,0000000	0,00240474
1995	0,00007390	0,087254	0,0000000	0,00147129
1996	0,00007630	0,0938954	0,0000000	0,00682613
1997	0,00004512	0,0920906	0,0000000	3,5963E-05
1998	0,00005614	0,0918162	0,0000000	0,00166011
1999	0,00001854	0,1042585	0,0001496	0,00896996
2000	0,00000360	0,1153262	0,0000164	9,1293E-05
2001	0,00001008	0,1092486	0,0000017	0,00038249
2002	0,00008879	0,0928532	0,0000000	0,00753656
2003	0,00001592	0,1055704	0,0000000	0,02443787
2004	0,00000356	0,1078711	0,0000041	0,00015383
2005	0,00001516	0,1096292	0,0000000	0,02388141
2006	0,00000078	0,1394795	0,0003317	0,0094237
2007	0,00002696	0,0979256	0,0000000	0,00551885
2008	0,00001576	0,0986025	0,0000000	0,00050752
2009	0,00000344	0,1101017	0,0000743	0,00247025
2010	0,00002472	0,0991721	0,0000000	0,00682648
2011	0,00000264	0,1176068	0,0000013	0,00017603
2012	0,00001827	0,1002132	0,0000000	0,00689008
2013	0,00003064	0,0975215	0,0000000	0,00649343

Παράμετροι ανδρών – Ιρλανδία

Έτη	θ	ξ	κ	λ
1993	0,00004897	0,094204	0,0000000	0,00031257
1994	0,00004800	0,09418	0,0000000	0,00036446
1995	0,00005078	0,0944002	0,0000000	0,00044642
1996	0,00004715	0,0947618	0,0000000	0,00073509
1997	0,00004878	0,0944953	0,0000000	0,00075514
1998	0,00004798	0,0947834	0,0000000	0,00115459
1999	0,00004732	0,0951027	0,0000000	0,00121924
2000	0,00004897	0,0944892	0,0000000	0,00149225
2001	0,00004506	0,0945907	0,0000000	0,00132364
2002	0,00008720	0,0903671	0,0000000	0,00537637
2003	0,00005675	0,0877155	0,0000000	0,00316614
2004	0,00004906	0,0937461	0,0000000	0,00243757
2005	0,00002742	0,0944022	0,0000045	0,00124973
2006	0,00005049	0,0930557	0,0000000	0,00282856
2007	0,00001400	0,1002452	0,0000184	0,00072572
2008	0,00000837	0,1076797	0,0000085	0,00022488
2009	0,00005278	0,0934065	0,0000000	0,00701021
2010	0,00003563	0,0980986	0,0000448	0,00642516
2011	0,00003227	0,0942035	0,0000272	0,00378725
2012	0,00003178	0,1000871	0,0000000	0,01316494
2013	0,00002373	0,1032023	0,0000000	0,01528075

Παράμετροι ανδρών – Τσεχία

Παράμετροι ανδρών – Ισπανία

Έτη	θ	ξ	κ	λ
1993	0,00006203	0,0864773	0,0000000	0,00055146
1994	0,00007834	0,0877519	0,0000000	0,00240474
1995	0,00007390	0,087254	0,0000000	0,00147129
1996	0,00007630	0,0938954	0,0000000	0,00682613
1997	0,00004512	0,0920906	0,0000000	3,5963E-05
1998	0,00005614	0,0918162	0,0000000	0,00166011
1999	0,00001854	0,1042585	0,0001496	0,00896996
2000	0,00000360	0,1153262	0,0000164	9,1293E-05
2001	0,00001008	0,1092486	0,0000017	0,00038249
2002	0,00008879	0,0928532	0,0000000	0,00753656
2003	0,00001592	0,1055704	0,0000000	0,02443787
2004	0,00000356	0,1078711	0,0000041	0,00015383
2005	0,00001516	0,1096292	0,0000000	0,02388141
2006	0,00000078	0,1394795	0,0003317	0,0094237
2007	0,00002696	0,0979256	0,0000000	0,00551885
2008	0,00001576	0,0986025	0,0000000	0,00050752
2009	0,00000344	0,1101017	0,0000743	0,00247025
2010	0,00002472	0,0991721	0,0000000	0,00682648
2011	0,00000264	0,1176068	0,0000013	0,00017603
2012	0,00001827	0,1002132	0,0000000	0,00689008
2013	0,00003064	0,0975215	0,0000000	0,00649343

Έτη	θ	ξ	κ	λ
1993	0,00002053	0,0866823	0,0000050	0,00073568
1994	0,00003185	0,0941478	0,0000338	0,0010155
1995	0,00004926	0,0836003	0,0000000	0,00282282
1996	0,00004386	0,0975817	0,0000707	0,00144385
1997	0,00003815	0,0909803	0,0000355	0,0015398
1998	0,00004151	0,0917772	0,0000363	0,00154553
1999	0,00002378	0,093161	0,0000355	0,00087024
2000	0,00002902	0,0919621	0,0000433	0,00120812
2001	0,00002935	0,0919271	0,0000619	0,00180991
2002	0,00003992	0,0939152	0,0000927	0,00469634
2003	0,00002859	0,0984423	0,0001149	0,00560653
2004	0,00002876	0,0990188	0,0001208	0,00760165
2005	0,00002574	0,1007981	0,0001282	0,00840088
2006	0,00001653	0,105153	0,0001725	0,00956686
2007	0,00001923	0,1034437	0,0001301	0,01211665
2008	0,00001368	0,1075312	0,0001690	0,01134555
2009	0,00001247	0,1065538	0,0001299	0,01410637
2010	0,00001393	0,1057372	0,0000000	0,02431543
2011	0,00001359	0,1070083	0,0000000	0,02635568
2012	0,00000992	0,1106406	0,0000000	0,02765332
2013	0,00001047	0,110377	0,0000000	0,02894405

Παράμετροι ανδρών – Πορτογαλία

Έτη	θ	ξ	κ	λ
1993	0,00002697	0,1026083	0,0000314	0,00055155
1994	0,00007010	0,0877478	0,0000000	0,00330563
1995	0,00007062	0,0889563	0,0000000	0,00368368
1996	0,00006892	0,0896456	0,0000000	0,00543046
1997	0,00005970	0,0882473	0,0000000	0,00403632
1998	0,00006676	0,0903331	0,0000000	0,00520268
1999	0,00006291	0,0915517	0,0000000	0,00567039
2000	0,00007186	0,0927808	0,0000000	0,00845551
2001	0,00005921	0,0902056	0,0000000	0,00633067
2002	0,00005080	0,1015805	0,0000751	0,01223622
2003	0,00004341	0,1012826	0,0000664	0,01217994
2004	0,00006163	0,0935011	0,0000000	0,01144501
2005	0,00003526	0,1051198	0,0000779	0,01535104
2006	0,00004161	0,1010078	0,0000003	0,01969268
2007	0,00003394	0,1016686	0,0000000	0,01904642
2008	0,00002896	0,1040531	0,0000000	0,01985223
2009	0,00002411	0,1056042	0,0000000	0,02153916
2010	0,00001549	0,1090543	0,0000000	0,02279361
2011	0,00001383	0,1100849	0,0000000	0,02443662

Παράμετροι ανδρών – Ελλάδα

Έτη	θ	ξ	κ	λ
1993	0,00005459	0,0906468	0,0000000	0,00128359
1994	0,00004718	0,092741	0,0000000	0,00119364
1995	0,00007695	0,0863584	0,0000000	0,00297514
1996	0,00008736	0,0874919	0,0000000	0,00354692
1997	0,00008577	0,0861233	0,0000000	0,00315426
1998	0,00004935	0,0882954	0,0000087	0,00215436
1999	0,00007234	0,0857551	0,0000000	0,00358904
2000	0,00004497	0,0895861	0,0000164	0,00245049
2001	0,00003378	0,0923704	0,0000393	0,00209448
2002	0,00003474	0,0922431	0,0000300	0,00155408
2003	0,00003983	0,093922	0,0000610	0,0027533
2004	0,00003091	0,0935684	0,0000555	0,00202973
2005	0,00004118	0,0963992	0,0000820	0,00335929
2006	0,00000749	0,0959343	0,0000202	0,00041884
2007	0,00002778	0,09598	0,0000724	0,00211851
2008	0,00003023	0,1032762	0,0001630	0,00881361
2009	0,00003205	0,102706	0,0001230	0,01118895
2010	0,00003408	0,1003683	0,0000518	0,01697802
2011	0,00002931	0,1002855	0,0000000	0,02178552

2012	0,00000897	0,1147903	0,0000000	0,02469734
2013	0,00000656	0,1186909	0,0000000	0,02802901

2012	0,00003124	0,0998063	0,0000000	0,02247175
2013	0,00003029	0,0990732	0,0000000	0,02313439

Παράμετροι ανδρών – Λιθουανία

Έτη	θ	ξ	κ	λ
1993	0,00001950	0,0903715	0,0001418	0,00187811
1994	0,00001392	0,095433	0,0001753	0,00234352
1995	0,00001426	0,0971072	0,0002443	0,00306908
1996	0,00002071	0,0862853	0,0001055	0,00147098
1997	0,00003808	0,081294	0,0000880	0,00129348
1998	0,00003823	0,0785291	0,0000721	0,00100214
1999	0,00006409	0,0776754	0,0000903	0,00124713
2000	0,00006808	0,07297	0,0000555	0,00073282
2001	0,00003258	0,0797424	0,0000710	0,00105605
2002	0,00002635	0,0822297	0,0000783	0,00116412
2003	0,00001517	0,0884669	0,0000878	0,00131299
2004	0,00002499	0,0811389	0,0000844	0,00122154
2005	0,00001522	0,0854528	0,0000972	0,00144398
2006	0,00000981	0,0894725	0,0001187	0,00160762
2007	0,00000687	0,0937971	0,0001140	0,00161833
2008	0,00000239	0,1056	0,0001142	0,00165245
2009	0,00000997	0,0882808	0,0000898	0,00136889
2010	0,00000418	0,0969888	0,0000941	0,001373
2011	0,00000790	0,0889769	0,0000844	0,00123663
2012	0,00001233	0,0850372	0,0000805	0,00126205
2013	0,00000400	0,0970653	0,0000780	0,00118593

Παράμετροι ανδρών – Λετονία

Έτη	θ	ξ	κ	λ
1993	0,00007122	0,0727091	0,0000953	0,00117114
1994	0,00001429	0,0905699	0,0001562	0,00186731
1995	0,00002657	0,0829258	0,0001341	0,00172473
1996	0,00011763	0,069276	0,0000681	0,00064198
1997	0,00008777	0,0722478	0,0000656	0,00077293
1998	0,00013526	0,0665743	0,0000723	0,00072907
1999	0,00019591	0,0645031	0,0000372	0
2000	0,00022053	0,0625162	0,0000363	0
2001	0,00006666	0,0741485	0,0000879	0,00118149
2002	0,00011754	0,0676925	0,0000682	0,00070033
2003	0,00006112	0,0753493	0,0001098	0,0014851
2004	0,00006714	0,072326	0,0000943	0,00124885
2005	0,00014481	0,0636502	0,0000591	0,00059544
2006	0,00005895	0,069963	0,0000839	0,00114226
2007	0,00003279	0,077559	0,0000911	0,00125489
2008	0,00003653	0,0779013	0,0000882	0,00123607
2009	0,00017037	0,06213	0,0000208	0
2010	0,00005452	0,0695597	0,0000614	0,00084972
2011	0,00007156	0,0827998	0,0000658	0
2012	0,00007057	0,0823149	0,0000908	0
2013	0,00001820	0,0859883	0,0001303	0,0018729

Παράμετροι ανδρών – Πολωνία

Έτη	θ	ξ	κ	λ
1993	0,00008858	0,08697573	0,0001907	0
1994	0,00009393	0,08626256	0,0002000	0
1995	0,00005174	0,07561389	0,0000529	0,00072576
1996	0,00009692	0,0851623	0,0002243	0
1997	0,00010540	0,08463863	0,0002203	0
1998	0,00011693	0,07392922	0,0000968	0,00099228
1999	0,00010477	0,08699376	0,0001500	0
2000	0,00011307	0,08723761	0,0001145	0
2001	0,00004472	0,09336723	0,0001171	0
2002	0,00006977	0,08365038	0,0000105	0
2003	0,00006796	0,08397405	0,0000104	0
2004	0,00005811	0,08705902	0,0000925	0
2005	0,00004132	0,09295703	0,0001406	0

Παράμετροι ανδρών – Νορβηγία

Έτη	θ	ξ	κ	λ
1993	0,00004559	0,09402108	0,0000000	0,00065016
1994	0,00004520	0,09340638	0,0000000	0,00052226
1995	0,00004215	0,09469946	0,0000000	0,00094743
1996	0,00004716	0,09356256	0,0000000	0,00088095
1997	0,00004453	0,09418264	0,0000000	0,00119007
1998	0,00008061	0,08568111	0,0000000	0,00308311
1999	0,00003708	0,09447063	0,0000017	0,001725
2000	0,00005062	0,09369588	0,0000000	0,00372788
2001	0,00004500	0,09486535	0,0000000	0,00349562
2002	0,00000875	0,11114163	0,0000114	0,00029713
2003	0,00000329	0,11673467	0,0000124	5,1982E-05
2004	0,00001359	0,09915542	0,0000220	0,00084218
2005	0,00001759	0,09896501	0,0000260	0,00152773

2006	0,00001539	0,09146602	0,0001477	0,00221913
2007	0,00000935	0,0932199	0,0001096	0,0016766
2008	0,00001033	0,09769709	0,0001746	0,00260467
2009	0,00000582	0,09933729	0,0001253	0,00191247
2010	0,00005266	0,08663602	0,0001411	0
2011	0,00000802	0,10001526	0,0001889	0,00282491
2012	0,00002049	0,09422875	0,0002596	0,00054454
2013	0,00003803	0,09279066	0,0001380	0

2006	0,00002109	0,10105547	0,0000835	0,00570907
2007	0,00001171	0,09708457	0,0000297	0,00105368
2008	0,00000557	0,09998757	0,0000209	0,0006014
2009	0,00001639	0,10127449	0,0000770	0,00352883
2010	0,00000511	0,0983881	0,0000262	0,00061652
2011	0,00001803	0,09947527	0,0000558	0,00308
2012	0,00001079	0,10874858	0,0001445	0,00543469
2013	0,00001924	0,10261206	0,0000946	0,00838688

Παράμετροι ανδρών – Αυστρία

Έτη	θ	ξ	κ	λ
1993	0,00003308	0,09827183	0,0000152	0,00022258
1994	0,00003792	0,09669877	0,0000106	0,00031242
1995	0,00003066	0,09904575	0,0000192	0,00015514
1996	0,00002242	0,09994596	0,0000174	5,5705E-05
1997	0,00002506	0,09986853	0,0000141	0,00011631
1998	0,00003048	0,09623689	0,0000519	0
1999	0,00002030	0,10155658	0,0000140	0,00011092
2000	0,00001569	0,10318968	0,0000193	2,6638E-05
2001	0,00001055	0,09303932	0,0000395	0,00082361
2002	0,00000726	0,09401618	0,0000306	0,00048856
2003	0,00001568	0,09251844	0,0000558	0,00124158
2004	0,00001424	0,09624132	0,0000852	0,0017826
2005	0,00001393	0,10755198	0,0002354	0,0064439
2006	0,00001018	0,11110351	0,0002512	0,00711573
2007	0,00001249	0,11021005	0,0002918	0,00571228
2008	0,00000439	0,11961453	0,0002751	0,0075678
2009	0,00000698	0,11565025	0,0002036	0,01589805
2010	0,00000414	0,12179353	0,0001899	0,02050986
2011	0,00000500	0,11867989	0,0001105	0,02423433
2012	0,00000188	0,12943315	0,0003335	0,01257555
2013	0,00000392	0,12204739	0,0000172	0,03369048

Παράμετροι ανδρών – Ολλανδία

Έτη	θ	ξ	κ	λ
1993	0,00007671	0,08824407	0,0000000	0,00075859
1994	0,00004815	0,09329156	0,0000000	0,00036664
1995	0,00008051	0,08428734	0,0000000	0,00101924
1996	0,00008075	0,08426807	0,0000000	0,00110573
1997	0,00004867	0,09342897	0,0000000	0,00047616
1998	0,00004561	0,09382274	0,0000000	0,00055613
1999	0,00004697	0,09390543	0,0000000	0,00072266
2000	0,00004967	0,09334058	0,0000000	0,00112046
2001	0,00004776	0,08903355	0,0000000	0,00097119
2002	0,00005932	0,08775898	0,0000000	0,00163247
2003	0,00002773	0,09734122	0,0000212	0,00075349
2004	0,00002220	0,09918073	0,0000126	0,00041733
2005	0,00004092	0,09556145	0,0000359	0,00125256
2006	0,00001972	0,09397757	0,0000232	0,00054712
2007	0,00002428	0,09131556	0,0000459	0,00127296
2008	0,00002744	0,09747658	0,0001058	0,00240759
2009	0,00002914	0,09162461	0,0000650	0,00180992
2010	0,00001112	0,09187216	0,0000384	0,00080445
2011	0,00002924	0,09777534	0,0001181	0,00633385
2012	0,00001453	0,10877653	0,0002081	0,0083689
2013	0,00001216	0,10783135	0,0001571	0,01172892

Παράμετροι ανδρών – Ελβετία

Έτη	θ	ξ	κ	λ
1993	0,00004279	0,09399941	0,0000000	0,00132089
1994	0,00001591	0,09491295	0,0000012	0,00065948
1995	0,00001798	0,10557528	0,0000165	0,00036817
1996	0,00001444	0,10752804	0,0000136	0,00035173
1997	0,00000962	0,10947646	0,0000170	0,00014631
1998	0,00001184	0,10661577	0,0000198	0,0003164
1999	0,00000877	0,11019395	0,0000132	0,0001639
2000	0,00000755	0,11025864	0,0000164	0,000135

Παράμετροι ανδρών – Βέλγιο

Έτη	θ	ξ	κ	λ
1993	0,00005986	0,09101183	0,0000000	0,00156999
1994	0,00006317	0,08945228	0,0000000	0,00171712
1995	0,00008147	0,08639977	0,0000000	0,00252646
1996	0,00009529	0,09438848	0,0000418	0,00427388
1997	0,00003673	0,09378469	0,0000247	0,00105965
1998	0,00005188	0,08981883	0,0000155	0,00145594
1999	0,00004515	0,09171128	0,0000488	0,00213269
2000	0,00002622	0,0955479	0,0000291	0,00083251

2001	0,00000435	0,11261648	0,0000130	3,2E-05
2002	0,00000204	0,11393468	0,0000075	3,4457E-06
2003	0,00001464	0,10429788	0,0001227	0,00422891
2004	0,00001219	0,10069279	0,0000843	0,00251928
2005	0,00001186	0,10724845	0,0001403	0,00481045
2006	0,00001420	0,10462126	0,0001175	0,00519229
2007	0,00000747	0,11418104	0,0001184	0,01575465
2008	0,00000679	0,11556211	0,0001132	0,0160264
2009	0,00001098	0,10891687	0,0000723	0,01406031
2010	0,00000557	0,1174151	0,0001981	0,01056287
2011	0,00000798	0,11283753	0,0001057	0,01532995
2012	0,00000324	0,12291192	0,0001676	0,01516986
2013	0,00000371	0,122661	0,0001388	0,0175835

2001	0,00002128	0,09615335	0,0000571	0,00166011
2002	0,00001205	0,09420615	0,0000255	0,00056613
2003	0,00001622	0,09715257	0,0000589	0,00143936
2004	0,00002037	0,09677437	0,0000767	0,00202333
2005	0,00001569	0,10326794	0,0001570	0,003956
2006	0,00001688	0,10203379	0,0001421	0,00365233
2007	0,00001507	0,10485024	0,0001793	0,00484074
2008	0,00000845	0,11483724	0,0002496	0,0093257
2009	0,00000803	0,1147388	0,0002267	0,01105323
2010	0,00000906	0,11267803	0,0002238	0,01004133
2011	0,00000736	0,11464657	0,0002553	0,00942036
2012	0,00000395	0,12056608	0,0002927	0,00745551
2013	0,00000339	0,12110108	0,0002913	0,00749491

Παράμετροι ανδρών – Δανία				
Έτη	**θ**	**ξ**	**κ**	**λ**
1993	0,00004636	0,09389313	0,0000506	0
1994	0,00004848	0,09266244	0,0000000	0,00022586
1995	0,00004827	0,09297273	0,0000000	0,00022005
1996	0,00005046	0,09248586	0,0000000	0,00019432
1997	0,00005015	0,0925269	0,0000000	0,00028572
1998	0,00004787	0,09246155	0,0000000	0,00024555
1999	0,00004441	0,09350577	0,0000449	0
2000	0,00007834	0,08496129	0,0000000	0,00092709
2001	0,00012448	0,09090572	0,0000691	0,00301386
2002	0,00004797	0,09148646	0,0000228	0,00060416
2003	0,00003808	0,08728159	0,0000600	0,00139198
2004	0,00007456	0,09793593	0,0001513	0,00172364
2005	0,00006460	0,09093845	0,0001079	0,0064871
2006	0,00001512	0,08699165	0,0000248	0,00036993
2007	0,00003001	0,09812563	0,0001739	0,00696251
2008	0,00001071	0,09376745	0,0000635	0,0009577
2009	0,00001608	0,10673807	0,0002582	0,0059289
2010	0,00002206	0,10286485	0,0001603	0,01387965
2011	0,00001141	0,09785675	0,0001046	0,00211136
2012	0,00002112	0,10445255	0,0000815	0,02321293
2013	0,00001476	0,10918056	0,0000000	0,02917503

Παράμετροι ανδρών – Αγγλία				
Έτη	**θ**	**ξ**	**κ**	**λ**
1993	0,00004841	0,09347095	0,0000000	0,0002205
1994	0,00004707	0,09312374	0,0000000	0,00025559
1995	0,00006303	0,08797371	0,0000000	0,00056776
1996	0,00004728	0,09322585	0,0000000	0,00038718
1997	0,00004547	0,09331412	0,0000000	0,00044721
1998	0,00004583	0,09331803	0,0000000	0,00050431
1999	0,00004519	0,09360907	0,0000000	0,00068992
2000	0,00004699	0,09317959	0,0000000	0,00083386
2001	0,00006435	0,08887605	0,0000000	0,00179246
2002	0,00004649	0,08744835	0,0000000	0,00133503
2003	0,00002797	0,09638028	0,0000221	0,00067735
2004	0,00003032	0,09402028	0,0000254	0,00080717
2005	0,00001262	0,1019164	0,0000195	0,00017078
2006	0,00001847	0,0933978	0,0000311	0,00087396
2007	0,00001787	0,09362912	0,0000367	0,00108467
2008	0,00000805	0,09484022	0,0000211	0,00053143
2009	0,00001421	0,09463787	0,0000408	0,00123754
2010	0,00000734	0,09478381	0,0000286	0,00061662
2011	0,00001320	0,09526866	0,0000573	0,00169662
2012	0,00001453	0,09763704	0,0000790	0,00254549
2013	0,00001366	0,09931499	0,0000880	0,00287075

Πίνακας 13. Οι εκτιμήσεις των 4 παραμέτρων για τις 22 χώρες της ανάλυσης (Males 1993 – 2013)

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ A_9

Στο παρόν παράρτημα παρουσιάζονται τα κριτήρια στατιστικής σημαντικότητας της πρόβλεψης των τεσσάρων παραμέτρων της $f_{BGGM}(x;\alpha,\beta,\theta,\xi,\kappa,\lambda)$. Η σημασία της τιμής για την κάθε παράμετρο εξηγήθηκε στο κεφάλαιο 6. Για κάθε εκτίμηση των παραμέτρων έγινε προσπάθεια προβολής της στο μέλλον, με τη συνάρτηση FORECAST.ETS στο λογισμικό του Excel και της R. Ο στατιστικός έλεγχος των μελλοντικών εκτιμώμενων τιμών περιλαμβάνει μέτρα, όπως ο Συντελεστής βαρύτητας Alpha και ο Δείκτης τάσης beta με τις αντίστοιχες ποινές των μετρήσεων των σφαλμάτων (MASE, SMAPE, MAE, MSE). Στο 6.2 έγινε σχετική περιγραφή των όρων που αναφέρονται για την όσο το δυνατόν καλύτερη ισχυροποίηση των μελλοντικών δεδομένων.

Άνδρες 2013 - 2045						
Δανία (1)	*Alpha*	*beta*	*MASE*	*SMAPE*	*MAE*	*MSE*
θ	0,5000	0,0010	4,9624	0,6048	0,0002	0,0002
ξ	0,1260	0,0010	4,9593	0,0461	0,0044	0,0060
κ	0,2510	0,0010	0,7270	1,3312	0,0003	0,0004
λ	0,1260	0,0010	30,1623	1,1289	0,0040	0,0069
Πολωνία (19)	*Alpha*	*beta*	*MASE*	*SMAPE*	*MAE*	*MSE*
θ	0,7510	0,0010	1,3977	1,0032	0,0035	0,0045
ξ	0,3333	0,0010	1,4873	0,0557	0,0048	0,0065
κ	0,2510	0,0010	1,1063	1,4173	0,0027	0,0036
λ	0,7510	0,0010	1,0828	1,6165	0,0014	0,0019
Γερμανία (17)	*Alpha*	*beta*	*MASE*	*SMAPE*	*MAE*	*MSE*
θ	0,2500	0,0010	0,2901	0,1335	0,0000	0,0000
ξ	0,1000	0,0010	2,3382	0,0487	0,0052	0,0056
κ	0,0020	0,0010	2,8319	1,1197	0,0001	0,0001
λ	0,1260	0,0010	42,6231	0,5727	0,0078	0,0091
Ολλανδία (6)	*Alpha*	*beta*	*MASE*	*SMAPE*	*MAE*	*MSE*
θ	0,3333	0,0010	1,9759	0,4222	0,0010	0,0011
ξ	0,8333	0,0010	3,3214	0,0405	0,0038	0,0049
κ	0,5010	0,0010	0,9755	1,5095	0,0023	0,0028
λ	0,2510	0,0010	1,6666	1,4006	0,0031	0,0037
Βέλγιο (11)	*Alpha*	*beta*	*MASE*	*SMAPE*	*MAE*	*MSE*
θ	0,2500	0,0010	0,2440	0,4930	0,0000	0,0001
ξ	0,3333	0,0010	2,0244	0,0266	0,0026	0,0036
κ	0,5000	0,0010	1,5545	0,8846	0,0002	0,0003
λ	0,2510	0,0010	2,9380	0,5645	0,0019	0,0025
Ισλανδία (4)	*Alpha*	*beta*	*MASE*	*SMAPE*	*MAE*	*MSE*
θ	0,1667	0,0010	0,5806	0,3945	0,0012	0,0020
ξ	0,1667	0,0010	1,0798	0,1193	0,0123	0,0148
κ	0,2510	0,0010	0,6743	1,8512	0,0020	0,0027
λ	0,6667	0,0010	2,5818	1,3588	0,0083	0,0098
Ιρλανδία (13)	*Alpha*	*beta*	*MASE*	*SMAPE*	*MAE*	*MSE*
θ	0,1000	0,0010	2,4063	0,3838	0,0016	0,0020
ξ	0,0020	0,0010	2,0387	0,0290	0,0028	0,0040
κ	0,2510	0,0010	1,0645	1,8020	0,0015	0,0023
λ	0,9000	0,0010	7,7331	0,6402	0,0023	0,0039

Ην. Βασίλειο (22)	*Alpha*	*beta*	*MASE*	*SMAPE*	*MAE*	*MSE*
θ	0,1260	0,0010	1,4619	0,4546	0,0013	0,0020
ξ	0,6667	0,0010	5,7394	0,0280	0,0026	0,0038
κ	0,6667	0,0010	1,2996	1,2127	0,0014	0,0018
λ	0,0020	0,0010	1,4259	0,8358	0,0027	0,0035
Σουηδία (8)	*Alpha*	*beta*	*MASE*	*SMAPE*	*MAE*	*MSE*
θ	0,5000	0,0010	0,2491	0,3347	0,0000	0,0000
ξ	0,5000	0,0010	1,7472	0,0528	0,0054	0,0068
κ	0,1260	0,0010	10,3799	0,5184	0,0000	0,0000
λ	0,0020	0,0010	3,4387	0,9114	0,0014	0,0016
Νορβηγία (7)	*Alpha*	*beta*	*MASE*	*SMAPE*	*MAE*	*MSE*
θ	0,0020	0,0010	3,2466	0,6690	0,0019	0,0020
ξ	0,1667	0,0010	5,9519	0,0561	0,0057	0,0078
κ	0,9000	0,0010	0,0000	1,5866	0,0033	0,0050
λ	0,5010	0,0010	15,9048	0,8074	0,0019	0,0024
Φινλανδία (2)	*Alpha*	*beta*	*MASE*	*SMAPE*	*MAE*	*MSE*
θ	0,1260	0,0010	2,3735	0,6261	0,0003	0,0003
ξ	0,6667	0,0010	3,3259	0,0522	0,0051	0,0067
κ	0,2510	0,0010	0,8460	1,1262	0,0002	0,0003
λ	0,1667	0,0010	2,8593	0,4040	0,0018	0,0023
Εσθονία (14)	*Alpha*	*beta*	*MASE*	*SMAPE*	*MAE*	*MSE*
θ	0,2510	0,0010	0,6346	0,7005	0,0022	0,0028
ξ	0,1260	0,0010	1,5741	0,1218	0,0096	0,0106
κ	0,1260	0,0010	3,8655	1,1128	0,0374	0,0339
λ	0,1260	0,0010	2,1298	1,8283	0,0130	0,0142
Λετονία (15)	*Alpha*	*beta*	*MASE*	*SMAPE*	*MAE*	*MSE*
θ	0,2500	0,0010	1,2313	0,7950	0,0028	0,0030
ξ	0,2510	0,0010	2,0222	0,0978	0,0071	0,0081
κ	0,2510	0,0010	0,9843	0,7169	0,0029	0,0035
λ	0,7500	0,0010	0,3039	1,0652	0,0006	0,0008
Λιθουανία (16)	*Alpha*	*beta*	*MASE*	*SMAPE*	*MAE*	*MSE*
θ	0,6667	0,0010	0,4450	0,6201	0,0001	0,0001
ξ	0,5010	0,0010	2,1091	0,1006	0,0089	0,0104
κ	0,2510	0,0010	1,4786	0,6544	0,0003	0,0004
λ	0,2500	0,0010	1,2875	1,3522	0,0028	0,0031
Τσεχία (12)	*Alpha*	*beta*	*MASE*	*SMAPE*	*MAE*	*MSE*
θ	0,2500	0,0010	0,9327	0,5011	0,0000	0,0000
ξ	0,0020	0,0010	0,9374	0,0145	0,0014	0,0018
κ	0,5000	0,0010	1,8463	1,2436	0,0025	0,0035
λ	0,1260	0,0010	0,1506	2,0000	0,0001	0,0001
Αυστρία (10)	*Alpha*	*beta*	*MASE*	*SMAPE*	*MAE*	*MSE*
θ	0,2510	0,0010	1,0249	0,6886	0,0015	0,0020
ξ	0,1667	0,0010	3,1656	0,0701	0,0074	0,0093
κ	0,2510	0,0010	1,5579	0,8630	0,0015	0,0021
λ	0,0020	0,0010	17,7415	1,2254	0,0071	0,0090
Ελβετία (9)	*Alpha*	*beta*	*MASE*	*SMAPE*	*MAE*	*MSE*
θ	0,1260	0,0010	1,9515	0,7114	0,0025	0,0028
ξ	0,7500	0,0010	3,1362	0,0331	0,0036	0,0046
κ	0,5010	0,0010	3,7686	0,7320	0,0002	0,0003
λ	0,0020	0,0010	34,2168	1,0513	0,0057	0,0063
Γαλλία (3)	*Alpha*	*beta*	*MASE*	*SMAPE*	*MAE*	*MSE*
θ	0,7500	0,0010	0,1511	0,3315	0,0000	0,0000
ξ	0,2500	0,0010	2,8402	0,0657	0,0069	0,0079
κ	0,9980	0,0010	1,5767	0,6457	0,0000	0,0000
λ	0,9000	0,0010	7,3313	0,4503	0,0018	0,0024
Πορτογαλία (20)	*Alpha*	*beta*	*MASE*	*SMAPE*	*MAE*	*MSE*

θ	0,0020	0,0010	0,8757	0,4347	0,0020	0,0026
ξ	0,8333	0,0010	3,9545	0,0726	0,0072	0,0091
κ	0,1260	0,0010	2,1721	1,6665	0,0016	0,0023
λ	0,2500	0,0010	4,9195	0,7572	0,0066	0,0077
Ισπανία (21)	*Alpha*	*beta*	*MASE*	*SMAPE*	*MAE*	*MSE*
θ	0,1000	0,0010	0,3380	0,2203	0,0000	0,0000
ξ	0,3333	0,0010	1,0492	0,0330	0,0032	0,0042
κ	0,9980	0,0010	14,6509	0,8278	0,0000	0,0001
λ	0,0020	0,0010	21,2727	0,9118	0,0075	0,0092
Ιταλία (5)	*Alpha*	*beta*	*MASE*	*SMAPE*	*MAE*	*MSE*
θ	0,0020	0,0010	1,0619	0,5771	0,0000	0,0000
ξ	0,2500	0,0010	2,4155	0,0363	0,0036	0,0046
κ	0,1260	0,0010	2,2779	1,6309	0,0001	0,0001
λ	0,1000	0,0010	12,3648	1,1257	0,0036	0,0050
Ελλάδα (18)	*Alpha*	*beta*	*MASE*	*SMAPE*	*MAE*	*MSE*
θ	0,5000	0,0010	0,7235	0,6745	0,0001	0,0002
ξ	0,2510	0,2510	0,2510	0,2510	0,2510	0,2510
κ	0,2510	0,0010	0,2384	0,6658	0,0002	0,0003
λ	0,7500	0,0010	2,1830	0,2165	0,0012	0,0018

Γυναίκες 2013 - 2045						
Δανία (1)	*Alpha*	*beta*	*MASE*	*SMAPE*	*MAE*	*MSE*
θ	0,0020	0,0010	1,4716	0,2108	0,0000	0,0001
ξ	0,3333	0,0010	2,2689	0,0013	0,0003	0,0004
κ	0,3333	0,0010	2,8485	0,0170	0,0000	0,0000
λ	0,6667	0,0010	1,2541	0,0093	0,0002	0,0002
Πολωνία (19)	*Alpha*	*beta*	*MASE*	*SMAPE*	*MAE*	*MSE*
θ	0,9000	0,0010	1,9377	0,0181	0,0001	0,0001
ξ	0,9000	0,0010	1,9254	0,0015	0,0003	0,0005
κ	0,2510	0,0010	2,3591	0,0166	0,0000	0,0000
λ	0,9980	0,0010	2,4342	0,0190	0,00034	0,00046
Γερμανία (17)	*Alpha*	*beta*	*MASE*	*SMAPE*	*MAE*	*MSE*
θ	0,2510	0,0010	2,4422	0,0133	0,0000	0,0000
ξ	0,9980	0,0010	2,2805	0,0011	0,0003	0,0004
κ	0,1260	0,0010	2,9770	0,0232	0,0000	0,0000
λ	0,1000	0,0010	5,4428	0,0168	0,0003	0,0004
Ολλανδία (6)	*Alpha*	*beta*	*MASE*	*SMAPE*	*MAE*	*MSE*
θ	0,2510	0,0010	0,3888	0,0069	0,0000	0,0000
ξ	0,7510	0,0010	0,8602	0,0016	0,0004	0,0005
κ	0,5000	0,0010	0,9615	0,0172	0,0000	0,0000
λ	0,2510	0,0010	0,7747	0,0125	0,00022	0,00026
Βέλγιο (11)	*Alpha*	*beta*	*MASE*	*SMAPE*	*MAE*	*MSE*
θ	0,0020	0,0010	0,8238	0,2092	0,0007	0,0011
ξ	0,5010	0,0010	1,4858	0,0014	0,0003	0,0005
κ	0,1260	0,0010	2,2883	0,0192	0,0000	0,0000
λ	0,5000	0,0010	0,9082	0,0084	0,00014	0,00019
Ισλανδία (4)	*Alpha*	*beta*	*MASE*	*SMAPE*	*MAE*	*MSE*
θ	0,0020	0,0010	0,5557	0,0110	0,0000	0,0001
ξ	0,0020	0,0010	1,0055	0,0016	0,0004	0,0004
κ	0,0020	0,0010	1,7465	0,0354	0,0000	0,0000
λ	0,0020	0,0010	0,6629	0,0133	0,0002	0,0003
Ιρλανδία (13)	*Alpha*	*beta*	*MASE*	*SMAPE*	*MAE*	*MSE*
θ	0,2510	0,0010	0,6487	0,0081	0,0000	0,0000
ξ	0,2510	0,0010	1,9235	0,0013	0,0003	0,0004

κ	0,1260	0,0010	1,9883	0,0151	0,0000	0,0000
λ	0,5010	0,0010	1,4879	0,0124	0,0002	0,0003
Ην. Βασίλειο (22)	*Alpha*	*beta*	*MASE*	*SMAPE*	*MAE*	*MSE*
θ	0,1260	0,0010	1,2886	0,0966	0,0028	0,0040
ξ	0,1260	0,0010	2,4545	0,0015	0,0004	0,0004
κ	0,5010	0,0010	3,4693	0,0159	0,0000	0,0000
λ	0,9980	0,0010	2,2152	0,0119	0,0002	0,0003
Σουηδία (8)	*Alpha*	*beta*	*MASE*	*SMAPE*	*MAE*	*MSE*
θ	0,2510	0,0010	1,3023	0,0208	0,0000	0,0000
ξ	0,0020	0,0010	1,4163	0,0023	0,0006	0,0006
κ	0,0020	0,0010	1,5339	0,0310	0,0000	0,0000
λ	0,0020	0,0010	1,0069	0,0116	0,0002	0,0003
Νορβηγία (7)	*Alpha*	*beta*	*MASE*	*SMAPE*	*MAE*	*MSE*
θ	0,2510	0,0010	0,6464	0,0107	0,0000	0,0001
ξ	0,5010	0,0010	0,6450	0,0011	0,0003	0,0003
κ	0,3333	0,0010	0,7408	0,0201	0,0000	0,0000
λ	0,7510	0,0010	1,1623	0,0094	0,0002	0,0003
Φινλανδία (2)	*Alpha*	*beta*	*MASE*	*SMAPE*	*MAE*	*MSE*
θ	0,2500	0,0010	0,5730	0,0120	0,0000	0,0000
ξ	0,2510	0,0010	0,6864	0,0014	0,0003	0,0004
κ	0,0020	0,0010	1,5488	0,0382	0,0000	0,0000
λ	0,1260	0,0010	0,8389	0,0119	0,0002	0,0003
Εσθονία (14)	*Alpha*	*beta*	*MASE*	*SMAPE*	*MAE*	*MSE*
θ	0,0020	0,0010	1,5048	0,3354	0,0008	0,0010
ξ	0,5010	0,0010	1,4584	0,0007	0,0002	0,0002
κ	0,1260	0,0010	2,6477	0,0132	0,000010	0,00001
λ	0,8333	0,0010	2,0191	0,0133	0,0002	0,0003
Λετονία (15)	*Alpha*	*beta*	*MASE*	*SMAPE*	*MAE*	*MSE*
θ	0,9000	0,0010	1,7253	0,0092	0,0000	0,0000
ξ	0,9000	0,0010	1,7375	0,0008	0,0002	0,0002
κ	0,9000	0,0010	2,3779	0,0123	0,000009	0,000011
λ	0,9000	0,0010	2,0462	0,0151	0,0003	0,0003
Λιθουανία (16)	*Alpha*	*beta*	*MASE*	*SMAPE*	*MAE*	*MSE*
θ	0,0020	0,0010	0,7213	0,0333	0,0000	0,0000
ξ	0,2510	0,0010	2,3670	0,0009	0,0002	0,0003
κ	0,9000	0,0010	1,7156	0,0091	0,000006	0,000010
λ	0,5010	0,0010	1,4589	0,0118	0,0002	0,0003
Τσεχία (12)	*Alpha*	*beta*	*MASE*	*SMAPE*	*MAE*	*MSE*
θ	0,1260	0,0010	1,4578	0,3376	0,0009	0,0012
ξ	0,2510	0,0010	1,0619	0,0017	0,0004	0,0005
κ	0,0020	0,0010	1,6996	0,0216	0,000016	0,000020
λ	0,2510	0,0010	0,7676	0,0138	0,0002	0,0003
Αυστρία (10)	*Alpha*	*beta*	*MASE*	*SMAPE*	*MAE*	*MSE*
θ	0,2510	0,0010	1,0387	0,0180	0,0000	0,0000
ξ	0,2510	0,0010	1,0362	0,0015	0,0004	0,0005
κ	0,0020	0,0010	2,3280	0,0393	0,000027	0,000031
λ	0,5010	0,0010	1,3712	0,0147	0,0003	0,0003
Ελβετία (9)	*Alpha*	*beta*	*MASE*	*SMAPE*	*MAE*	*MSE*
θ	0,1260	0,0010	1,0670	0,0143	0,0001	0,0001
ξ	0,0020	0,0010	1,3754	0,0017	0,0004	0,0005
κ	0,9000	0,0010	1,2774	0,0217	0,000014	0,000019
λ	0,2510	0,0010	1,5026	0,0130	0,0002	0,0003
Γαλλία (3)	*Alpha*	*beta*	*MASE*	*SMAPE*	*MAE*	*MSE*
θ	0,5010	0,0010	1,0464	0,0124	0,0000	0,0000
ξ	0,2510	0,0010	1,3284	0,0016	0,0004	0,0005
κ	0,6667	0,0010	1,3204	0,0203	0,000014	0,000020

λ	0,2500	0,0010	1,1304	0,0090	0,0002	0,0002
Πορτογαλία (20)	*Alpha*	*beta*	*MASE*	*SMAPE*	*MAE*	*MSE*
θ	0,0020	0,0010	1,2928	0,0165	0,0001	0,0001
ξ	0,9980	0,0010	1,7636	0,0019	0,0004	0,0006
κ	0,0020	0,0010	3,6591	0,0397	0,000028	0,000035
λ	0,5000	0,0010	1,1560	0,0101	0,0002	0,0002
Ισπανία (21)	*Alpha*	*beta*	*MASE*	*SMAPE*	*MAE*	*MSE*
θ	0,2510	0,0010	1,4522	0,0158	0,0000	0,0000
ξ	0,2510	0,0010	1,4524	0,0013	0,0003	0,0004
κ	0,9000	0,0010	1,6249	0,0185	0,000012	0,000020
λ	0,5000	0,0010	1,5939	0,0099	0,0002	0,0002
Ιταλία (5)	*Alpha*	*beta*	*MASE*	*SMAPE*	*MAE*	*MSE*
θ	0,2510	0,0010	1,7224	0,0154	0,0000	0,0000
ξ	0,2510	0,0010	1,7557	0,0016	0,0004	0,0004
κ	0,8333	0,0010	1,4142	0,0157	0,000011	0,000015
λ	0,3333	0,0010	1,7636	0,0111	0,0002	0,0002
Ελλάδα (18)	*Alpha*	*beta*	*MASE*	*SMAPE*	*MAE*	*MSE*
θ	0,5000	0,0010	0,4446	0,0052	0,0000	0,0000
ξ	0,2500	0,0010	1,1058	0,0012	0,0003	0,0004
κ	0,2510	0,0010	0,4564	0,0082	0,000005	0,000008
λ	0,2500	0,0010	1,6799	0,0081	0,0001	0,0002

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β’

Πηγές Χωρικών Δεδομένων – Δευτερεύοντα στατιστικά αποτελέσματα

Μια εκτενής έρευνα στο διαδίκτυο θα αποκαλύψει πολλές πηγές δεδομένων που παρέχονται για κάποιο σκοπό και μετά από μια σύναψη συμφωνίας με τον πάροχό τους στην Ελλάδα και διεθνώς. Στόχος αυτού του παραρτήματος είναι να παρουσιαστούν οι πηγές των δεδομένων της έρευνας και να αναδειχθεί το σύγχρονο τοπίο σχετικά με τα διαθέσιμα δεδομένα που επιτρέπουν την έρευνα με μεθόδους χωρικής ανάλυσης (Kalogirou, 2015).

Ελληνική Στατιστική Αρχή (ΕΛ. ΣΤΑΤ.)

Η Ελληνική Στατιστική Αρχή (ΕΛ.ΣΤΑΤ.) αποτελεί βασικό φορέα παροχής Δημόσιων Δεδομένων τα οποία πλέον παρέχονται δωρεάν (http://www.statistics.gr). Τα τελευταία χρόνια αποτελεί ανεξάρτητη αρχή ώστε, ανεπηρέαστη από πολιτικές πιέσεις και εξελίξεις, να υπολογίζει και να δημοσιοποιεί στατιστικά για τους μακροοικονομικούς δείκτες της χώρας, όπως ο Δείκτης Τιμών Καταναλωτή (Πληθωρισμός), η ανεργία και το Ακαθάριστο Εθνικό Προϊόν (Α.Ε.Π.). Επίσης υπολογίζει και δημοσιοποιεί τα δεδομένα που συλλέγει από την Απογραφή του Πληθυσμού και των Νοικοκυριών σε λεπτομερές Γεωγραφικό επίπεδο.

Ασχολείται ακόμα και με μια πληθώρα στατιστικών θεμάτων όπως είναι η αγορά εργασίας, η οικοδομική δραστηριότητα, η φυσική κίνηση του πληθυσμού, τα εισοδήματα και οι συνθήκες διαβίωσης των νοικοκυριών, ο πολιτισμός και ο τουρισμός. Εκτός από τις απογραφές, τα μητρώα και τα στατιστικά σχετικά με τις ληξιαρχικές πράξεις (γεννήσεις, γάμοι, θάνατοι) που αφορούν όλους τους κατοίκους της Ελλάδας, τα περισσότερα στατιστικά δεδομένα που δημοσιοποιεί η ΕΛ.ΣΤΑΤ. για άλλα θέματα βασίζονται σε έρευνες με βάση ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα του πληθυσμού (Μέθοδος δειγματοληψίας).

Στατιστική Υπηρεσία της Ευρωπαϊκής Ένωσης (Eurostat)

Κύριο μέλημα της Στατιστικής Υπηρεσίας της Ευρωπαϊκής Ένωσης (Eurostat) είναι να αποτελεί τον κύριο πάροχο στατιστικών δεδομένων υψηλής ποιότητας στην Ευρώπη (http://ec.europa.eu/eurostat). Η Eurostat είναι η επίσημη Στατιστική Υπηρεσία της Ευρωπαϊκής Ένωσης και εδρεύει στο Λουξεμβούργο. Συνεργάζεται άμεσα με τις Στατιστικές Υπηρεσίες κάθε κράτους μέλους της Ευρωπαϊκής Ένωσης από τις οποίες λαμβάνει τα δεδομένα που έχουν παραχθεί με κοινές προδιαγραφές. Αφού ελέγξει την ποιότητα των δεδομένων αυτών, τα

ενοποιεί και έτσι, παράλληλα με τις δικές της έρευνες, είναι σε θέση να παρέχει στους επίσημους φορείς αλλά και στο ευρύ κοινό της Ευρωπαϊκής Ένωσης στατιστικά στοιχεία σε ευρωπαϊκό επίπεδο που να επιτρέπουν συγκρίσεις μεταξύ χωρών και περιφερειών.

Στόχος των εθνικών στατιστικών υπηρεσιών και της Eurostat είναι τα δεδομένα που συλλέγουν, να προάγουν τη διαφάνεια και τη δημοκρατία μέσω του ελέγχου των πολιτικών βάσει του αποτελέσματος της άσκησης πολιτικής στην πραγματική οικονομία, την πρόνοια, την κοινωνική συνοχή και το γενικότερο επίπεδο ευημερίας των πολιτών. Οι δημόσιοι φορείς, συχνά απαλλαγμένοι από πολιτικές και οικονομικές πιέσεις, συλλέγουν και διαθέτουν στις εθνικές κυβερνήσεις και στους ευρωπαϊκούς φορείς αξιόπιστα στατιστικά δεδομένα ώστε να βοηθούν στην άσκηση πάσης φύσεως εθνικής και ευρωπαϊκής πολιτικής.

Η βάση δεδομένων Ανθρώπινης Θνησιμότητας (HMD)

Η βάση δεδομένων ανθρώπινης θνησιμότητας (HMD) είναι μια κοινή πρωτοβουλία του τμήματος δημογραφικών στοιχείων του Πανεπιστημίου της Καλιφόρνιας στο Berkeley των Ηνωμένων Πολιτειών και του Ινστιτούτου Δημογραφικών Ερευνών του Max Planck στο Ρόστοκ της Γερμανίας, το οποίο παρέχει αναλυτικά δεδομένα θνησιμότητας και πληθυσμού σε ερευνητές, φοιτητές, δημοσιογράφους, αναλυτές πολιτικής και άλλους ενδιαφερόμενους για την ιστορία της ανθρώπινης μακροζωίας ("The Human Mortality Database" https://www.mortality.org/. Retrieved July, 2018). Οι βασικοί εμπλεκόμενοι είναι ο John R. Wilmoth (Διευθυντής) από το Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας στο Berkeley, ο Βλαντιμίρ Σκολνίκοφ (Συντονιστής) από το Ινστιτούτο Δημογραφικών Ερευνών του Max Planck και ο Magali Barbieri (Αναπληρωτής Διευθυντής) από το Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνιας στο Berkeley και INED, στο Παρίσι.

Τα δεδομένα από το HMD (Human Mortality Database) έχουν επισημανθεί, διασταυρωθεί και εξαχθεί με βάση την ακαδημαϊκή έρευνα, τη δημογραφική έρευνα και άλλες έρευνες που βασίζονται σε δημογραφικά στοιχεία. Για παράδειγμα, υπήρξε σημαντική ξεχωριστή έρευνα σχετικά με τους βιολογικούς και εξελικτικούς παράγοντες που καθορίζουν τη θνησιμότητα αλλά και τις διαφορές στη θνησιμότητα μεταξύ των ανθρώπινων πληθυσμών (Kruger et al., 2006). Τις τελευταίες δεκαετίες, οι έρευνες / μελέτες που γίνονται εστιάζουν και επιχειρούν να δημιουργήσουν καλύτερα προγνωστικά μοντέλα ανθρώπινης θνησιμότητας (Li και Lee, 2005). Υπό την εποπτεία της HMD έχουν γίνει έρευνες για συγκεκριμένα αίτια

θνησιμότητας (Murray et al., 2006) και έρευνες σχετικά με τις κοινωνικές και οικονομικές συνέπειες των μεταβολών στη θνησιμότητα (Christensen et al., 2009).

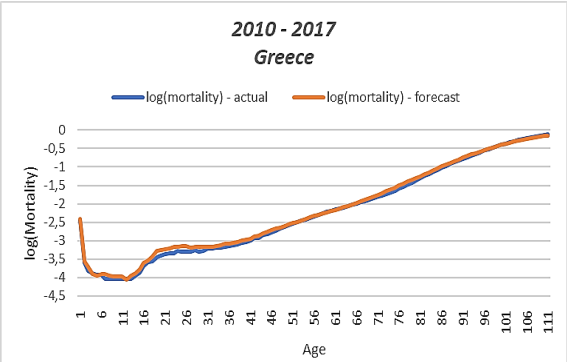
Γίνεται επομένως άμεσα αντιληπτή η σοβαρότητα με την οποία αντιμετωπίζεται ο εμπλουτισμός της βάσης Ανθρώπινης Θνησιμότητας. Με μια εγγραφή και αναφορά της ιδιότητας του, ο χρήστης, μπορεί ανά πάσα στιγμή να αποκτήσει πρόσβαση στα έγκυρα δεδομένα της HMD για διάφορες χώρες του κόσμου και για διαφορετικές χρονικές περιόδους. Λαμβάνει πίνακες ανάλυσης επιβίωσης και θνησιμότητας (σε μονοετής ή 5ετής ομάδες) με τεράστια στατιστική πληροφορία, τόσο για άνδρες και γυναίκες, όσο και για το σύνολο του πληθυσμού. Στη πλατφόρμα, αναφέρεται και η μεθοδολογία που αναπτύσσεται για τον υπολογισμό και την εξαγωγή των δεδομένων ανθρώπινης θνησιμότητας.

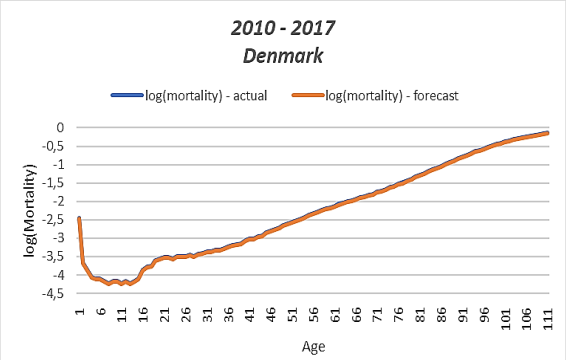
Στατιστικές Υπηρεσίες άλλων Χωρών και Διεθνών Οργανισμών

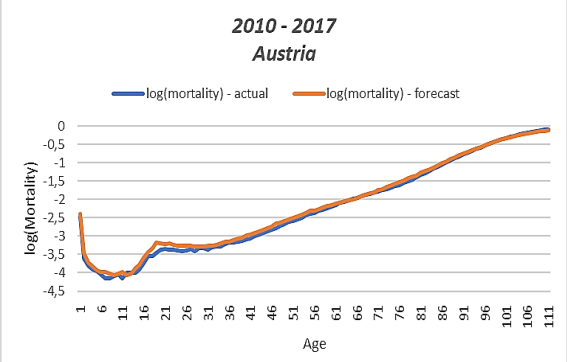
Στατιστικά δεδομένα παρέχουν οι στατιστικές υπηρεσίες σχεδόν όλων των κρατών της γης αλλά και οι διεθνείς οργανισμοί. Ενδεικτικά στην ΕΕ μεγάλο όγκο δεδομένων παρέχουν το Statistiska centralbyråns (SCB) στη Σουηδία (http://www.scb.se), το Office for National Statistics (ONS) στο Ηνωμένο Βασίλειο (http://www.ons.gov.uk), το Istituto nazionale di statistica (Istat) της Ιταλίας (http://www.istat.it) και το Central Statistics Office (CSO) στην Ιρλανδία (http://www.cso.ie). Οι διαφορές στο τι στατιστικά δεδομένα παρέχει η κάθε χώρα είναι μεγάλη. Για παράδειγμα, ενώ συνήθως η απογραφή πληθυσμού γίνεται κάθε δέκα χρόνια, στην Ιρλανδία γίνεται κάθε 5 χρόνια, ενώ στη Σουηδία μετά το 1990 σπάνια διενεργείται απογραφή γιατί λόγω των σωστά ενημερωμένων μητρώων, το κράτος ανά πάσα στιγμή μπορεί να υπολογίζει τα στατιστικά που τυπικά συλλέγονται σε μια απογραφή πληθυσμού (Kalogirou, 2015).

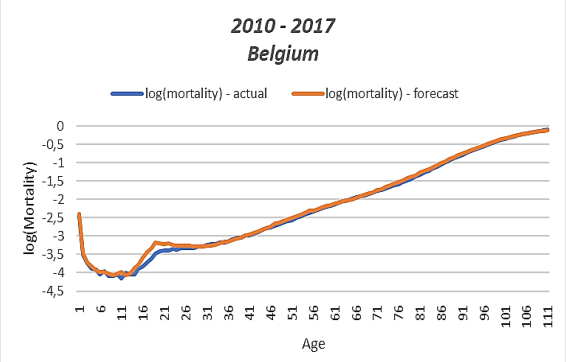
Εκτίμηση καταλληλόλητας μοντέλου πρόβλεψης

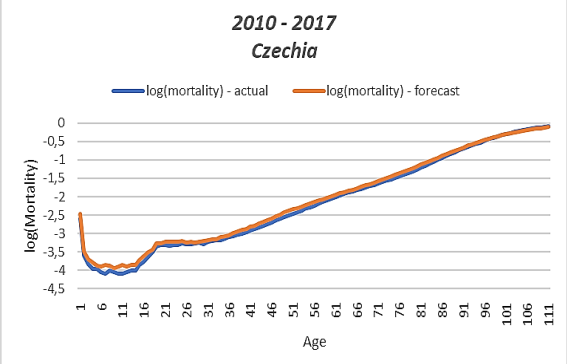
Έχοντας δεδομένα θνησιμότητας από το 1960 έως το 2017, γίνεται ***επαλήθευση του μοντέλου πρόβλεψης*** (μέσω της συνάρτησης FORECAST.ETS) στα έτη ***2010 – 2017***. Η προβολή θνησιμότητας (*log(Mortality) – forecast*) συγκρίνεται με τα πραγματικά (*log(Mortality) – Actual*) δεδομένα θνησιμότητας από τη Human Mortality Database των αντίστοιχων χωρών, για το αντίστοιχο χρονικό εύρος. Η μέθοδος αυτή αποτελεί μία ένδειξη αξιοπιστίας της πρόβλεψης για τα έτη μετά το 2017 όπου δεν υπάρχουν, όπως είναι φυσικό, ακόμα δεδομένα. Στα παρακάτω γραφήματα παρουσιάζεται η πρόβλεψη για το σύνολο των 22 χωρών σε τυχαία σειρά απεικόνισης. Σε όλες τις χώρες η προσέγγιση της πρόβλεψης στα πραγματικά δεδομένα χαρακτηρίζεται περισσότερο από ικανοποιητική.

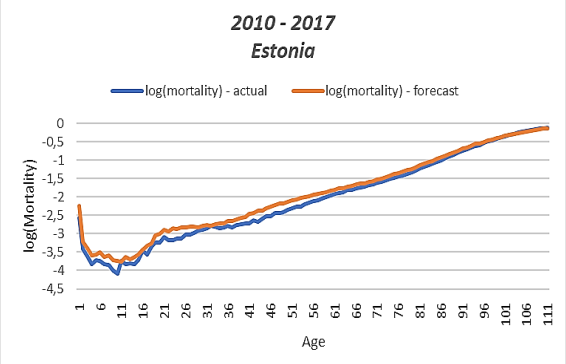


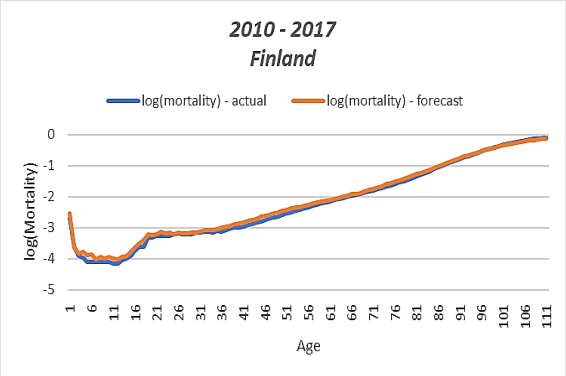


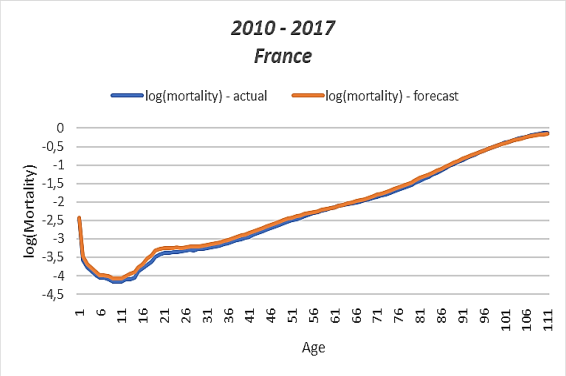


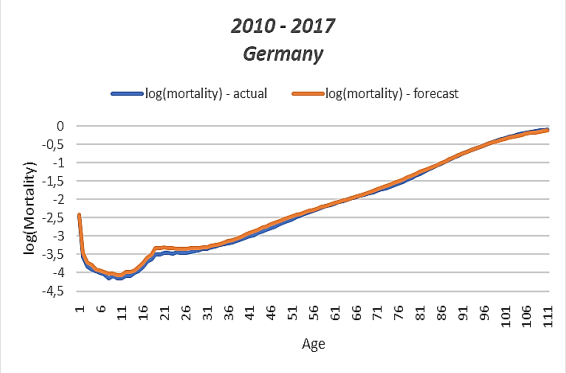


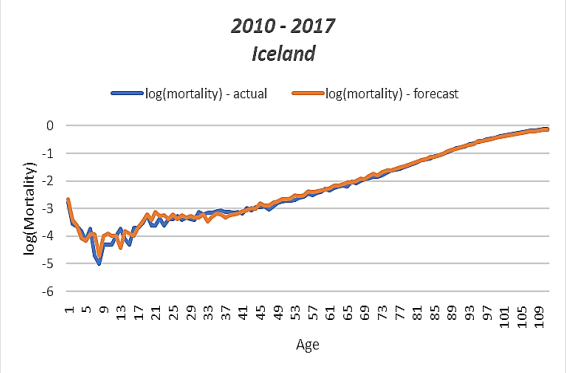


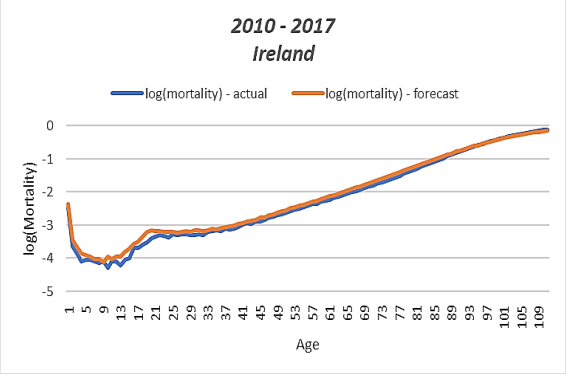


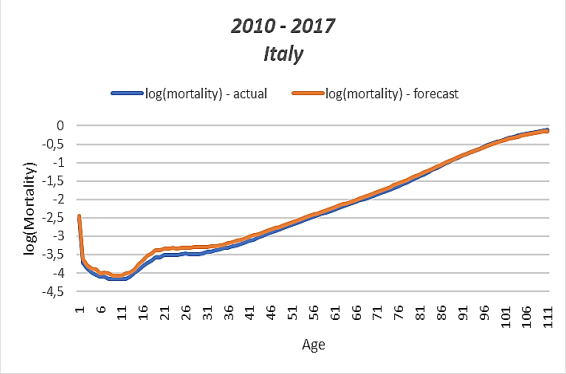

2010 - 2017
Finland
log(mortality) - actual
log(mortality) - forecast
log(Mortality)
Age

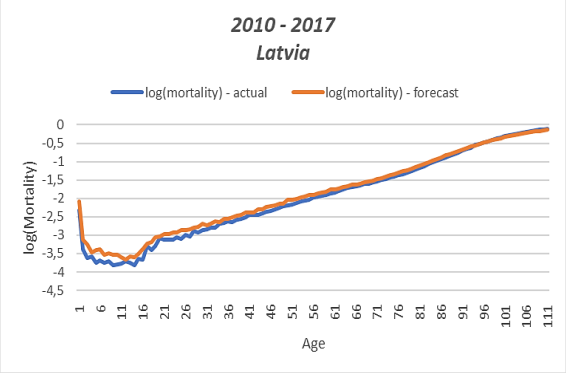

2010 - 2017
France
log(mortality) - actual
log(mortality) - forecast
log(Mortality)
Age

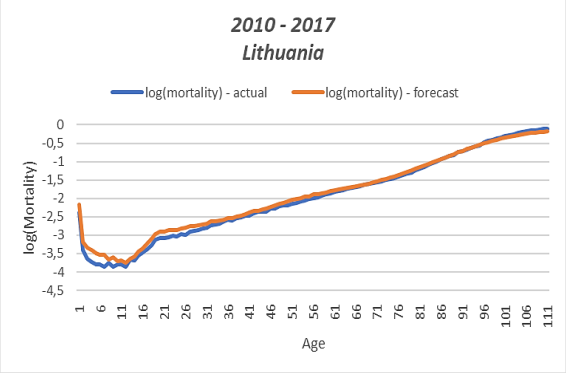

2010 - 2017
Germany
log(mortality) - actual
log(mortality) - forecast
log(Mortality)
Age

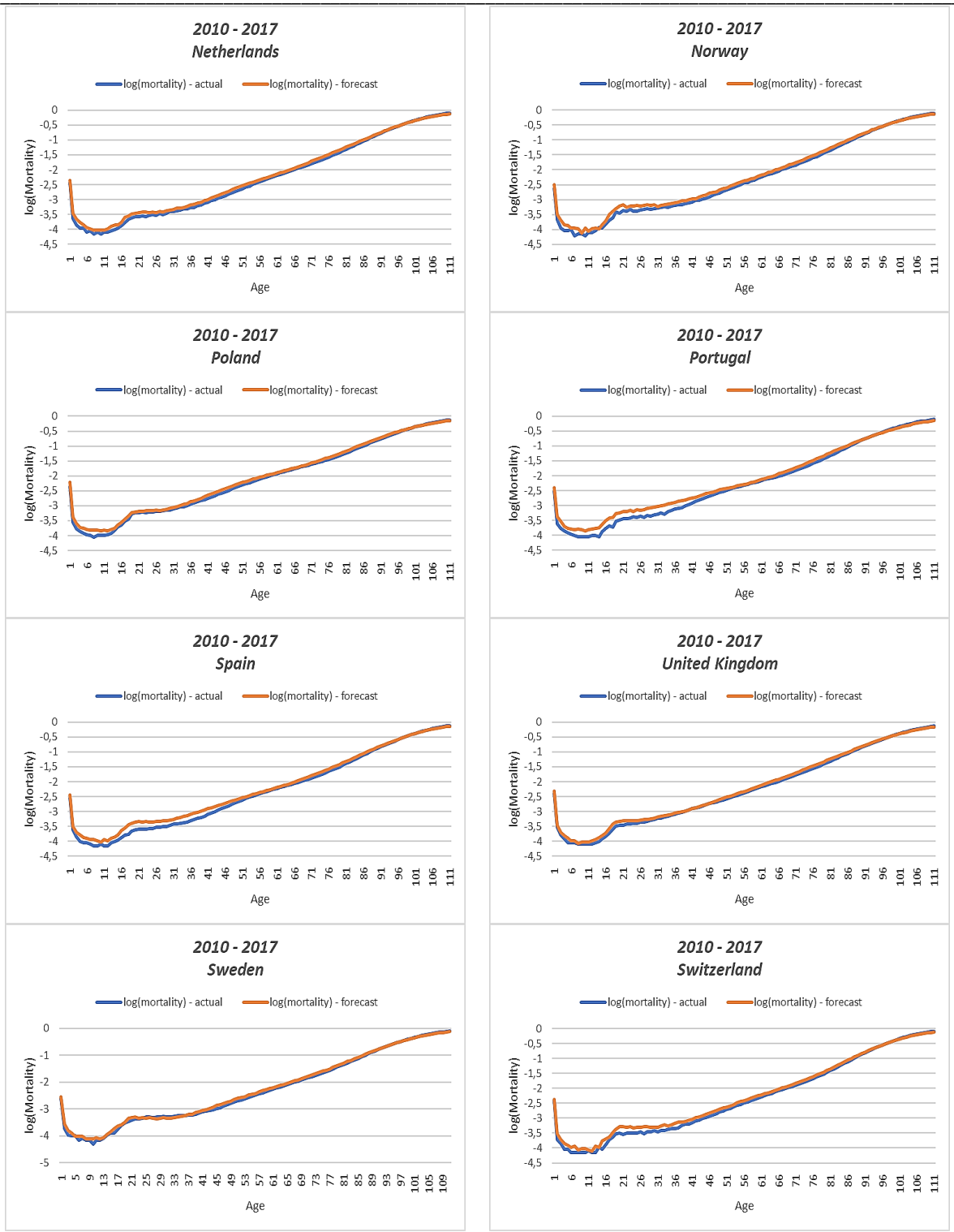

2010 - 2017
Iceland
log(mortality) - actual
log(mortality) - forecast
log(Mortality)
Age


2010 - 2017
Ireland
log(mortality) - actual
log(mortality) - forecast
log(Mortality)
Age


2010 - 2017
Italy
log(mortality) - actual
log(mortality) - forecast
log(Mortality)
Age


2010 - 2017
Latvia
log(mortality) - actual
log(mortality) - forecast
log(Mortality)
Age


2010 - 2017
Lithuania
log(mortality) - actual
log(mortality) - forecast
log(Mortality)
Age



Γράφημα 34: Προσέγγιση της προβολής θνησιμότητας στα πραγματικά δεδομένα για τις 22 χώρες και για τα έτη 2010 - 17

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ’

Δημοσιευμένες Εργασίες σε επιστημονικά περιοδικά & βιβλία

1. **Andreopoulos, P.**, Bersimis, G. F., Tragaki, A., & Rovolis, A. (2019). Mortality modeling using probability distributions. APPLICATION in Greek mortality data. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, *48*(1), 127-140.

Abstract: A number of different probability distributions describing age-specific mortality have been proposed. The most common ones, Gompertz and Gompertz - Makeham distributions have received wide acceptance and describe fairly well mortality data over a period of 60–70 years, but generally do not give the desired results for old and/or young ages. This paper proposes a new mathematical distribution (thereafter named ANBE), that results from the combination of the above distributions with Beta distribution. Beta distribution has been chosen for its flexibility to different dataset. Tested for its goodness of fit, ANBE shows a higher predictive ability for males and females, especially at higher ages. This new probability density function could also be applied in populations other than the Greek, subject to appropriate parameter detection (e.g. Maximum Likelihood). The application relies on mortality data collected and provided by ELSTAT for year 2011. Population data were used in order to calculate age and sex-specific mortality rates based on the estimated mean population of one-year interval age-group for the year concerned. According to our findings, the B.ANBE mortality model presents satisfactory results on appropriate evaluation criteria (AIC, BIC).

2. Polykretis, C., Kalogeropoulos, K., **Andreopoulos, P.**, Faka, A., Tsatsaris, A., & Chalkias, C. (2019). Comparison of Statistical Analysis Models for Susceptibility Assessment of Earthquake-Triggered Landslides: A Case Study from 2015 Earthquake in Lefkada Island. *Geosciences*, *9*(8), 350.

Abstract: The main purpose of this study is to comparatively assess the susceptibility of earthquake-triggered landslides in the island of Lefkada (Ionian Islands, Greece) using two deferent statistical analysis models, a bivariate model represented by frequency ratio (FR), and a multivariate model represented by logistic regression (LR). For the implementation of the models, the relationship between geo-environmental factors contributing to landslides and documented events related to the 17th November 2015 earthquake was investigated by geographic information systems (GIS)-based analysis. A landslide inventory with events attributed to the specific earthquake was prepared using satellite imagery interpretation and field surveys. Eight factors: Elevation, slope angle, slope aspect, distance to main road network, distance to faults, land cover, geology, and peak ground acceleration (PGA), were considered and used as thematic data layers. The prediction capability of the models and the accuracy of the resulting susceptibility maps were tested by a standard validation method, the receiver operator characteristic (ROC) analysis. Based on the validation results, the output map with the highest reliability could potentially constitute an ideal basis for use within regional spatial planning as well as for the organization of emergency actions by local authorities.

3. **Andreopoulos P.**, Tragaki A. (2020) On Demographic Approach of the BGGM Distribution Parameters on Italy and Sweden. In: Skiadas C., Skiadas C. (eds) Demography of Population Health, Aging and Health Expenditures. The Springer Series on Demographic Methods and Population Analysis, vol 50. Springer, Cham.

https://doi.org/10.1007/978-3-030-44695-6_12

Abstract: The dynamics of human mortality during lifetime is an issue of great scientific interest for its demographic and actuarial implications, but also for better understanding this very process of ageing. Differences in the shape of mortality curves reflect changes in the rates and causes of mortality and are related to both endogenous and exogenous factors. Shape variations of mortality curves over time as well as across regions may help to

decipher the process of ageing and thus formulate health strategy priorities and policies so as to reduce premature mortality, improve quality of life, and extend life span. In this study a new model of mathematical mortality (BGGM distribution) is applied on Italian and Swedish data, over a 114 year-period (1900 – 2013). The aim of this work is to evaluate the proper adaptation of this distribution, to estimate its values and to identify eventual spatial and temporal differentiations. The application of the suggested approach is illustrated using historical data provided by the Human Mortality Database.

4. **Andreopoulos P.**, Tragaki A., Antonopoulos G., Bersimis F.G. (2020) Properties and Dynamics of the Beta Gompertz Generalized Makeham Distribution. In: Skiadas C., Skiadas C. (eds) Demography of Population Health, Aging and Health Expenditures. The Springer Series on Demographic Methods and Population Analysis, vol 50. Springer, Cham.

   https://doi.org/10.1007/978-3-030-44695-6_18

Abstract: *Beta distribution has been widely used in many scientific areas. It is applied, very often and is known as a probability distribution with wide application in the management of various kinds of problems, such as in survival analysis. In recent years, development focuses on new probabilistic techniques for building new distributions, (Jones' Generalized Beta Distribution, 2004). This study will investigate the statistical properties of the proposed distribution with six-parameters, which is called Beta Gompertz Generalized Makeham distribution. This includes verifying the probability density function, the cumulative density function and the hazard function.*

5. **Andreopoulos, P.**, Polykretis, C., & Tragaki, A. (2020). Assessment and Mapping of Spatio-Temporal Variations in Human Mortality-Related Parameters at European Scale. ISPRS International Journal of Geo-Information, 9(9), 547.

Abstract: *Research efforts focusing on better understanding and capture of mortality progression over the time are considered to be of significant interest in the field of demography. On a demographic basis, mortality can be expressed by different physical parameters. The main objective of this study is the assessment and mapping of four such parameters at the European scale, during the time period 1993–2013. Infant mortality (parameter ϑ), population aging (parameter ξ), and individual and population mortality due to unexpected exogenous factors/events (parameter κ and λ, respectively) are represented from these parameters. Given that their estimation is based on demographics by age and cause of death, and in order to be examined and visualized by gender, time-specific mortality and population demographic data with respect to gender, age, and cause of death was used. The resulting maps present the spatial patterns of the estimated parameters as well as their variations over the examined period for both male and female populations of 22 European countries in all.*

Ανακοινώσεις σε Διεθνή ή Ελληνικά συνέδρια (με κριτές) & δημοσίευση εργασιών στα πρακτικά κατόπιν κρίσης

1. Ανδρεόπουλος Π. (**2013**) *'Χωρικά Κρυμμένα Μαρκοβιανά Μοντέλα Poisson, με εφαρμογή στη Χαρτογράφηση ασθενειών'*, 1ο Συνέδριο Χωρικής Ανάλυσης, Αθήνα, Ελλάδα
2. Ανδρεόπουλος Π., Μπερσίμης Φ., Τσίμπος Κ. (**2014**) *'Μοντέλα Εξομάλυνσης Δημογραφικών Δεικτών Θνησιμότητας'*, 27ο Πανελλήνιο Συνέδριο Στατιστικής, Θεσσαλονίκη, Ελλάδα
3. Andreopoulos P., Bersimis F. (May **2015**) *'Gamma & Gamma-Gompertz Smoothing Regression Models of Mortality Indices'*, 8th Conference of Eastern Mediterranean Region of the International Biometric Society, Cappadocia – Nevsehir, Turkey
4. Ανδρεόπουλος Π., Μπερσίμης Φ., (Οκτώβριος **2015**) *'Μαθηματική Μοντελοποίηση δεδομένων Θνησιμότητας με χρήση κατανομών Πιθανοτήτων'*, 32ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας - ΕΜΕ, Καστοριά, Ελλάδα
5. Ανδρεόπουλος Π., Μπερσίμης Φ., Τραγάκη Α., (Μάιος **2016**) *'Μαθηματική Μοντελοποίηση δεδομένων Θνησιμότητας με χρήση μιας (νέας) κατανομής Πιθανότητας'*, ***(Technical Report)*** 1ο Πανελλήνιο Συνέδριο νέων κατόχων ΜΔΕ & Διδακτορικών στα Μαθηματικά, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, τμήμα Μαθηματικών, Ιωάννινα, Ελλάδα, Special Volume, pp. 3-14 (**DOI:** 10.13140/RG.2.2.26639.79527)
6. Andreopoulos P., Bersimis F., Tragaki A., Rovolis A., (June **2016**) *'Mortality Modelling using Probability distributions. Application in Greek Mortality data'*, 4th Stochastic Modeling Techniques and Data Analysis International Conference with Demographics Workshop, Valletta, Malta
7. Ανδρεόπουλος Π., Μπερσίμης Φ., (Νοέμβριος **2016**) *'Ανάπτυξη Πιθανοθεωρητικών κατανομών από Μαθηματικά μοντέλα Θνησιμότητας'*, 33ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας - ΕΜΕ, Χανιά (Κρήτη), Ελλάδα
8. Αβραάμ Δ., Ανδρεόπουλος Π., Μπερσίμης Φ., (Οκτώβριος **2017**) *'A simple procedure to forecast mortality trends: evidence from a backtesting analysis applied to Greek death rates of the span 1981-2010'*, 1ο Πανελλήνιο Συνέδριο Δημογραφίας, Κομοτηνή, Ελλάδα
9. Ανδρεόπουλος Π., Μπερσίμης Φ., Τραγάκη Α., (Οκτώβριος **2017**) *'Σύγκριση των νέων μοντέλων θνησιμότητας B.ANBE & ANBE.G σε ελληνικά δεδομένα το χρονικό διάστημα 2001-2013, ανά έτος'*, 1ο Πανελλήνιο Συνέδριο Δημογραφίας, Κομοτηνή, Ελλάδα

10. Πολυκρέτης Χρ., Μπερσίμης Φ., Ανδρεόπουλος Π., (Νοέμβριος **2017**) *'Εφαρμογή Μαθηματικών Μεθόδων για την εκτίμηση της επιδεκτικότητας κατολισθήσεων που προκλήθηκαν από τον σεισμό του 2015 στη Λευκάδα'*, 34ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας - ΕΜΕ, Νικιάνα (Λευκάδα), Ελλάδα
11. Andreopoulos P., Bersimis G. F., Dimitriou Xen., Zachos G., (Δεκέμβριος **2017**) *'Mortality rates modeling using probability distributions; Impact on hospital cost',* 16ο Ετήσιο Συνέδριο του Συνδέσμου Επιστημόνων Χρηματοοικονομικής & Λογιστικής Ελλάδος (Η.F.A.A), Αθήνα
12. Avraam D., Bersimis F., Andreopoulos P. (June **2018**) *'A proposed procedure for forecast future mortality trends'*, 5th Stochastic Modeling Techniques and Data Analysis International Conference with Demographics Workshop, Chania, Crete, Greece
13. Andreopoulos P., Tragaki A., Bersimis F. (June **2018**) *'New distributions to Mortality modelling: A different approach'*, 5th Stochastic Modeling Techniques and Data Analysis International Conference with Demographics Workshop, Chania, Crete, Greece
14. Ανδρεόπουλος Π., Τραγάκη Α., Μούττη Μ., (Δεκέμβριος **2018**) '*Η Δυναμική ενός νέου Μαθηματικού μοντέλου Θνησιμότητας στα σύγχρονα πρότυπα ζωής'*, 35ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας - ΕΜΕ, Αθήνα, Ελλάδα
15. Andreopoulos P., Tragaki A., Bersimis F. (June **2019**) '*On demographic approach of the BGGM distribution parameters*', 18th Applied Stochastic Models and Data Analysis International Society and Demographics Workshop, Florence, Italy
16. Καλογερόπουλος Κλ., Ανδρεόπουλος Π., Τραγάκη Α. et al., (Νοέμβριος **2019**) '*Η Ιστορικο-Γεωγραφία του πληθυσμού της Ελλάδας με χρήση γεωδημογραφικών δεικτών'*, 12th International Conference of the Hellenic Geographical Society, Αθήνα, Ελλάδα ICHGS Conference Proceedings Series with ISBN: 978-960-606-047-2.
17. Ανδρεόπουλος Π., Τραγάκη Α., Αντωνόπουλος Γ., Μπερσίμης Φ., (Νοέμβριος **2019**) '*Μαθηματικές ιδιότητες της Beta Gompertz Generalized Makeham κατανομής'*, 36ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας - ΕΜΕ, Λάρισα, Ελλάδα
18. Ανδρεόπουλος Π., Μπερσίμης Φ., Καμπέρης Ν., (Δεκέμβριος **2020**) '*Προσεγγίζοντας την Θνησιμότητα στην Ελλάδα μέσω Πιθανοθεωρητικών κατανομών*', Ακαδημία Αθηνών, Επετηρίδα τεύχος 12 του ΚΕΕΚ, Αθήνα, Ελλάδα