ΧΑΡΟΚΟΠΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΙΑΚΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΜΕ ΘΕΜΑ :

Η ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ ΚΑΤΑ ΤΗ ΣΧΟΛΙΚΗ ΗΛΙΚΙΑ

«Αν η προσέγγιση του θεϊκού είναι μόνο μέσω συμβόλων δυνατή, τα πλέον κατάλληλα απ' αυτά είναι τα μαθηματικά σύμβολα˙ διότι η βεβαιότητα αυτών είναι ακατανίκητη»

Nikolas von Gues(1401- 1464)

Επιβλέπουσα καθηγήτρια

Μαριδάκη – Κασσωτάκη Αικατερίνη

Τριμελής επιτροπή

Καραμπατζός Γεώργιος

Κυριακούσης Ανδρέας

Φοιτήτρια

Σκάζα Βασιλική

Α.Μ. 9923

ΑΘΗΝΑ 2004

ΧΑΡΟΚΟΠΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΙΑΚΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΜΕ ΘΕΜΑ :

Η ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ ΚΑΤΑ ΤΗ ΣΧΟΛΙΚΗ ΗΛΙΚΙΑ

«Αν η προσέγγιση του θεϊκού είναι μόνο μέσω συμβόλων δυνατή, τα πλέον κατάλληλα απ' αυτά είναι τα μαθηματικά σύμβολα˙διότι η βεβαιότητα αυτών είναι ακατανίκητη»

Nikolas von Gues(1401- 1464)

Επιβλέπουσα καθηγήτρια

Μαριδάκη – Κασσωτάκη Αικατερίνη

Τριμελής επιτροπή

Καραμπατζός Γεώργιος

Κυριακούσης Ανδρέας

Φοιτήτρια

Σκάζα Βασιλική

Α.Μ. 9923

ΑΘΗΝΑ 2004

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Ευχαριστώ θερμά για την συνεργασία τους, τους υπεύθυνους της εργασίας μου και καθηγητές του πανεπιστημίου μου Κα Μαριδάκη- Κασσωτάκη Αικατερίνη, Κο Καραμπατζό Γεώργιο και Κο Κυριακούση Ανδρέα.

Ευχαριστώ πολύ τους γονείς μου, Πηνελόπη και Παναγιώτη Σκάζα *για την επιτυχή προσπάθειά τους να μου δώσουν όλα τα απαραίτητα εφόδια για να συνεχίσω τη ζωή μου και να χτίσω το μέλλον μου σε γερές βάσεις. Τους αφιερώνω την παρούσα πτυχιακή εργασία ως ένδειξη ευχαριστίας, θαυμασμού και εκτίμησης, μαζί με την υπόσχεση πώς οι προσπάθειες μου δεν θα σταματήσουν σε αυτό, το σημαντικό βέβαια, αλλά πρώτο μου βήμα .*

Δεν θα μπορούσα βέβαια να μην αφιερώσω αυτή την εργασία και στο σημαντικότερο πρόσωπο της ζωής μου,, τον ***αδερφό μου Θάνο****. Ελπίζω να παραδειγματιστεί από μένα και να βαδίσει στα βήματά μου έχοντας πάντα την υποστήριξη, την βοήθειά και την αγάπη μου.*

Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω τους φιλόλογους καθηγητές μου ***Ιωάννου Λεωνίδα και Μπλέτα- Ιωάννου Κατερίνα*** *για τις γνώσεις και τις αξίες που μου μετέδωσαν και να αφιερώσω αυτή την πτυχιακή μελέτη στον επί δύο χρόνια καθηγητή μαθηματικών μου, κύριο* ***Γεώργιο Α. Νατσιόπουλο*** *που ήταν ο άνθρωπος που μου έδωσε την ευκαιρία έστω και για λίγο χρονικό διάστημα να μοιραστώ μαζί του την μεγαλοπρέπεια των μαθηματικών. Το αποτέλεσμα της κατανόησή του προς το πρόσωπο μου και η αγάπη του προς τα μαθηματικά, είναι αυτή η πτυχιακή εργασία.*

Ελπίζω να μην απογοήτευσα κανέναν από τους παραπάνω….

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Σε αυτή την πτυχιακή μελέτη με θέμα «η κατανόηση των μαθηματικών εννοιών κατά τη σχολική ηλικία» γίνεται μια προσπάθεια να περιγραφούν οι μαθηματικές έννοιες, να καταγραφούν οι μέθοδοι κατανόησής τους από τα παιδιά στην σχολική ηλικία αλλά και να εντοπιστούν οι αιτίες που δυσχεραίνουν την κατανόηση τους.

Το πρώτο μέρος είναι θεωρητικό. **Στο πρώτο κεφάλαιο** γίνεται μια μικρή αναφορά στην έννοια των μαθηματικών και στους ορισμούς που δόθηκαν από μεγάλες προσωπικότητες της επιστήμης κατά καιρούς. Επίσης προβάλλεται η αξία τους και επισημαίνεται η χρησιμότητα των μαθηματικών εννοιών τόσο στο παρελθόν όσο και σήμερα.

Στο δεύτερο κεφάλαιο περιγράφεται ο σκοπός της διδασκαλίας των μαθηματικών προκειμένου να δοθεί ολοκληρωμένη παιδεία και ανάπτυξη της λογικής και κριτικής ικανότητας στους μαθητές. Παράλληλα γίνεται μια πρώτη εκτίμηση της ύπαρξης δυσκολιών στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές .

Στο τρίτο κεφάλαιο αναφέρονται και περιγράφονται οι παράγοντες (πρακτικοί, συναισθηματικοί κ.ά.) που δυσχεραίνουν την επαφή των παιδιών με τις μαθηματικές έννοιες.

Στο τέταρτο κεφάλαιο αναφέρονται και αναλύονται οι κατηγορίες δυσκολιών με τις οποίες έρχονται σε επαφή τα παιδιά και εμποδίζουν την κατανόηση και εξέλιξη της μαθηματικής σκέψης και διαδικασίας.

Στο πέμπτο κεφάλαιο γίνεται μια λεπτομερής περιγραφή και ανάλυση των μαθηματικών αντικειμένων που διδάσκονται τα παιδιά στο δημοτικό, εφόσον αυτό είναι το φάσμα των ηλικιών που διαπραγματεύεται αυτή η εργασία.

Στο έκτο κεφάλαιο πιο εξειδικευμένα αρχίζει να αναλύεται η βάση της πυραμίδας της επιστήμης των μαθηματικών, οι αριθμοί και τα συστήματα αρίθμησης. Ο συμβολισμός των αριθμών, οι έννοιές τους και οι ιδιότητες τους που μέσα από το πέρασμα των χρόνων ως σήμερα να συνεχίζουν να αποδεικνύουν τη μεγαλοπρέπειά τους.

Στο έβδομο κεφάλαιο, από τη σκοπιά του μαθητή αυτή τη φορά, περιγράφονται οι νοητικές διαδικασίες μέσα από τις οποίες το παιδί αρχίζει να αντιλαμβάνεται τον κόσμό των μαθηματικών. Μαθαίνει να του προφέρει στη σειρά, να τους διατάσει σε σύνολα και τέλος να τους συμβολίζει γραπτά.

Στο όγδοο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι θεωρίες που διατυπώθηκαν από κάποιους επιστήμονες , οι έρευνες που έγιναν και τα αποτελέσματα που παρατηρήθηκαν από αυτές. Αφορούν γενικά τα μαθηματικά και τις δυσκολίες των παιδιών να τα κατανοήσουν αλλά και ειδικότερα ασχολούνται με τις τέσσερις μαθηματικές πράξεις και τα προβλήματα κατανόησης που προκύπτουν από τον τρόπο που διατυπώνεται ένα πρόβλημα.

Στο δεύτερο και ερευνητικό μέρος της εργασίας, **στο ένατο κεφάλαιο**, γίνεται αναφορά στη μεθοδολογία που ακολουθήθηκε καθώς επίσης, στην επιλογή του δείγματος, τα μέσα και τη διαδικασία συλλογής δεδομένων.

Τέλος, **το δέκατο κεφάλαιο** περιλαμβάνει τα ποσοτικά και ποιοτικά αποτελέσματα της έρευνας για της επίδραση που έχει ο τρόπος διατύπωσης των προβλημάτων που θέτονται στα παιδιά. Ποιο συγκεκριμένα συγκρίνεται η απλή γλωσσική διατύπωση - δηλαδή αυτή που ακολουθούν τα σχολικά εγχειρίδια- *και η* εμπλουτισμένη –με περισσότερα λόγια - και με βάση αυτό γίνεται μια προσπάθεια να προσεγγίσουμε την στρατηγική επίλυσης των προβλημάτων που ακολουθούν τα παιδιά.

Για τη συγγραφή της εργασίας χρησιμοποιήθηκε ελληνική και αγγλική βιβλιογραφία καθώς και πληροφορίες από το internet.

Ελπίζω η παρούσα εργασία να ανταποκριθεί στο σκοπό της και να μου συγχωρεθούν τυχών λάθη ή παραλήψεις.

Ά μέρος – θεωρητικό

1.1. Εισαγωγή

«Πιστεύω ότι αν ασχολείται κανείς με τα μαθηματικά, το κάνει επειδή του είναι ευχάριστο, και φυσικά διότι σ' αυτά έχει ταλέντο, ενώ σε κάτι άλλο είναι ατάλαντος. Θα ήθελα να προσθέσω ότι εγώ ασχολούμαι με τα μαθηματικά διότι, επιπλέον είναι δύσκολα και αποτελούν πολύ όμορφη πρόκληση για το νου. Ασχολούμαι με τα μαθηματικά για να αποδείξω στον εαυτό μου ότι είμαι ικανός να αποδεχτώ την πρόκληση και να αναδειχτώ νικητής»
Serge Lang

«Ένας απλοϊκός ορισμός ,αρκετός για ένα λεξικό και για μια αρχική κατανόηση, είναι ότι τα μαθηματικά είναι η επιστήμη της ποσότητας και του χώρου. Επεκτείνοντας λιγάκι αυτό τον ορισμό θα μπορούσε να προστεθεί ότι τα μαθηματικά ασχολούνται επίσης με το συμβολισμό που σχετίζεται με την ποσότητα και το χώρο.»(Davis- Hersh, 1980).

«Τα μαθηματικά αποτελούν τμήμα της επιστημονικής πραγματικότητας και κατέχουν ξεχωριστή μάλιστα θέση στην κλίμακα επιστημών- φιλοσοφίας, όλα τα μεγάλα φιλοσοφικά συστήματα θεωρούν εύλογο και απαραίτητο, να διατυπώσουν τις απόψεις τους για ζητήματα μαθηματικών. Συχνά διατυπώνουν θέσεις και εκτιμήσεις σχετικά μα τις φιλοσοφικές υποθέσεις που υπεισέρχονται, κατά τρόπο άδηλο μάλιστα στη μαθηματική πρακτική. Κοντά λοιπόν στις απόψεις των φιλοσόφων για τις επιστήμες συναντούμε και τις απόψεις τους για τα μαθηματικά (και τη λογική). Μερικές φορές , και ανάλογα με την συγκεκριμένη άποψη που συναντάμε, διαβάζουμε απόψεις για τα μαθηματικά που είναι ιδιαίτερα «φιλικές» προς αυτά , άλλοτε πάλι, διαβάζουμε απόψεις «εχθρικές» προς αυτά. Γενικά πάντων μιλώντας, οι απόψεις για τα μαθηματικά χαρακτηρίζονται από μια ασαφή και γενικόλογη διαπραγμάτευση. Τούτο οφείλεται εν μέρει στην ελλιπή πληροφόρηση γύρω από τα μαθηματικά και τις εσωτερικές τους εξελίξεις και εν μέρει στο ότι ο γενικότερος προσανατολισμός μιας φιλοσοφικής απόψεως δεν αποδίδει ιδιαίτερη έμφαση στα προβλήματα που αντιμετωπίζει η επιστήμη των μαθηματικών» (Ρουσόπουλος ,1991).

«Δεν πρέπει να συγχέουμε τη μύηση στα μοντέρνα μαθηματικά με την απευθείας εισαγωγή τους στην αξιωματική τους. Πράγματι, θα μπορούσαμε να εκφράσουμε με αξιώματα μόνο ένα προηγούμενο ενορατικό δεδομένο και ψυχολογικά η αξιωματική έχει έννοια μόνο ως συνειδητοποίηση ή ως αναδραστική σκέψη, γεγονός που προϋποθέτει μια προηγούμενη προενεργητική κατασκευή. Το παιδί ήδη από την ηλικία των 7 ετών και ο έφηβος χειρίζονται συνεχώς πράξεις συνόλων, ομάδων, διανυσματικών χώρων κ.ά. Δεν το αντιλαμβάνονται όμως, γιατί πρόκειται για θεμελιώδη σχήματα συμπεριφοράς και στη συνέχεια συλλογισμού, πολύ πριν μπορέσουν να γίνουν αντικείμενα σκέψης. Απαιτείται λοιπόν μια ολόκληρη διαβάθμιση για να περάσουμε από την πράξη στην αναπαραστατική σκέψη, ενώ μια μεγάλη σειρά παρεμβάσεων παραμένει αναγκαία για να περάσουμε από την πραξιακή σκέψη στο στοχασμό πάνω στη σκέψη αυτή. Η τελευταία βαθμίδα είναι συνεπώς η μετάβαση αυτού του στοχασμού στην καθαυτό δημιουργία αξιωμάτων. Η μαθηματική κατασκευή προχωρά με αντανακλαστικές αφαιρέσεις (με τη διπλή έννοια της προβολής πάνω σε νέα επίπεδα και της συνεχούς ανακατασκευής που προηγείται των νέων κατασκευών). Αυτή τη θεμελιώδη διαδικασία θέλουν να αγνοούν πάρα πολλά βεβιασμένα εκπαιδευτικά εγχειρήματα, ξεχνώντας ότι κάθε αφαίρεση προέρχεται από πιο συγκεκριμένες δομές. Συμφιλιώνοντας όμως τα μοντέρνα μαθηματικά με τα ψυχολογικά δεδομένα, ανοίγεται το πιο όμορφο μέλλον για την παιδαγωγική» (Piaget, 2000).

«Τα μαθηματικά θεωρούνται, «ου μόνον νυν, αλλά και το πάλαι» (Άθ. Ψαλίδας, 1797), ως ή «αναγκαιότερα και χρησιμότερα είς τον άνθρώπινον βίον» (Δημ. Δάρβαρις, 1803), αλλά και «εις κάθε επάγγελμα» (Ιω. Καστοριανός, 1797) επιστήμη, ή οποία «συντείνει ως ουδεμία τις άλλη των επιστημών είς γνώσιν της ανθρωπινής φύσεως» (Δημ. Γοβδελας, 1806) και, χάρη στους «άδιάζευκτους δεσμούς της» με όλες τις επιστήμες, βγάζει «τον άνθρωπον από το της αταξίας, αγνοίας τε και δουλείας χάος» (Ιωνας Σπαρμιώτης, 1797). Είναι «ή μόνη επιστήμη» ή οποία προσφέρει «τον άνώτατον βαθμόν βεβαιότητος»(Γ. Γλαράκης, Έρμης ό Λόγιος, 15 Μαΐου-1 η Ιουνίου 1820), γι' αυτό καί πρέπει «να προτιμάται από κάθε άλλη επιστήμη» (Στέφ. Δούγκας, 1816) και κάθε πραγματεία πού αναφέρεται στη φύση πρέπει να έχει γνώμονα τα μαθηματικά (Δημ. Γοβδελας, 1818), τα όποια είναι αναγκαία καί απαραίτητα «εις τα της φύσεως άδυτα εισδύναι βουλομένοις» (Ζ. Κάβρας, 1800) «καθ' όσον άγουσι το φως εΐς την έρευναν των μυστηρίων της φύσεως» (Βενιαμίν Λεσβίος, 1818). «'Αφαΐρεσον τα μαθηματικά από της Γης και θέλεις ϊδεΐ τον άνθρωπον έρπύζοντα επί της Γης», γράφει ο Βενιαμίν Λεσβίος». (Καράς ,1991)

«Τα μαθηματικά είναι εκείνα που θα βοηθήσουν το δεσμώτη άνθρωπο στο υπόγειο σπήλαιο να ελευθερωθεί από τα δεσμά του , να διακρίνει αντί των σκιών την πραγματικότητα και να βγει από το σκοτάδι της αιώνιας νύχτας στο φως και στην ημέρα»

Πλάτων (Πολιτεία)

1.2. Η χρησιμότητα των μαθηματικών στο παρελθόν και σήμερα- η αξία τους για τους μαθητές

Πριν από 2.500 χρόνια περίπου, κάτω από την σκιά των δέντρων λίγο έξω από μια αρχαία ελληνική πόλη ένας Έλληνας μαθηματικός προσπαθεί να δείξει στους μαθητές του πώς να κατασκευάζουν ένα κανονικό εξάγωνο (δηλ. ένα εξάγωνο με ίσες πλευρές και ίσες γωνίες). Λίγο πριν ολοκληρώσει τη μέθοδο, ένας από τους μαθητές του, ζητά το λόγο και του απευθύνει την εξής ερώτηση : "Μα δάσκαλε, μπορείς να μας πεις που θα μας χρησιμεύσει τούτη η γνώση που μας προσφέρεις ;" Τέτοιου είδους ερωτήσεις στην Αρχαία Ελλάδα ήταν πολύ σπάνιες και ίσως θα μπορούσαν να χαρακτηριστούν βέβηλες γιατί εκείνη την εποχή τα μαθηματικά ήταν αναπόσπαστο κομμάτι της φιλοσοφίας και το τελευταίο πράγμα που ζητούσαν σε μια φιλοσοφική συζήτηση ήταν να βρουν κάποια πρακτική εφαρμογή των συμπερασμάτων. Ωστόσο ο μαθηματικός δεν έδειξε να εκπλήσσεται, ούτε φυσικά μάλωσε το μαθητή του. Οδήγησε τους νεαρούς σ' ένα κοντινό μελίσσι και τους έδειξε το σχήμα της κερήθρας σε μια από τις κυψέλες όταν οι μαθητές παρατήρησαν το εξάγωνο σχήμα της ο μαθηματικός τους είπε πως οι μέλισσες γνωρίζουν να κατασκευάσουν κανονικά εξάγωνο και η ίδια τους η ζωή εξαρτάται από τούτη την ικανότητα και άρα αν οι μέλισσες χρησιμοποιούν τούτο το σχήμα, τότε κάποια χρήση θα έχει και γι' αυτούς.

Στη σημερινή εποχή ο δάσκαλος των μαθηματικών, ωστόσο, πρέπει να περιμένει μια τέτοιου είδους ερώτηση. Ζούμε σ' ένα κόσμο πρακτικών εφαρμογών και οι νέοι μαθαίνουν ή τουλάχιστον θέλουν να μάθουν εκείνες τις γνώσεις που μπορούν να χρησιμοποιούν. Αυτό σημαίνει ότι κάθε τι χειροπιαστό αποκτά αξία μέσα τους και όχι κάτι το αφηρημένο. Η κατάρα του αφηρημένου συνοδεύει τα μαθηματικά. Ωστόσο τα πράγματα δεν είναι έτσι. **Τα μαθηματικά βρίσκονται παντού γύρω μας, μόνο που χρειάζεται κάποια προσπάθεια να τα ανακαλύψουμε.**

Αυτό συμβαίνει για τους εξής κυρίως λόγους :

Ο ρόλος των μαθηματικών στο επιστημονικό στερέωμα ήταν ανέκαθεν βοηθητικός. Οι υπόλοιπες επιστήμες χρησιμοποιούν τα μαθηματικά για να λύσουν προβλήματα, με αποτέλεσμα η προσφορά των μαθηματικών να μην τονίζεται ιδιαίτερα. Μερικά παραδείγματα για του λόγου το αληθές.

Οι Αρχαίοι Αιγύπτιοι δεν θα μπορούσαν να ξαναβρούν τα όρια των χωραφιών τους μετά από κάθε πλημμύρα του Νείλου, αν δεν χρησιμοποιούσαν τη γεωμετρία, ούτε θα μπορούσαν να κτίσουν τις πυραμίδες, ούτε ποτέ ο Κολόμβος θα είχε ανακαλύψει την Αμερική αν δεν χρησιμοποιούσε τριγωνομετρία για να διαβάσει τ' αστέρια, ούτε ποτέ θα υπήρχε εναλλασσόμενο ρεύμα χωρίς μιγαδικούς αριθμούς, ούτε τα διαστημόπλοια θα είχαν φτάσει στον Άρη αν προηγουμένως δεν είχαν περιγραφεί λεπτομερώς οι τροχιές τους με μαθηματικές εξισώσεις. Ούτε φυσικά θα υπήρχαν υπολογιστές αν δεν υπήρχε το δυαδικό σύστημα αρίθμησης και η Άλγεβρα Boole, ούτε οι γιατροί θα μπορούσαν να προβλέψουν μια πιθανή καρδιακή προσβολή χωρίς τη θεωρία πιθανοτήτων και τη στατιστική (και πολλά ακόμα).

Τα μαθηματικά είναι μια επιστήμη που δεν δημιουργεί πολύ φασαρία γύρω της. Δεν χρειάζεται εργαστήρια και ακριβά μηχανήματα, ούτε πειραματόζωα, ούτε κοστίζει πολύ η έρευνα. Χρειάζεται μόνο χαρτί, μολύβι, βιβλίο και ένα ανθρώπινο νου με αρκετή όρεξη. Η στενή σύνδεση των μαθηματικών με τη φιλοσοφία (μόνο στα τέλη του 18ου αιώνα τα μαθηματικά ως επιστήμη αποσπάστηκαν εντελώς) ειδικά στα θεωρητικά μαθηματικά, πολλές φορές αφήνει τον αναγνώστη μαθηματικών θεμάτων, άφωνο. Έτσι οι μαθηματικοί μπορούν να φτιάξουν αριθμούς ώστε $4 + 3 = 0$ ή μπορούν να αποδείξουν το προφανές ή δημιουργούν επιφάνειες με μια μόνο όψη ή θεωρούν εντελώς λογικό ένας δεκαδικός με άπειρα δεκαδικά ψηφία να αποτελεί το μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος με αρχή και τέλος, η επιφάνειες με άπειρο μήκος να περικλείουν πεπερασμένο εμβαδόν (θεωρία των Fractals και του Χάους). Αυτό ωστόσο το φαινομενικό παράλογο που κρύβουν τα μαθηματικά αποτελεί την πραγματική γοητεία τους. Τούτη η τελευταία διαπίστωση δίνει μια άλλη διάσταση στο πρόβλημά μας. Υπάρχει μεγάλη πιθανότητα ένας μαθητής όταν δεν αντιλαμβάνεται μια μαθηματική έννοια να χρησιμοποιεί την ερώτηση "πού χρησιμεύει αυτό κύριε (ή κυρία);" σαν άλλοθι. Δηλαδή αν δεν πρόκειται να το χρησιμοποιήσει γιατί να το κατανοήσει; Ωστόσο δεν είναι ιδιαίτερα δύσκολο να πείσουμε τους μαθητές ότι τα μαθηματικά βρίσκονται παντού, και ότι σαν παγκόσμια γλώσσα συμβάλλουν στην

καλύτερη κατανόηση του κόσμου που μας περιβάλλει. Μερικά παραδείγματα πάντα υπάρχουν. Αυτό που πρέπει περισσότερο να χωνέψει ο μαθητής και ότι η μεγαλύτερη χρησιμότητα των μαθηματικών είναι η απαραίτητη βοήθεια που προσφέρουν στο να κατανοήσει κάποιος τη λειτουργία εκείνων των γνώσεων τελικά που θα χρησιμοποιήσει και που ίσως να μην έχουν καμία σχέση με τη συγκεκριμένη αφηρημένη έννοια από την οποία εκπορεύονται. Οι μαθητές ούτως ή άλλως πιστεύουν ότι τα μαθηματικά είναι ένα σκοτεινό δωμάτιο. Ο μαθηματικός πρέπει να τους πείσει ότι ένα σκοτεινό δωμάτιο δεν σημαίνει απαραίτητα ότι είναι και άδειο.
(www.mathematics.gr)

«Αν από την ανθρώπινη φύση εξαλείψουμε τα μαθηματικά, δεν είναι ποτέ δυνατό να γίνουμε άνθρωποι λογικοί…Με τα μαθηματικά γνωρίζουμε τέχνες, μουσική, κινήσεις και γενικά ότι καλό»

Πλάτων (Επινομίς 977c)

2.1. Σκοπός της διδασκαλίας των μαθηματικών

Σκοπός της διδασκαλίας των μαθηματικών είναι, σε σύνδεση με τα υπόλοιπα μαθήματα, να βοηθήσει τον νέο άνθρωπο να κατανοήσει το ανθρώπινο λογικό και να μάθει ο ίδιος να σκέφτεται διαλεκτικά. Κι η συνεισφορά τους σ' αυτό είναι πρακτική και σημαντική, αφού οι μαθητές μαθαίνουν να ελέγχουν τα εργαλεία της νόησης, μέσα από τη γνώση της γλώσσας της επιστήμης, όπως λέγονται τα μαθηματικά. Σήμερα, περιοριζόμαστε συχνά στη χρήση αυτών των εργαλείων σε στοιχειώδες επικοινωνιακό επίπεδο, ενώ στο λύκειο η διδασκαλία των μαθηματικών αφαιρείται τελείως από την πραγματικότητα και κινδυνεύει να καταλήξει σε σχολαστικισμό.

Ως προς τα μαθηματικά, ξεκινάμε από το να μάθει το παιδί να λογαριάζει, να κρίνει και να συγκρίνει και προχωράμε στο να συλλαμβάνει τις μαθηματικές έννοιες *και* σχέσεις κάθε μορφής και κατηγορίας, που εκφράζουν με αφηρημένο τρόπο τις σχέσεις ανάμεσα σε φαινόμενα του υλικού μας κόσμου. Να μπορεί να λύνει προβλήματα σε συγκεκριμένη ή αφηρημένη κατάσταση, να μπορεί να κατηγοριοποιεί τα πράγματα, τις έννοιες και τις καταστάσεις. Εδώ θα προσθέσουμε μερικά πράγματα ακόμη που δεν αναιρούν αλλά προεκτείνουν το θέμα.

Τα μαθηματικά θεωρούνται δύσκολη δουλειά κι οι μαθητές τα φοβούνται και σε τελευταία ανάλυση αποτυχαίνουν σ' αυτά σε πολύ μεγαλύτερο βαθμό απ' ότι στα άλλα μαθήματα και σ' άλλες επιστήμες. Η δυσκολία τους δε βρίσκεται στα ίδια τα μαθηματικά αλλά στον τρόπο που παρουσιάζονται , όπως άλλωστε συμβαίνει και με τη γλώσσα, που τα παιδιά δεν μπορούν να τη μάθουν. Τα προβλήματα που συναντάει ο δάσκαλος των μαθηματικών σήμερα θεωρούμε ότι είναι πολύ σοβαρά.

Αν και τα μαθηματικά είναι η γλώσσα των επιστημών της θετικής κατεύθυνσης, τα μαθηματικά διδάσκονται ανεξάρτητα από τις φυσικές επιστήμες. Η διαμόρφωσή τους σε ιδιαίτερο λογικό σύστημα, που διαμορφώνεται σε ξεχωριστό *μαθ*ησιακό πεδίο, έχει βέβαια τη μεγάλη παιδευτική του αξία, αλλά προαπαιτεί αυξημένη αφαιρετική ικανότητα, αντιστρεψιμότητα της σκέψης και παραστατική δύναμη, που όσο κι αν πειραματικές έρευνες δείξανε πως υπάρχουν από μια στιγμή και πέρα, δεν είναι όμως καλλιεργημένες γενικά και για όλους στο βαθμό που το απαιτεί η λειτουργία της επιστήμης.

Εκείνο που πρέπει να υπογραμμιστεί εδώ είναι ότι η μαθηματική παιδεία δεν μπορεί να είναι ξεκομμένη από τη ζωή. Τα μαθηματικά σα γνωστικό πεδίο μέσα στο σχολικό χώρο μπορούν να έχουν επιτυχία σε συνάρτηση με τις φυσικές επιστήμες, που μπορούν να εμπνεύσουν αλλά και να δημιουργήσουν κίνητρα για την προώθηση και την επιτυχία τους. Κάτι που έγινε στο παρελθόν με την ανάπτυξη της αριθμητικής, που η σύνδεσή της με τις πρακτικές της αστικής εμπορικής δραστηριότητας έδωσε τη δυνατότητα να λειτουργήσει ο χώρος με περισσότερη επιτυχία. Πρέπει, λοιπόν, να εμπεδώνονται και να καταξιώνονται τα μαθηματικά μέσα από τις σύγχρονες εφαρμογές τους και την καταξίωσή τους στην κοινωνία. Πρέπει να χρησιμοποιούνται τα απαιτούμενα εποπτικά μέσα διδασκαλίας: τα γεωμετρικά όργανα, τα διάφορα μαθηματικά μοντέλα σε γραφικές παραστάσεις, οι Η/Υ άλλα κ.ά ασκήσεις και εφαρμογές, που δε σταματούν στην τάξη. Να μεταφέρουμε ένα μέρος της πρακτικής άσκησης στους χώρους, όπου η γνώση δένεται με τη ζωή και φαίνεται καθαρότερα η σχέση των μαθηματικών με τις ανάγκες των ανθρώπων.

Όσο κι αν η αφαίρεση μάς στερεί από χαρακτηριστικά των πραγμάτων οικεία στην καθημερινή ζωή, όμως η αφαίρεση, η σχηματοποίηση, η κωδικοποίηση και η ταξινόμηση μάς ανοίγουν τις δυνατότητες ακριβέστερης προσέγγισης των πραγμάτων και κατανόησης της πραγματικότητας. Φυσικά κάπου εδώ εμφωλεύει ο κίνδυνος των μαθηματικών ακροτήτων, δημιουργώντας απωθητικές τάσεις στα παιδιά. Παρ' όλα αυτά τα μαθηματικά, όχι απλά συλλειτουργούν με τις φυσικές επιστήμες , αλλά είναι το εργαλείο της επιστημονικής έρευνας και μαζί η έκφραση του επιστημονικού στοχασμού. Αυτό κάθε άλλο παρά σημαίνει ότι μπορεί ν' αναπτυχθεί η μαθηματική σκέψη και επιστήμη χωρίς τη δική της νομοτελειακή πορεία. Οι σπουδές των Μαθηματικών δεν πρέπει να αποβλέπουν απλά σε ποσοτική μάθηση μαθηματικών γνώσεων. Μιας και θεωρούμε πως η παιδεία πρέπει να διαπλάθει περισσότερο παρά να πληροφορεί, πρέπει στα μαθήματα, να μπουν περισσότερο ουσιαστικές προτάσεις για εφαρμογές και λίγες για εμπέδωση της ύλης. Μια τέτοια εφαρμογή κι όχι κάτι αυτόνομο είναι και οι Ηλεκτρονικοί Υπολογιστές. Ακόμη στη διδασκαλία πρέπει να αναφέρονται και οι ιστορικές πηγές για τις μαθηματικές θεωρίες, για να γνωρίσουν οι νέοι την εξέλιξή τους, να ξανακάνουν την αργή πορεία, να ξαναζήσουν τις μακροχρόνιες προσπάθειες, τις αποτυχίες και τις προόδους που οδήγησαν στις σημερινές κατακτήσεις.

Τέλος, αξίζει να σημειώσουμε ότι η διδασκαλία της γλώσσας και των μαθηματικών, μέσα από την ιδιαίτερη γνώση κι άσκηση των οργάνων της νόησης, υποβοηθούν και τη γενική θεώρηση της γνώσης, των τρόπων και των νόμων του ανθρώπινου λογικού, συνδέονται δηλαδή με τη φιλοσοφική Γνωσιοθεωρία και Λογική.

2.2. Ειδική θεώρηση του προβλήματος των μαθηματικών

Είναι κοινή η διαπίστωση – που δεν αναφέρεται μόνο στην Ελλάδα –ότι γνωστικά αντικείμενα που σχετίζονται με τα μαθηματικά θεωρούνται δύσκολα από τους περισσότερους μαθητές και μαθήτριες. Το φαινόμενο «άγχους των μαθηματικών», η ιδιαίτερη έλλειψη αυτοπεποίθησης στην ικανότητα κάποιου να τα καταφέρει στα μαθηματικά είναι γνωστό σε όλες σχεδόν τις κοινωνίες με υψηλό μορφωτικό επίπεδο.

Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε πως οι στάσεις που αναπτύσσουν οι μαθητές και μαθήτριες απέναντι στα αντικείμενα αυτά σχετίζονται τόσο με το μαθησιακό περιβάλλον, όσο και με το οικογενειακό και κοινωνικό, καθώς οι απαιτήσεις της οικογένειας και της κοινωνίας από τα υποκείμενα, σε σχέση μα την εκπαίδευση τους αυξάνουν.

Η έρευνα στην περιοχή της διδακτικής των μαθηματικών –και από την επιστημολογική σκοπιά και από αυτή της Γνωστικής Ψυχολογίας- τείνει να υποθέτει πως η απόκτηση επιστημονικής γνώσης, σαν μια διαδικασία αλληλεπίδρασης υποκειμένου- αντικειμένου μέσα σε συγκεκριμένο περιβάλλον, εξαρτάται αποφασιστικά τόσο από το υποκείμενο, το οποίο και ενεργοποιεί τη διαδικασία δράσης πάνω στο προς γνώση αντικείμενο, όσο και από τη μορφή στην οποία παρουσιάζεται το αντικείμενο της γνώσης. «Εμπειρικές έρευνες έχουν βεβαιώσει την ισχυρή σύνδεση στάσης και επίδοσης σε μια σειρά από σχολικά αντικείμενα με προεξέχοντα αυτά των μαθηματικών και η σχέση αυτή παραμένει ενδιαφέρουσα ακόμη και αν ο αιτιακός προσδιορισμός της είναι προβληματικός» (Munby, 1983)

«Τα μοντέρνα μαθηματικά βρίσκονται πολύ πιο κοντά στις φυσικές ή αυθόρμητες νοητικές πράξεις του ατόμου (παιδιού ή εφήβου) από ότι η παραδοσιακή διδασκαλία αυτών των κλάδων, η οποία παραμένει προσκολλημένη στην ιστορία. Πρέπει πράγματι να παραδεχτούμε ότι αυτή η σύγκληση εξηγείται πάρα πολύ εύκολα:

στο βαθμό που η πρόοδος των μαθηματικών ανάγεται στις πηγές της κατασκευής τους και στη διεύρυνση του τομέα τους συναντά, εξαιτίας αυτού του γεγονότος, ορισμένες θεμελιώδεις δομές του νου. Όπως τόσο εύστοχα παρατήρησε ο S. Papert σχετικά μα τις σύγχρονες εργασίες για τις κατηγορίες, αυτές μας φέρνουν πιο κοντά στις νοητικές πράξεις <<του>> μαθηματικού παρά στις πράξεις <<της >>μαθηματικής (Piaget, 2000).

2.3. Εκτίμηση των δυσκολιών εκμάθησης και κατανόησης των μαθηματικών

Ένας σοβαρότατος ανασταλτικός φραγμός απέναντι στην έφεση και την αγάπη των μαθητών προς τα Μαθηματικά είναι η δυσκολία κατανόησης τους. Σε πολλούς παράγοντες θα μπορούσε να αποδώσει κανείς την ευθύνη γι' αυτήν. Η φύση του μαθήματος με το πλήθος και την ποικιλία των εννοιών, για την προσέγγιση των οποίων απαιτείται, μεταξύ άλλων, ικανότητα αντίληψης των λεπτών τους αποχρώσεων, πειθαρχία στη σκέψη, ευστροφία του νου και οργάνωση εργασίας, είναι το πρώτο πράγμα το οποίο συνήθως αιτιάται κανείς για τη φοβία του μαθητόκοσμου προς τα Μαθηματικά (Εξαρχάκος , 1991).

Είναι πολύ πιο δύσκολο να εξιστορήσει κανείς ακριβώς την *ανάπτυξη των* μαθηματικών εννοιών κατά τη διάρκεια του Δημοτικού σχολείου. Αυτό οφείλεται ενμέρει στο ότι το φάσμα των μαθηματικών εννοιών που πρέπει να μάθουν τα παιδιά γίνεται ευρύτερο, και μόνο λίγες από αυτές έχουν μελετηθεί εντατικά. Οφείλεται επίσης και στο ότι η εκπαίδευση στο σχολείο έχει μεν ισχυρά αποτελέσματα, χωρίς όμως, αυτά να γίνονται πλήρως αντιληπτά στην ανάπτυξη του παιδιού.

Πολλοί ερευνητές αποδίδουν, τις μαθησιακές δυσκολίες των μαθητών στα Μαθηματικά σε αδυναμίες, που οφείλονται σε ανεπάρκειες της μνήμης, διαταραχές του λόγου, ανικανότητα συγκέντρωσης της προσοχής, προβλήματα της όρασης ή της ακοής, διάφορα συναισθηματικά προβλήματα, ή σε ανικανότητα διατύπωσης συλλογισμών .

Εδώ αξίζει να προβάλουμε την άποψη ότι οι μαθησιακές δυσκολίες στα Μαθηματικά συνδέονται με τη δημιουργική προσπάθεια του μαθητή να οικοδομήσει νέες μαθηματικές γνώσεις. Η άποψη αυτή προέρχεται από την *κατασκευαστική θεωρία* μάθησης, η οποία στηρίζεται στις εμπειρικές και θεωρητικές εργασίες του Piaget *κα-*

θώς και στις μετέπειτα εργασίες ερευνητών στο χώρο της Διδακτικής των Μαθηματικών .

Η εκμάθηση Μαθηματικών αποτελεί διαδικασία κατά την οποία οι μαθητές αναδιοργανώνουν τη νοητική δραστηριότητα τους με σκοπό να ανταπεξέλθουν σε καταστάσεις που τους προβληματίζουν. Ως εκ τούτου, από διδακτικής πλευράς, η κατασκευή νέων μαθηματικών γνώσεων εξαρτάται κυρίως από τις καταστάσεις προβληματισμού με τις οποίες φέρνουμε τους μαθητές σε επαφή. Οι καταστάσεις αυτές θεωρούνται κατάλληλες στο βαθμό που διαταράσσουν την υπάρχουσα οργάνωση των γνώσεων των μαθητών. Με αυτή την έννοια. Κάθε ουσιαστική ,μάθηση ή αναδιοργάνωση γνώσεων προϋποθέτει τη βίωση δυσκολιών.

«Μεγάλο μέρος της ύλης των σχολικών μαθηματικών είναι πολύ στεγνό και τεχνικό συνεπώς ίσως δεν είχατε ποτέ την τύχη να διαπιστώσετε πόσο όμορφα μπορεί να είναι τα μαθηματικά»
(Serge Lang)

3.1. Οι δυσκολίες στη γλώσσα

«Μερικά παιδιά έχουν δυσκολίες στα μαθηματικά γιατί απλώς δυσκολίες στη γλώσσα. Αν, για παράδειγμα, σε μια τάξη η εργασία στα μαθηματικά γίνεται με μεθόδους που συνιστούν κυρίως εξατομικευμένη εργασία από τα παιδιά, εκεί τα παιδιά που έχουν δυσκολίες στην ανάγνωση θα αποτύχουν, γιατί αυτά δεν μπορούν να διαβάσουν τις οδηγίες του βιβλίου ή του φύλλου εργασίας και να εκτελέσουν την εργασία που τους ανατίθεται. Κάτι ανάλογο θα συμβεί και με τα παιδιά που έχουν δυσκολίες στη γραφή. Αυτά μπορεί να διαβάσουν και να καταλάβουν τις οδηγίες αλλά δεν θα μπορέσουν να γράψουν την εργασία που καλούνται να εκτελέσουν γραπτά. Ο Clement (1980) βρήκε ότι το ένα τέταρτο των παιδιών ηλικίας 12 ετών κάνει στις γραπτές εργασίες των μαθηματικών, γιατί έχουν ειδικές δυσκολίες στην ανάγνωση και στην οργάνωση της σκέψης τους» (Χρηστάκης, 2000).

3.2. Οι αναπτυξιακές δεξιότητες

«Τα παιδιά με αναπτυξιακές δυσκολίες έχουν μεγαλύτερη δυσκολία στη διδασκαλία της χρονικής ακολουθίας και διαδοχής, όπως είναι οι ημέρες της εβδομάδας, οι μήνες του έτους, οι ώρες των διαλειμμάτων κτλ. Τα παιδιά αυτά ίσως δεν μπορέσουν ποτέ να αναπτύξουν αυτόματη αντίληψη των αριθμητικών σχέσεων και των συνόλων. Ίσως χρειαστεί να μετρούν με τα δάκτυλα τους για να υπολογίζουν ακόμη και μικρές ποσότητες (π.χ. 3+2=;), όταν τα άλλα παιδιά θα έχουν κατά πολύ υπερβεί το στάδιο αυτό. Ίσως έχουν δυσκολίες στην τάξη και βάζουν τους αριθμούς σε λάθος θέση (π.χ. 15 αντί 51), ή αρχίζουν από τα πάνω προς τα κάτω αντί να κάνουν το αντίστροφο, όταν έχουν να κάμουν κάθετη αφαίρεση» (Χρηστάκης, 2000)

3.3. Δυσκολία γραφής αριθμών

Μερικά παιδιά έχουν δυσκολίες στη γραφή αριθμών και στη διαδοχή τους, γιατί έχουν γενικότερες δυσκολίες μάθησης. Τα παιδιά αυτά είναι μια άλλη ομάδα που έχει ανάγκη από ειδικότερη υποστηρικτική διδασκαλία.

Για τα παιδιά αυτά που παρουσιάζουν προβλήματα συνεργασίας τύπου αδεξιότητας, τα μαθηματικά μπορεί να δημιουργήσουν σοβαρά εμπόδια και πολλές δυσκολίες. Συχνά, όταν γράφουν π.χ. διψήφιους αριθμούς αρχίζουν από δεξιά προς τα αριστερά, δηλαδή γράφουν 14 αντί 41, 45 αντί 54 κτλ. Η δυσκολία αυτή δημιουργεί σοβαρά προβλήματα στην εκτέλεση των μαθηματικών πράξεων και την εύρεση του σωστού αποτελέσματος, όπως φαίνεται στα παρακάτω παραδείγματα:

23	αντί	32	23	αντί	23
+ 5		+ 5	X 6		X 9

Οι δεξιότητες του προσανατολισμού είναι πολύ σημαντικές επίσης για την αντίληψη του νοητικού χάρτη στο σύστημα των αριθμών- πρόκειται για τη θέση των αριθμών και το συσχετισμό μεταξύ τους. Για παράδειγμα, ο αριθμός 5 είναι πριν από τον αριθμό 6 και μετά τον αριθμό 4. Το 40 είναι 10 βήματα πριν από το 50. Αν τα παιδιά δεν έχουν μάθει αυτό το χάρτη των αριθμών δεν μπορούν να παίζουν με τους αριθμούς, να εργάζονται χωρίς τη χρήση πραγματικών αντικειμένων και να κάνουν ακριβείς υπολογισμούς και εκτιμήσεις.

3.4. Τα μαθηματικά σύμβολα σαν έννοια

«Σε ότι αφορά τα σύμβολα υπάρχει μια διαφορά ανάμεσα στην ανάγνωση, τη γραφή και τα μαθηματικά. Στην ανάγνωση και τη γραφή συνήθως τα σύμβολα έχουν άμεση σχέση με ό,τι συμβολίζουν. Το α είναι πάντοτε α, το τ και το ο κάνουν πάντοτε το κτλ. Στα μαθηματικά δεν είναι το ίδιο. Ο αριθμός 1, για παράδειγμα, άλλοτε χρησιμοποιείται ως 1 με την απόλυτη τιμή του, άλλοτε ως 10 (δεκάδα), ως 100 (εκατοντάδα) κτλ, ανάλογα με τη θέση του. Το νόμισμα των 10 δραχμών μπορούμε να πούμε ότι είναι το ίδιο με δύο νομίσματα των 5 δραχμών. Όταν λέμε 11 δραχμές είναι σα να λέμε δύο νομίσματα των 5 δραχμών και μία δραχμή κτλ. Πολύ πιο δύσκολο είναι, βέβαια, αν το παιδί με ειδικές δυσκολίες πρέπει να κάμει μια σειρά από πράξεις π.χ. πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό κτλ για να λύσει ένα πρόβλημα» (Χρηστάκης, 2000).

3.5. Αφηρημένες έννοιες και μαθηματικές πράξεις

«Μερικά παιδιά παρουσιάζουν δυσκολίες και προβλήματα στα μαθηματικά αλλά τα προβλήματα τους διαφέρουν πολύ από τα προβλήματα των παιδιών με ειδικές δυσκολίες μάθησης. Τα παιδιά αυτά μπορεί να μαθαίνουν εύκολα πράγματα ρουτίνας, αλλά δυσκολεύονται να καταλάβουν τι κάνουν και γιατί κάνουν αυτό που κάνουν. Μπορεί, για παράδειγμα, να κάνουν σωστά αριθμητικές πράξεις του τύπου 5 + 3=, 8-2=, αλλά αδυνατούν να εργαστούν αποτελεσματικά αν οι πράξεις αυτές πρέπει να γίνουν για τη λύση προβλημάτων π.χ. "πόσα λιγότερα / ή περισσότερα έχει ο Γιάννης από το Γιώργο;" ή "πόσες ομάδες των 7 παιδιών είναι σε μια τάξη των 25 μαθητών;" Για τα παιδιά αυτά η αφαίρεση π.χ. είναι μια αφηρημένη συμβολική διαδικασία των μαθηματικών που τους δημιουργεί δυσκολίες και προβλήματα» (Χρηστάκης, 2000).

3.6. Δυσκολίες στην επεξεργασία προβλημάτων –η γλώσσα των μαθηματικών

«Προϋπόθεση για τη λύση των προβλημάτων στα μαθηματικά είναι το παιδί να *κατανοεί* γλωσσικά το πρόβλημα. Για παράδειγμα, στα προβλήματα με διατύπωση όπως: "Πόσα περισσότερα είναι τα κορίτσια από τα αγόρια;" ή "Ποιος αριθμός ανάμεσα στο 45 και το 50 δεν διαιρείται ακριβώς με το 2 ή με το 3;", είναι ανάγκη το παιδί να κατανοήσει αυτό που ζητά το πρόβλημα, για να βρει τη σωστή απάντηση. Πολλά παιδιά που δεν ξέρουν την έννοια των όρων, όπως "μικρότερο", "ίδιο", "διαφορετικό", "περισσότερο από", "λιγότερο από", "μερικά", "όλα μαζί" κτλ, προφανώς δυσκολεύονται να κατανοήσουν οδηγίες και να λύσουν προβλήματα. Μερικές φορές πρέπει να μάθουν πολλές διαφορετικές λέξεις για τις ίδιες έννοιες. Για παράδειγμα, το σχήμα "=" αποδίδεται με τις λέξεις: "ίσον", "κάνει", "είναι το ίδιο με" κ.ά.

Σε άλλες περιπτώσεις τα παιδιά για να ξεπεράσουν τις δυσκολίες τους πρέπει να γυρίσουν πίσω, σε προηγούμενα επίπεδα μαθηματικής γνώσης και αφού μάθουν τις δεξιότητες που περιλαμβάνονται σ' αυτά να μπορούν να κατανοούν το πρόβλημα που πρέπει να λύσουν. Η γλώσσα των μαθηματικών περιλαμβάνεται, βέβαια, στο πρόγραμμα του νηπιαγωγείου» (Χρηστάκης, 2000).

3.7. Ανεπαρκής εμπέδωσης των δεξιοτήτων των μαθηματικών

«Πολλές φορές παρατηρείται δυσκολία στα παιδιά όταν πρέπει να διδαχτούν κάτι, το οποίο στηρίζεται σε δεξιότητες, οι οποίες έπρεπε να έχουν διδαχθεί πριν ή έχουν διδαχθεί αλλά δεν έχουν φτάσει στο στάδιο του αυτοματισμού, πράγμα που είναι απαραίτητο για να κατανοηθεί και να κατακτηθεί η νέα δεξιότητα. Στα μαθηματικά, όπου η μάθηση ακολουθεί αλυσιδωτή πορεία και κάθε γνώση ή δεξιότητα οικοδομείται σε προηγούμενα, η επαρκής κατοχή όλων όσων έχουν διδαχθεί είναι βασική απαίτηση. Η εμφάνιση δυσκολιών στα προηγούμενα στάδια συχνά δημιουργεί ανησυχία και αναστάτωση τόσο στους γονείς όσο και στους δασκάλους» (Χρηστάκης, 2000).

3.8. Τα ιδιαίτερα στοιχεία ψυχοσύνθεσης και χαρακτήρα του παιδιού

«για τις αποτυχίες στο μάθημα των μαθηματικών υπεισέρχονται βασικοί συναισθηματικοί παράγοντες».
(Jean Piaget, 2000)

Σημαντικοί παράγοντες για τις δυσκολίες στα μαθηματικά είναι:

α. Ο τρόπος που διδάσκονται.

β. Τα ατομικά χαρακτηριστικά των παιδιών. Αδύνατη μνήμη, μπέρδεμα στο διάστημα, ανικανότητα να δουλέψει το παιδί με αφηρημένα σύμβολα, είναι μερικά από τα χαρακτηριστικά αυτά.

γ. Ένας τρίτος, πολύ σημαντικός παράγοντας είναι πώς το παιδί αισθάνεται για τον εαυτό του όταν ασχολείται με τα μαθηματικά.

Υπάρχουν παιδιά τα οποία έχουν αναπτύξει την ικανότητα επεξεργασίας γνωστικών σχημάτων, αλλά δεν αισθάνονται καλά όταν ασχολούνται με τα μαθηματικά. Πολλοί ερευνητές έχουν ασχοληθεί με τα συναισθήματα που προκαλούν τα μαθηματικά στα παιδιά και τους ενήλικες. Πολλές φορές μια αποτυχημένη απάντηση προκαλεί στο παιδί απογοήτευση και πανικό. Για το λόγο αυτό είναι ανάγκη η μελέτη των ειδικών δυσκολιών των παιδιών στα μαθηματικά να περιλαμβάνει και παρακολούθηση τους κατά την ώρα της εργασίας. Ένας απλός τρόπος να καταλαβαίνουμε τα συναισθήματα των παιδιών με τα μαθηματικά είναι να τα ρωτούμε "πώς αισθάνονται όταν ασχολούνται με τα μαθηματικά ή αν τους αρέσουν τα μαθηματικά".

4.1. Αριθμοί και μαθηματικά σύμβολα

➢ **Απόλυτη και τακτική έννοια του αριθμού**

Το παιδί στην σχολική ηλικία δυσκολεύεται να διακρίνει την απόλυτη και τακτική έννοια του αριθμού. Λέγοντας δυσκολία διάκρισης της απόλυτης και τακτικής έννοιας του αριθμού εννοείται π.χ. Ο αριθμός «3» δηλώνει ένα σύνολο 3 αντικειμένων (απόλυτος αριθμός) και φανερώνει ακόμα την τάξη με την έννοια τρίτος (τακτικός αριθμός). Στις περισσότερες περιπτώσεις το παιδί που έχει κατανοήσει την απόλυτη έννοια του αριθμού δεν μπορεί να δεχτεί την διττή του σημασία και την χρησιμότητα του και σαν τακτική έννοια και υποθέτει πως πρέπει να υπάρχει ένα διαφορετικό σύνολο κανόνων με το οποίο θα μπορέσει να υπολογίζει τακτικές έννοιες.

➢ **Σχέση γραπτού συμβόλου με την απόλυτη και τακτική έννοια του αριθμού**

Το παιδί στην σχολική ηλικία δυσκολεύεται να συνδέει το γραπτό σύμβολο με την απόλυτη και τακτική έννοια του αριθμού.

Γραπτή σύνδεση του συμβόλου με την απόλυτη και την τακτική έννοια του αριθμού εννοείται π.χ. Το γραπτό σύμβολο «3» συνδέεται με το σύνολο τριών αντικειμένων και με την έννοια της διαδοχής ένα-1, δύο-2, τρία-3, πρώτος, δεύτερος, τρίτος.

Για το παιδί τα νούμερα οπτικά έχουν συνδυαστεί με τέτοιο τρόπο που αντιστοιχούν μόνο σε σύνολο συγκεκριμένων αντικειμένων. Η τακτική έννοια των συμβόλων δεν είναι κατανοητή και προσβάσιμη στην παιδική νοημοσύνη κατά τα πρώτα στάδια της εξέλιξης της.

➢ **Αριθμοί και γράμματα που μοιάζουν οπτικά**

Το παιδί στην σχολική ηλικία δυσκολεύεται να διακρίνει αριθμούς και γράμματα που μοιάζουν οπτικά. Για παράδειγμα δυσκολεύεται να διακρίνει «ε-3», «σ-6», «2-δ», «φ-9».

Ως γνωστόν η όραση είναι ένα από τα μέσα που μεταφέρουν εγκεφαλικά ερεθίσματα στον εγκέφαλο ο οποίος και τα επεξεργάζεται. Σε παιδική ηλικία καθώς η διαμόρφωση των σωματικών οργάνων, της νοημοσύνης και της σκέψης δεν έχουν ολοκληρωθεί πλήρως είναι αναμενόμενο πως θα υπάρχει σύνχηση στο διαχωρισμό παρόμοιων οπτικά συμβόλων. Για αυτό και το παιδί αδυνατεί να κατανοήσει τη διαφορά ανάμεσα σε αριθμούς ή αριθμούς και γράμματα που μοιάζουν οπτικά.

- **<u>Γραφή των αριθμών με τη σωστή σειρά των ψηφίων τους</u>**

Το παιδί στην σχολική ηλικία δυσκολεύεται να γράψει τους αριθμούς με τη σωστή σειρά των ψηφίων τους, για παράδειγμα: να παραλείπει ψηφία (2305 αντί 235), να προσθέτει (145 αντί 1145), να αντικαθιστά (683 αντί 663), να αντιστρέφει ολόκληρο ή μέρος του αριθμού (54 αντί 45, 235 αντί 253).

Το παιδί τις πιο πολλές φορές δεν μπορεί να κατανοήσει την διάκριση των αριθμών με βάση το πλήθος των στοιχείων που αυτοί αντιπροσωπεύουν. Είναι πολύ δύσκολο να καταλάβει το παιδί ότι ένας αριθμός μπορεί ανάλογα με την σειρά που τοποθετείται να συμβολίζει μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες, χιλιάδες κ.τ.λ. δύσκολά λοιπόν κατανοείται ότι το <<5>> έχει άλλη έννοια μόνο του, και άλλη έννοια στον αριθμό <<756>> ή στον αριθμό <<5001>>.

Ένα άλλο λάθος που γίνεται είναι ότι τα παιδιά συνδυάζουν την έννοια του <<0>> με το την έννοια του <<τίποτα>>. Για αυτό το λόγο πολύ εύκολα μπορούν να το παραλείψουν αν το δουν σε ένα αριθμό. Για τα παιδιά δεν είναι λάθος αν γράψεις <<56>> αντί για <<506>>, εφόσον ο αριθμός που παραλήφθηκε είναι το <<0>> που γι' αυτά δεν συμβολίζει τίποτά.

- **<u>Τα σύμβολα των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων και ο συνδυασμός τους</u>**

Το παιδί στην σχολική ηλικία δυσκολεύεται να διακρίνει τα σύμβολα των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων και τους συνδυασμούς τους. Έτσι παρατηρείται δυσκολία στη διάκριση των συμβόλων (+, -, Χ, :/), και των συνδυασμών τους (+-), (+Χ), (:/Χ) σε αντίστοιχες πράξεις.

- **Εξάσκηση προπαίδειας και πολλαπλασιασμού**

Το παιδί στην σχολική ηλικία παρουσιάζει δυσκολίες στην εξάσκηση της εκμάθησης της προπαίδειας και του πολλαπλασιασμού, δηλαδή τον πολλαπλασιασμό ως πρόσθεση ίσων συνόλων και αριθμητικά παιχνίδια με πίνακες.

- **Διατήρηση της ποσότητας και της πρώιμης αρίθμησης**

Μερικές φορές, ιδιαίτερα στις μικρές ηλικίες, βλέπουμε παιδιά τα οποία είναι ικανά να αριθμούν, να μετρούν σύνολα και να γράφουν αριθμούς και νομίζουμε ότι τα παιδιά αυτά θα είναι πολύ καλά στα μαθηματικά. Ωστόσο, όταν αρχίζουν να εργάζονται με ασκήσεις απλής πρόσθεσης και αφαίρεσης, διαπιστώνουμε ότι παρουσιάζουν σοβαρές δυσκολίες. Τις περισσότερες φορές κύρια αιτία του φαινομένου αυτού είναι ότι τα παιδιά δεν ξέρουν ότι οι αριθμοί είναι σταθεροί και δεν αλλάζουν έννοια όπου κι αν βρίσκονται. Για παράδειγμα και σύμφωνα με τη θεωρία του Piaget *αν ο* δάσκαλος κατασκευάσει δύο γραμμές με αντίστοιχες σειρές αριθμών

1 2 3 4 5

6 7 8 9 10

και ζητήσουμε από το παιδί να μετρήσει το μήκος των γραμμών θα μας πει ότι είναι ίσες.

Αν προεκτείνουμε τη μια γραμμή, ώστε να φαίνεται μεγαλύτερη από την άλλη και ταυτόχρονα αραιώσουμε τους αριθμούς, όπως παρακάτω, θα μας πει ότι η μεγαλύτερη γραμμή έχει και περισσότερους

1 2 3 4 5

6 7 8 9 10

αριθμούς.

Στις περιπτώσεις αυτές που η οπτική εικόνα του αριθμού φαίνεται να αλλάζει, επηρεάζεται αντίστοιχα και η έννοια των πράξεων (Χρηστάκης, 2000).

- **Συνδυασμοί αριθμών**

Πολλά παιδιά στενοχωρούνται πολύ όταν είναι αναγκασμένα να μετρούν με τα δάχτυλα τους ή να κάνουν πράξεις χρησιμοποιώντας αριθμομηχανές, ενώ τα άλλα παιδιά της ηλικίας τους κάνουν τους ίδιους λογαριασμούς με το μυαλό τους. Η αυτοματοποίηση των συνδυασμών των αριθμών (π.χ. 5 σημαίνει 3+2 ή 4+1) είναι μια συνηθισμένη δυσκολία στα μαθηματικά.

- **Η έννοια των συνόλων**

«Η *βασικ*ότερη ίσως μαθηματική έννοια είναι η έννοια του συνόλου. Η έννοια αυτή χρησιμοποιείται για τη θεμελίωση όλων των κλάδων των μαθηματικών» (Τσαμάτος, 1989).

«Την καθαρά μαθηματική έννοια του συνόλου τη συναντούμε αργά στο παιδί. Άλλωστε, εμφανίζεται με τελείως διαφορετική μορφή και όταν τους μιλάμε για σύνολα, αυτά σκέφτονται απλώς συλλογές, σκέφτονται άτομα τα οποία έχουν δει συλλογικά. Η έννοια του συνόλου είναι πολύ λιγότερο πρόωρη από ό,τι πιστεύουμε.

Ένα σύνολο ορίζεται ως μία συλλογή που χαρακτηρίζεται από κοινά γνωρί-*σματα*.

Παρατηρούμε λοιπόν μεταξύ των 5 και 8 ετών τη δόμηση των συνόλων, η οποία δεν είναι καθόλου εύκολη. Τα παιδιά κάνουν πρώτα μικρές συλλογές κατά παράταξη, μετά συνδυασμένες συλλογές, χωρίς όμως να φτάνουν ακόμη στον εγκλεισμό και, ού*τε* προπαντός, στον ποσοτικό εγκλεισμό, δηλαδή στην ιδέα ότι υπάρχουν περισσότερα στοιχεία στο Β από ό,τι στο Α, αν το Α είναι μέρος του Β. Το παιδί δεν θα συγκρίνει το Α με το Β, αλλά το Α με το άλλο μέρος του Β. Αυτό συμβαίνει μέχρι την ηλικία των 8 ετώ*ν* (*κα*τ*ά* μέσο όρο περίπου στη Γαλλία)» (Piaget, 2000).

4.2. Γλώσσα και μαθηματικά

➢ **Το αριθμητικό λεξιλόγιο**

Το παιδί στην σχολική ηλικία δυσκολεύεται να μάθει και χρησιμοποιεί το αριθμητικό λεξιλόγιο. Παρουσιάζει δυσκολίες δηλαδή στην εκμάθηση και χρήση αριθμητικού λεξιλογίου με τα ονόματα των αριθμών, την ανάλυση σε μονάδες, εκατοντάδες, χιλιάδες αλλά και με την έννοια των τεσσάρων πράξεων: πρόσθεση-βάζω όλα μαζί, αφαίρεση βγάζω, πολλαπλασιασμός επαναλαμβάνω και διαίρεση μοιράζω κλπ.

➢ **Το γεωμετρικό λεξιλόγιο**

Το παιδί στην σχολική ηλικία δυσκολεύεται να μάθει να χρησιμοποιεί το γεωμετρικό λεξιλόγιο δηλαδή την εκμάθηση του γεωμετρικού λεξιλογίου με την διάκριση και ονομασία γεωμετρικών σχημάτων.

➢ **Η λογικομαθηματική δομή ενός λεκτικά διατυπωμένου προβλήματος**

Το παιδί στην σχολική ηλικία δυσκολεύεται να αντιληφθεί τη λογικομαθηματική δομή ενός λεκτικά διατυπωμένου προβλήματος. Δηλαδή δυσκολεύεται να κατανοήσει το κείμενο του προβλήματος, να διακρίνει το ουσιώδες από το επουσιώδες, να συνδέει τα επιμέρους στοιχεία στην σύνθεση του όλου κ.ά.

➢ **Στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων**

Το παιδί στην προσχολική ηλικία δυσκολεύεται να χρησιμοποιήσει στρατηγικές επίλυσης των προβλημάτων, δηλαδή στην επικέντρωση της προσοχής σε δύο μεταβλητές ταυτόχρονα π.χ. μήκος-πλάτος, χρόνος-απόσταση, χρώμα-σχήμα και στην σύνδεση των επιμέρους στοιχείων στη σύνθεση του όλου.

- **Γενίκευση διατυπώνοντας όμοια προβλήματα**

Το παιδί στην προσχολική ηλικία δυσκολεύεται να γενικεύει διατυπώνοντας όμοια προβλήματα. Δυσκολεύεται δηλαδή στην διατύπωση όμοιων προβλημάτων αποφεύγοντας τις υπεραπλουστεύσεις και τις γενικεύσεις.

- **Γραπτός λόγος και μαθηματικά**

Υπάρχει η άποψη μεταξύ των μη ειδικών ότι τα άτομα με μαθησιακές δυσκολίες στο γραπτό λόγο είναι πολύ ικανά στα μαθηματικά, προβάλλοντας ως παράδειγμα την περίπτωση του Αϊνστάιν. Έρευνες όμως έχουν δείξει σήμερα πως υπάρχει συσχέτιση μεταξύ δυσκολιών στη χρήση του γραπτού λόγου και δυσκολιών στην αριθμητική, σε ποσοστό 30 – 35% .

Ά δημοτικού

Τα παιδιά στην Ά δημοτικού ανακαλύπτουν και κατασκευάζουν ατομικά ή συλλογικά νέες έννοιες, εφαρμόζουν και σταθεροποιούν τις ήδη αποκτημένες γνώσεις, ερευνούν ανοιχτές προβληματικές καταστάσεις και αναπτύσσουν μεθοδολογικές ικανότητες για την επίλυση προβλημάτων.

Τα προβλήματα πρέπει να είναι τέτοια ώστε να δίνονται ευκαιρίες στους μαθητές να εξερευνούν μία κατάσταση, να κατασκευάζουν ερωτήσεις και προβλήματα με βάση συγκεκριμένα δεδομένα, να διατυπώνουν πολλαπλά το ίδιο πρόβλημα, να αναγνωρίζουν και να περιγράφουν ανάλογες καταστάσεις, να χρησιμοποιούν τους αριθμούς στην καθημερινή ζωή.

Χρησιμοποιούν, οργανώνουν και επεκτείνουν τις προϋπάρχουσες βιωματικές γνώσεις τους σχετικά με τους αριθμούς από την προσχολική ηλικία (απαρίθμηση, προφορική αρίθμηση, άμεση εκτίμηση μικρών ποσοτήτων, ανάγνωση αριθμών). Απαγγέλλουν, διαβάζουν, γράφουν και αναγνωρίζουν ποσότητες αριθμών μέχρι το 100. Απαγγέλλουν τους αριθμούς 1-1, 2-2, 5-5 *και* 10-10 μέχρι το 100. Διαβάζουν και γράφουν τους αριθμούς με βάση το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης. Χρησιμοποιούν αντικείμενα και κατάλληλο εκπαιδευτικό υλικό (ζάρια, αριθμητήριο, κτλ) και συνδέουν τις ποσότητες με τους αριθμούς. Εκτελούν απλές προσθέσεις και αφαιρέσεις μεταξύ διψήφιων αριθμών χωρίς να περιλαμβάνεται στους στόχους η επισταμένη διδασκαλία των αλγορίθμων της γραπτής πρόσθεσης και της αφαίρεσης.

Πρόσθεση και αφαίρεση

Μεταβαίνουν προοδευτικά από καταμετρήσεις αντικείμενων σε διαδικασίες νοερών υπολογισμών. Στόχος είναι οι μαθητές να εκτελούν προσθέσεις και αφαιρέσεις εφαρμόζοντας τις διαδικασίες των νοερών υπολογισμών με βάση την πεντάδα και τη δεκάδα. Χειρίζονται δραστηριότητες αθροιστικής επανάληψης και μοιρασιάς. Εξοικειώνονται με καταστάσεις αθροιστικής επανάληψης ίσων ποσών για μία πρώτη προσέγγιση στην έννοια του πολλαπλασιασμού και με καταστάσεις μοιρασιάς (ισομερούς ή όχι) για μία διαισθητική προσέγγιση στην έννοια της διαίρεσης. Μετρούν μήκη με αυθαίρετη μονάδα, αναγνωρίζουν και χρησιμοποιούν συμβατικές μονάδες για τα άλλα μεγέθη [μήκος, χρόνος, χρήμα και βάρος (μάζα). Χρησιμοποιούν αυθαίρετες μονάδες για τη μέτρηση του μήκους. Αναγνωρίζουν και χρησιμοποιούν ως εφαρμογές στους αριθμούς και τις πράξεις τα νομίσματα μέχρι και το κατοστάρικο.

Έχουν μια πρώτη επαφή με την έννοια του χρόνου και των οικείων χρονικών διαστημάτων καθώς και με τη λειτουργία της ζυγαριάς Προσανατολίζονται στο χώρο , χαράσσουν και αναπαράγουν σχήματα.

Εντοπίζουν τη θέση αντικειμένων με σημείο αναφοράς τον εαυτό τους ή εξωτερικά σημεία αναφοράς. Αποκτούν τη δεξιότητα να χαράζουν ευθύγραμμα τμήματα με το χάρακα ενώνοντας συγκεκριμένα σημεία και μπορούν να ανακατασκευάζουν απλά παζλ, πλακόστρωτα, αλγοριθμικά σχήματα κτλ Αναγνωρίζουν, ονομάζουν και ταξινομούν απλά στερεά και ευθύγραμμα σχήματα και μαθαίνουν τα βασικά χαρακτηριστικά τους. Διακρίνουν τα στερεά: κύβο, ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, κύλινδρο, σφαίρα. και τα επίπεδα σχήματα : κύκλο, τετράγωνο ,ορθογώνιο και τρίγωνο. Αναγνωρίζουν συμμετρικά σχήματα ως προ άξονα Παρατηρούν εικόνες και σχήματα συμμετρικά.

Ἀ δημοτικού

Τα παιδιά στη Ἀ δημοτικού ανακαλύπτουν και κατασκευάζουν ατομικά ή συλλογικά νέες έννοιες, εφαρμόζουν και σταθεροποιούν τις ήδη αποκτημένες γνώσεις, ερευνούν ανοιχτές προβληματικές καταστάσεις και αναπτύσσουν μεθοδολογικές ικανότητες για την επίλυση προβλημάτων. Τα προβλήματα πρέπει να είναι τέτοια ώστε να δίνονται ευκαιρίες στους μαθητές να εξερευνούν μία κατάσταση, να κατασκευάζουν ερωτήσεις και προβλήματα με βάση συγκεκριμένα δεδομένα, να διατυπώνουν πολλαπλά το ίδιο πρόβλημα, να αναγνωρίζουν και να περιγράφουν ανάλογες καταστάσεις. Ακόμα αναγνωρίζουν, γράφουν, συγκρίνουν και διατάσσουν τους φυσικούς αριθμούς μέχρι το 1.000. Αναγνωρίζουν την αξία θέσης των ψηφίων (μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες χιλιάδες). Εμπεδώνουν και επεκτείνουν το σύνολο των φυσικών μέχρι το 1.000 μέσα από δραστηριότητες και προβλήματα και μέσα από τη χρήση εκπαιδευτικού υλικού (αριθμητήριο, κύβους, κτλ) για την αναπαράσταση των ψηφίων των αριθμών και των σχέσεων μεταξύ τους. Εκτελούν τους αλγόριθμους της γραπτής πρόσθεσης και αφαίρεσης μεταξύ διψήφιων και τριψήφιων αριθμών χωρίς κρατούμενα και με κρατούμενα.

Πρόσθεση και αφαίρεση

Πριν φθάσουν στην εκτέλεση γραπτών αλγορίθμων εκτελούν νοερές προσθέσεις και αφαιρέσεις μονοψήφιων αριθμών εφαρμόζοντας διαδικασίες υπολογισμών με βάση την πεντάδα και τη δεκάδα. Εκτελούν νοερές προσθέσεις και αφαιρέσεις διψήφιων και τριψήφιων αριθμών εφαρμόζοντας συγκεκριμένες διαδικασίες.

Πολλαπλασιασμός.

Εκτελούν απλούς πολ/σμούς. Απομνημονεύουν τον πίνακα της προπαίδειας. Εισάγονται στην έννοια του πολλαπλασιασμού , των συμβόλων του και της αντιμεταθετικής ιδιότητας. Αναγνωρίζουν και εφαρμόζουν τις ιδιότητες της αντιμετάθεσης και του προσεταιρισμού στην πρόσθεση και τον πολ/σμό Το άθροισμα με περισσότερους προσθετέους και το γινόμενο με περισσότερους από δύο παράγοντες συνδυάζεται με υποδείξεις που οδηγούν στις ιδιότητες της αντιμετάθεσης και του προσεταιρισμού. Χειρίζονται δραστηριότητες (ισομερούς ή όχι) μοιρασιάς Εξοικειώνονται με βιωματικές, εμπράγματες και εικονικές καταστάσεις μοιρασιάς (ισομερούς ή όχι), χωρίς την εισαγωγή του αλγόριθμου της διαίρεσης. Εφαρμόζουν τη διαδικασία μέτρησης μηκών και επιφανειών με σταθερές και αυθαίρετες μονάδες μέτρησης. Μετρούν και συγκρίνουν χρονικές διάρκειες, εκτιμούν την αξία των νομισμάτων και χρησιμοποιούν τις μονάδες βάρους του κιλού και του γραμμάριου. Εισάγονται στη χρήση σταθερών μονάδων μέτρησης : το μέτρο και το εκατοστό. Μετρούν επιφάνειες χρησιμοποιώντας ως μονάδες μέτρησης άλλες μικρότερες επιφάνειες και γεωμετρικά σχήματα. Χρησιμοποιούν την μέτρηση του χρ*όνου με το* ρολόι. Κάνουν χρηματικές ανταλλαγές μέχρι και το χιλιάρικο.

Σχεδιάζουν και αναπαράγουν σχήματα Μέσα από κατάλληλες δραστηριότητες μαθαίνουν να προσανατολίζονται και να κινούνται σε τετραγωνισμένο χαρτί και να σχεδιάζουν σχήματα με το χάρακα σε λευκό και σε τετραγωνισμένο χαρτί. Αναγνωρίζουν, να χαράσσουν και να ονομάζουν σημεία, ευθ. τμήματα και ευθείες. Να διαπιστώνουν εμπειρικά την παραλληλία και καθετότητα ευθειών. Αναγνωρίζουν, ονομάζουν και ταξινομούν στερεά και ευθύγραμμα σχήματα .

Μαθαίνουν να διακρίνουν τα στερεά : κύβο, ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, κύλινδρο, σφαίρα, πυραμίδα τετραγωνική και τριγωνική. Έρχονται σε επαφή με τα επίπεδα σχήματα : τετράγωνο, ορθογώνιο, τρίγωνο και κύκλο. Επισημαίνουν τα χαρακτηριστικά τους. Ελέγχουν, συμπληρώνουν και κατασκευάζουν συμμετρικά σχήματα .

Χρησιμοποιούν το δίπλωμα και το διαφανές χαρτί. Παίζουν με πλακόστρωτα, μωσαϊκά, πάζλ, επαναλαμβανόμενους αλγόριθμους, αριθμητικά ή λογικά παιχνίδια. Μεγεθύνουν σχήματα σε τετραγωνισμένο χαρτί.

'Γ δημοτικού

Τα παιδιά στην Γ δημοτικού ανακαλύπτουν και κατασκευάζουν ατομικά ή συλλογικά νέες έννοιες, εφαρμόζουν και σταθεροποιούν τις ήδη αποκτημένες γνώσεις, ερευνούν ανοιχτές προβληματικές καταστάσεις και αναπτύσσουν μεθοδολογικές ικανότητες για την επίλυση προβλημάτων.

Τα προβλήματα πρέπει να είναι τέτοια ώστε να δίνονται ευκαιρίες στους μαθητές να εξερευνούν μία κατάσταση, να κατασκευάζουν ερωτήσεις και προβλήματα με βάση συγκεκριμένα δεδομένα, να διατυπώνουν πολλαπλά το ίδιο πρόβλημα, να αναγνωρίζουν και να περιγράφουν ανάλογες καταστάσεις, να χρησιμοποιούν τους αριθμούς στην καθημερινή ζωή.

Αναγνωρίζουν, γράφουν, συγκρίνουν και διατάσσουν τους φυσικούς αριθμούς μέχρι το 10.000. Αναγνωρίζουν την αξία θέσης των ψηφίων (μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες, χιλιάδες). Σχηματίζουν την προσθετική και πολλαπλασιαστική σύνθεση ενός φυσικού αριθμού.

Εμπεδώνουν και επεκτείνουν το σύνολο των φυσικών μέχρι το 10.000 μέσα από δραστηριότητες και προβλήματα και μέσα από τη χρήση εκπαιδευτικού υλικού (αριθμητήριο, κύβους, κτλ) για την αναπαράσταση των ψηφίων των αριθμών και των σχέσεων μεταξύ τους. Εκτελούν τους αλγόριθμους της γραπτής πρόσθεσης και αφαίρεσης μεταξύ τριψήφιων και τετραψήφιων αριθμών. Διακρίνουν ότι η πρόσθεση και η αφαίρεση είναι αντίστροφες πράξεις.

Πρόσθεση και αφαίρεση

Εκτελούν νοερές προσθέσεις και αφαιρέσεις αριθμών.. Μετατρέπουν οριζόντιες προσθέσεις και αφαιρέσεις σε κατακόρυφες και τις λύνουν τελικά με τον αλγόριθμο που έχει επικρατήσει πολιτισμικά στη χώρα μας. Εκτελούν τον αλγόριθμο του πολ/σμού ακεραίων (μέχρι διψήφιο με τριψήφιο). Πολλαπλασιάζουν έναν ακέραιο αριθμό με 10, 100, 1000. Εκτελούν διαιρέσεις με μονοψήφιο διαιρέτη.

Πολλαπλασιασμός και διαίρεση

Σταθεροποιούν τη γνώση της προπαίδειας . Εισάγονται στις οριζόντιες γραπτές διαιρέσεις (αντιστροφή της προπαίδειας). Εκτελούν διαιρέσεις με μονοψήφιο διαιρέτη. Χρησιμοποιούν τις προϋπάρχουσες γνώσεις τους για την πρόσθεση, αφαίρεση και πολ/σμό στη διερεύνηση προβλημάτων διαίρεσης.

Τα κλάσματα

Μέσα από κατάλληλες δραστηριότητες έρχονται σε επαφή με απλές κλασματικές μονάδες όπως 1/2, 1/3, 1/4 κτλ. Γνωρίζουν τις μονάδες μέτρησης και εκτελούν μετατροπές μονάδων .

Πειραματίζονται με τη χρήση αυθαίρετων μονάδων μέτρησης, μηκών και επιφανειών. Χρησιμοποιούν συμβατικά εργαλεία μέτρησης (μέτρο, ζυγαριά, ρολόι). Περιγράφουν, αναπαράγουν και κατασκευάζουν γεωμετρικά σχήματα και στερεά. Εφαρμόζουν συνήθεις τεχνικές χάραξης κάθετων ευθειών με τη βοήθεια γεωμετρικών οργάνων.

Με τη βοήθεια οργάνων χαράσσουν γεωμετρικά σχήματα. Μετρούν τις διαστάσεις χρησιμοποιώντας αυθαίρετες και συμβατικές μονάδες μέτρησης. Παρατηρούν και αναπαράγουν γεωμετρικά στερεά, (κύβος, ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, τετραγωνική πυραμίδα) και τα αναπτύγματά τους. Κατανοούν τις έννοιες έδρα, κορυφή, ακμή και την έννοια της ορθής γωνίας. Κατασκευάζουν και συμπληρώνουν το συμμετρικό σχήματος. Αναγνωρίζουν άξονες. Κατασκευάζουν το συμμετρικό ενός επιπέδου σχήματος ως προς άξονα με δίπλωση.

΄Δ δημοτικού

Τα παιδιά στην ΄Δ δημοτικού ανακαλύπτουν και κατασκευάζουν ατομικά ή συλλογικά νέες έννοιες, εφαρμόζουν και σταθεροποιούν τις ήδη αποκτημένες γνώσεις, ερευνούν ανοιχτές προβληματικές καταστάσεις και αναπτύσσουν μεθοδολογικές ικανότητες για την επίλυση προβλημάτων .

Τα προβλήματα πρέπει να είναι τέτοια ώστε να δίνονται ευκαιρίες στους μαθητές να εξερευνούν μία κατάσταση, να κατασκευάζουν ερωτήσεις και προβλήματα με βάση συγκεκριμένα δεδομένα, να διατυπώνουν πολλαπλά το ίδιο πρόβλημα, να αναγνωρίζουν και να περιγράφουν ανάλογες καταστάσεις, να χρησιμοποιούν τους αριθμούς στην καθημερινή ζωή.

Αναγνωρίζουν, γράφουν, συγκρίνουν και διατάσσουν τους φυσικούς αριθμούς μέχρι το 1.000.000. Αναγνωρίζουν την αξία θέσης των ψηφίων (μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες, χιλιάδες). Σχηματίζουν την προσθετική και πολλαπλασιαστική σύνθεση ενός φυσικού αριθμού.

Εμπεδώνουν και επεκτείνουν το σύνολο των φυσικών μέχρι το 1.000.000 μέσα από δραστηριότητες και προβλήματα Στρογγυλοποιούν αριθμούς στην πλησιέστερη δεκάδα, εκατοντάδα και χιλιάδα. Εκτελούν τους αλγόριθμους της γραπτής πρόσθεσης, αφαίρεσης και πολλαπλασιασμού και τις διαδικασίες επαλήθευσης αυτών των πράξεων.

Πρόσθεση ,αφαίρεση και πολλαπλασιασμός

Χρησιμοποιούν νοερούς υπολογισμούς και ενθαρρύνονται να κατασκευάσουν αυτοσχέδιες υπολογιστικές τεχνικές. Σταθεροποιούν και επεκτείνουν τις συνηθισμένες τεχνικές εκτέλεσης της πρόσθεσης της αφαίρεσης και του πολ/σμού και ασκούνται σε διαδικασίες επαλήθευσης αυτών των πράξεων.

Διαίρεση

Εκτελούν Ευκλείδειες διαιρέσεις δύο ακεραίων με μονοψήφιο και διψήφιο διαιρέτη. Χρησιμοποιούν τη μέθοδο της αναγωγής στην ακέραια μονάδα. Διακρίνουν ότι οι πράξεις του πολ/σμού και της διαίρεσης είναι αντίστροφες και εξοικειώνονται με τις αντίστοιχες ιδιότητες. Λύνουν και κατασκευάζουν προβλήματα τεσσάρων πράξεων. Χρησιμοποιούν τη μέθοδο της αναγωγής στην ακέραια μονάδα (προφορικά και γραπτά).

Κλάσματα

Συγκρίνουν και διατάσσουν κλασματικές μονάδες και δεκαδικά κλάσματα. Συγκρίνουν και διατάσσουν δεκαδικούς και εκτελούν πρόσθεση και αφαίρεση δεκαδικών. Κατανοούν την έννοια της κλασματικής μονάδας και του κλασματικού αριθμού. Με τη βοήθεια κατάλληλων αναπαραστάσεων συγκρίνουν και διατάσσουν τις κλασματικές μονάδες και τα δεκαδικά κλάσματα. Από τα δεκαδικά κλάσματα περνούν στο δεκαδικό αριθμό και διακρίνουν τη σημασία καθενός από τα ψηφία του. Από ένα δεκαδικό περνούν στο αντίστοιχο δεκαδικό κλάσμα.

Χρησιμοποιούν τις μονάδες μήκους, μάζας, χρόνου στην καθημερινή ζωή Προσεγγίζουν διαισθητικά τις μονάδες επιφάνειας και χωρητικότητας .Εμπλουτίζουν τις γνώσεις τους σχετικά με τις μονάδες μήκους, μάζας χρόνου και εξοικειώνονται με τη χρήση τους στην καθημερινή ζωή.

Χαράσσουν με τη βοήθεια οργάνων γεωμετρικά σχήματα, παράλληλες και κάθετες ευθείες. Υπολογίζουν περιμέτρους απλών σχημάτων και κατανοούν την έννοια του εμβαδού .Εισάγονται διαισθητικά στην έννοια του εμβαδού (τετραγωνάκια) Χαράσσουν γεωμετρικά σχήματα με τη βοήθεια οργάνων και υπολογίζουν περιμέτρους απλών σχημάτων όπως: τετράγωνο, παραλληλόγραμμο, ρόμβο. Περιγράφουν και κατασκευάζουν συνήθη γεωμετρικά στερεά (κύβο, ορθογώνιο παρ/δο, κύλινδρο, τετραγωνική και τριγωνική πυραμίδα) .Αναγνωρίζουν σχήματα μέσα από ένα σύνθετο σχήμα. Εφαρμόζουν τις συνήθεις τεχνικές χάραξης παραλλήλων και καθέτων με κανόνα και γνώμονα . Κατανοούν τις έννοιες της απόστασης (απόσταση σημείου από ευθεία και απόσταση παραλλήλων ευθειών) .

Κατασκευάζουν το συμμετρικό ενός επιπέδου σχήματος ως προς άξονα σε τετραγωνισμένο χαρτί. Συλλέγουν, οργανώνουν, ερμηνεύουν και παρουσιάζουν ερευνητικά δεδομένα. Ερμηνεύουν γραφικές παραστάσεις. Χρησιμοποιούν ραβδογράμματα και εικονογράμματα . Μέσα από δραστηριότητες οδηγούνται σε προβλέψεις και εισάγονται σταδιακά στην έννοια της πιθανότητας.

Έ δημοτικού

Τα παιδιά στην Έ δημοτικού ανακαλύπτουν και κατασκευάζουν ατομικά ή συλλογικά νέες έννοιες, εφαρμόζουν και σταθεροποιούν τις ήδη αποκτημένες γνώσεις, ερευνούν ανοιχτές προβληματικές καταστάσεις και αναπτύσσουν μεθοδολογικές ικανότητες για την επίλυση πιο σύνθετων προβλημάτων.

Τα προβλήματα πρέπει να είναι τέτοια ώστε να δίνονται ευκαιρίες στους μαθητές να εξερευνούν μία κατάσταση, να κατασκευάζουν ερωτήσεις και προβλήματα με βάση συγκεκριμένα δεδομένα, να διατυπώνουν πολλαπλά το ίδιο πρόβλημα, να αναγνωρίζουν και να περιγράφουν ανάλογες καταστάσεις, να χρησιμοποιούν τους αριθμούς στην καθημερινή ζωή.

Αναγνωρίζουν, γράφουν, συγκρίνουν και διατάσσουν τους φυσικούς αριθμούς μέχρι το 1.000.000.000 .Κατανοούν την προσθετική και πολλαπλασιαστική σύνθεση ενός ακεραίου αριθμού.

Εμπεδώνουν και επεκτείνουν το σύνολο των φυσικών μέχρι το 1.000.000.000 μέσα από δραστηριότητες και προβλήματα Στρογγυλοποιούν αριθμούς στην πλησιέστερη δεκάδα, εκατοντάδα χιλιάδα και εκατομμύριο .

Εκτελούν τους αλγόριθμους της γραπτής πρόσθεσης, αφαίρεσης πολλαπλασιασμού και διαίρεσης και τις διαδικασίες επαλήθευσης αυτών των πράξεων.

Πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός και διαίρεση

Σταθεροποιούν τις γνώσεις τους ως προς τις συνηθισμένες τεχνικές εκτέλεσης της πρόσθεσης, της αφαίρεσης και του πολ/σμού και εκτελούν διαιρέσεις με μεγαλύτερους αριθμούς π.χ διαίρεση με τριψήφιο διαιρέτη . Χρησιμοποιούν τις ιδιότητες των πράξεων .

Ονομάζουν και γράφουν δεκαδικούς. Εφαρμόζουν τους αλγόριθμους των πράξεων στους δεκαδικούς αριθμούς. Διακρίνουν τη σημασία καθενός από τα ψηφία ενός δεκαδικού, περνούν από ένα δεκαδικό αριθμό σε κλασματική γραφή και αντιστρόφως. Συγκρίνουν και διατάσσουν και στρογγυλοποιούν δεκαδικούς. Παρεμβάλλουν δεκαδικούς ανάμεσα σε δεκαδικούς ή φυσικούς αριθμούς. Σταθεροποιούν τις συνηθισμένες τεχνικές εκτέλεσης πρόσθεσης και αφαίρεσης δεκαδικών αριθμών, μαθαίνουν τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση δεκαδικού με ακέραιο. Πολλαπλασιάζουν ένα ακέραιο ή δεκαδικό με 10 (δέκα) 100 (εκατό), 1000 (χίλια) και 0,1 , 0,01, 0,001.

Χρησιμοποιούν τα πολλαπλάσια του 2 και του 5. Μπορούν να βρίσκουν το ΕΚΠ (ελάχιστο κοινό πολλάπλάσιο) με απλές μεθόδους .Εκτελούν τις πράξεις πρόσθεσης, αφαίρεσης κλασμάτων και πολλαπλασιασμού κλάσματος με ακέραιο Κλάσματα και πράξεις κλασμάτων. Κατανοούν την έννοια της κλασματικής μονάδας και του κλασματικού αριθμού. Τρέπουν ετερώνυμα κλάσματα σε ομώνυμα. Μετατρέπουν κλάσματα σε μεικτούς και αντιστρόφως Χρησιμοποιούν τη μέθοδο της αναγωγής στην κλασματική μονάδα.

Χρησιμοποιούν συμβατικές μονάδες για να κάνουν μετρήσεις και να υπολογίζουν την περίμετρο και το εμβαδόν ευθυγράμμων σχημάτων. Βρίσκουν τον όγκο απλών στερεών.

Σταθεροποιούν τις γνώσεις τους σχετικά με τις συμβατικές μονάδες μήκους, μάζας, χρόνου ,επιφάνειας και χωρητικότητας Υπολογίζουν περιμέτρους και εμβαδά τετραγώνου , ορθογωνίου παραλληλογράμμου και τριγώνου. Υπολογίζουν τον όγκο ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου και κύβου. Εξοικειώνονται με τη χρήση των μετρήσεων στην καθημερινή ζωή. Ονομάζουν, ταξινομούν και κατασκευάζουν γωνίες και τρίγωνα. Κατασκευάζουν αναπτύγματα απλών στερεών.

Εισάγονται στην η έννοια της γωνίας, τα είδη γωνιών, τη μέτρηση σύγκριση και την κατασκευή γωνιών. Ονομάζουν και κατασκευάζουν τρίγωνα και μαθαίνουν τις απλές ιδιότητες τους. Χαράζουν τα ύψη ενός τριγώνου Κατασκευάζουν αναπτύγματα κύβου, ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, τριγωνικής και τετραγωνικής πυραμίδας. Ερμηνεύουν και κατασκευάζουν γραφικές παραστάσεις. Αναφέρουν την έννοια και βρίσκουν το Μέσο Όρο. Καταγράφουν τα αποτελέσματα ερευνητικών δραστηριοτήτων και κάνουν προβλέψεις.

Διαβάζουν και κατασκευάζουν ραβδογράμματα, εικονογράμματα και γραμμικές γραφικές παραστάσεις. Οργανώνουν δεδομένα σε πίνακες και εισάγονται στην έννοια του διατετεταγμένου ζεύγους. Διατυπώνουν προβλέψεις και εκτιμούν πιθανότητες .

<u>΄ΣΤ δημοτικού</u>

Τα παιδιά στην ΄ΣΤ δημοτικού ανακαλύπτουν και κατασκευάζουν ατομικά ή συλλογικά νέες έννοιες, εφαρμόζουν και σταθεροποιούν τις ήδη αποκτημένες γνώσεις, ερευνούν ανοιχτές προβληματικές καταστάσεις και αναπτύσσουν μεθοδολογικές ικανότητες για την επίλυση πιο σύνθετων προβλημάτων.

Τα προβλήματα πρέπει να είναι τέτοια ώστε να δίνονται ευκαιρίες στους μαθητές να εξερευνούν μία κατάσταση, να κατασκευάζουν ερωτήσεις και προβλήματα με βάση συγκεκριμένα δεδομένα, να διατυπώνουν πολλαπλά το ίδιο πρόβλημα, να αναγνωρίζουν και να περιγράφουν ανάλογες καταστάσεις, να χρησιμοποιούν τους αριθμούς στην καθημερινή ζωή.

Ονομάζουν, γράφουν και συγκρίνουν φυσικούς κλάσματα και δεκαδικούς αριθμούς. Εκτελούν πράξεις σε αριθμητικές παραστάσεις φυσικών κλασμάτων και δεκαδικών αριθμών .

Χρησιμοποιούν τα σύμβολα σύγκρισης. Στρογγυλοποιούν φυσικούς και δεκαδικούς. Συμμετέχουν σε δραστηριότητες εκτίμησης του αποτελέσματος μιας πράξης. Σταθεροποιούν τις υπάρχουσες γνώσεις στα κλάσματα και στις πράξεις τους και τρέπουν σύνθετα κλάσματα σε απλά. Συμπληρώνουν ισότητες της μορφής α+ --- =β --- +α = β. Παραγοντοποιούν φυσικούς. Βρίσκουν το Μ.ΚΔ.(μέγιστο κοινό πολλαπλάσιο)και ΕΚΠ..

Γνωρίζουν τους πρώτους και σύνθετους αριθμούς. και την παραγοντοποίηση φυσικών. Γνωρίζουν τα κριτήρια διαιρετότητας του 2, 3, 4, 5, 9, 25. Βρίσκουν το ΜΚΔ, ΕΚΠ. Γράφουν τους αριθμούς 10, 100, 1000, ως δύναμη του 10. Γράφουν έναν τετραψήφιο αριθμό σε προσθετική και πολλαπλασιαστική μορφή χρησιμοποιώντας τις δυνάμεις του 10.

Διατυπώνουν και εφαρμόζουν τις έννοιες του λόγου ,της αναλογίας και του ποσοστού. Απλοποιούν με βάση τα ισοδύναμα κλάσματα, διακρίνουν αν δύο κλάσματα είναι ισοδύναμα. Γνωρίζουν την έννοια του λόγου και της αναλογίας και τις ιδιότητες των αναλογιών Βρίσκουν τον άγνωστο όρο μιας αναλογίας. Λύνουν απλά προβλήματα ανάλογων ποσών με τη σχέση αναλογίας και αντιστρόφως ανάλογων ποσών με αναγωγή στη μονάδα . Τα προβλήματα να παραπέμπουν στις εμπειρίες τους ή στον κοινωνικό τους περίγυρο (κλίμακες, τόκοι κτλ) Γνωρίζουν την έννοια του ποσοστού ως λόγου, πηλίκου και δεκαδικού .

Κατασκευάζουν ευθύγραμμα σχήματα και κύκλους με χάρακα και διαβήτη. Υπολογίζουν μήκος κύκλου και εμβαδόν κυκλικού δίσκου. Συμπληρώνουν τις γνώσεις τους για την περίμετρο και το εμβαδόν ευθυγράμμων σχημάτων. Όπως επίσης για τον όγκο και την επιφάνεια γνωστών στερεών (κύβο, ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, πυραμίδα, ορθό πρίσμα και κύλινδρο) Μετρούν, συγκρίνουν και κατασκευάζουν γωνίες. Χρησιμοποιούν κανόνα και διαβήτη για την κατασκευή ευθυγράμμων σχημάτων και κύκλου. Υπολογίζουν μήκος κύκλου και εμβαδόν κυκλικού δίσκου (κατά προσέγγιση). Μέσα από δραστηριότητες επεκτείνουν τις γνώσεις τους σχετικά με τη συμμετρία ως προς άξονα. Ερμηνεύουν και κατασκευάζουν γραφικές παραστάσεις. Αναφέρουν την έννοια και βρίσκουν το Μέσο Όρο. Καταγράφουν τα αποτελέσματα ερευνητικών δραστηριοτήτων και κάνουν προβλέψεις. Συλλογή δεδομένων.

Ασκούνται στη συλλογή και καταγραφή των δεδομένων ενός προβλήματος Εισάγονται στην έννοια του διατετεταγμένου ζεύγους Κατασκευάζουν πίνακες δεδομένων και γραφικές παραστάσεις(ραβδογράμματα, ιστογράμματα,) Μετατρέπουν προφορικές ή γραπτές περιγραφές δεδομένων σε γραφικές παραστάσεις και αντίστροφα. Κάνουν προβλέψεις για την εξέλιξη ενός φαινομένου.

«Κανένα μάθημα δεν έχει τόσο μεγάλη παιδευτική δύναμη όσο η ενασχόληση με τους αριθμούς. Το κυριότερο που κάνει είναι ότι αυτόν που από τη φύση του τον νυστάζει, τον ξυπνάει και τον κάνει να έχει δεκτικότητα στη μάθηση, μνήμη και οξύτητα πνεύματος»

Πλάτων (Νόμοι 747b)

«Ο άνθρωπος χρησιμοποίησε μέσα στους αιώνες ποικίλα σύμβολα για να παραστήσει τους αριθμούς, που ήταν κυρίως αποτέλεσμα της ανάγκης για επίλυση προβλημάτων της καθημερινής ζωής, αρχικά ήταν συγκεκριμένες και οι αριθμοί παρίσταναν συγκεκριμένα αντικείμενα. Ως ο αρχαιότερος συμβολισμός μπορεί να θεωρηθεί η αντιστοίχιση των αριθμών με λέξεις. Σε διάφορες αρχαίες γλώσσες, κάποιοι αριθμοί αντιστοιχίζονταν με λέξεις των οποίων οι έννοιες παρέπεμπαν συνειρμικά στις συμβολιζόμενες ποσότητες, για παράδειγμα η λέξη που απέδιδε την έννοια «σώμα» χρησιμοποιήθηκε για το συμβολισμό του αριθμού 1, οι λέξεις που αντιστοιχούσαν στις έννοιες «οφθαλμοί», «πτέρυγες» , για τον αριθμό 2, «τριφύλλι» για το 3, «χέρι» για το 5. Άλλες γλώσσες, ανάμεσα στις οποίες και η αρχαία ελληνική, ανέπτυξαν ξεχωριστούς γραμματικούς τύπους ονομάτων και ρημάτων για να δηλώσουν ένα όν ή ενέργειες ενός όντος (ενικός αριθμός), χωριστούς τύπους για να δηλώσουν ζεύγη που υπάρχουν εκ φύσεως (π.χ. μάτια, χέρια, αυτιά) ή άλλα που συνδέθηκαν με την εξέλιξη του πολιτισμού — όπως τα βόδια στο ζυγό — (Δυϊκός αριθμός) και χωριστούς τύπους για να δηλώσουν πλήθος όντων ή ενέργειες πλήθους όντων (Πληθυντικός αριθμός).

Κατά την εξέλιξη των χρόνων, η ανάγκη επινόησης συμβόλων για διαρκώς περισσότερους αριθμούς γινόταν όλο και πιο έντονη. Τα σύμβολα έπρεπε να είναι εύκολα στη χρήση και στη γραπτή τους απόδοση και να είναι κατάλληλά , ώστε, συνδυαζόμενα κατάλληλα, να αποδίδουν με τρόπο απλό, ακριβή και σαφή άλλους αριθμούς, ακόμη και τους μεγαλύτερους.

Από τα ιστορικά στοιχεία που έχουμε προκύπτει ότι οι πρώτοι λαοί που χρησιμοποίησαν απλούς και εύχρηστους συμβολισμούς για να παραστήσουν αριθμούς ήταν οι αρχαίοι Αιγύπτιοι, οι Σουμέριοι, οι Ασσύριοι, οι Βαβυλώνιοι, οι Ινδοί, οι Κινέζοι, οι Κρήτες της Μινωικής περιόδου, οι αρχαίοι Έλληνες και οι Ρωμαίοι.

Οι λαοί αυτοί επινόησαν κάποια σύμβολα για να παραστήσουν συγκεκριμένους αριθμούς (όπως π.χ. τους αριθμούς 1, 10, 100 κ.λ.π.) και στη συνέχεια επινόησαν ή νέα σύμβολα ή συνδυασμούς των αρχικών για να παραστήσουν νέους αριθμούς. Για να διευκολύνονται, χώριζαν το σύνολο των αριθμών που χρησιμοποιούσαν σε κατηγορίες, οι οποίες σήμερα είναι γνωστές ως τάξεις. Ένα ειδικό σύμβολο παρίστανε τη μονάδα της τάξης κι έπαιζε βασικό ρόλο στην τάξη στην οποία ανήκε.

Ο μηχανισμός χωρισμού των αριθμών σε τάξεις δε διέφερε σημαντικά από λαό σε λαό. Συνήθως, ένας αριθμός, έστω α μονάδων, οι οποίες ονομάζονται απλές μονάδες ή μονάδες πρώτης τάξης, έδιναν μια μονάδα της δεύτερης τάξης. Στη συνέχεια α μονάδες της δεύτερης τάξης έδιναν μια μονάδα της τρίτης τάξης. Γενικά, α μονάδες κάποιας τάξης έδιναν μια μονάδα της αμέσως ανώτερης της τάξης.

Μερικοί λαοί χρησιμοποιούσαν ειδικό σύμβολο για κάθε αριθμό της πρώτης τάξης και όχι μόνο για τη μονάδα. Άλλοι πάλι λαοί χρησιμοποιούσαν μικρό αριθμό συμβόλων, κυρίως για να παραστήσουν τις μονάδες των τάξεων, ενώ για το συμβολισμό των υπόλοιπων αριθμών επαναλάμβαναν τα σύμβολα των μονάδων κάνοντας κατάλληλους συνδυασμούς. Σε μερικές μορφές αρίθμησης η αξία κάθε συμβόλου καθοριζόταν από τη θέση που είχε το σύμβολο αυτό στον αριθμό, ενώ σε άλλες το σύμβολο είχε πάντοτε την ίδια αξία, ανεξάρτητα από τη θέση που κατείχε στον αριθμό.

Υπήρχαν λοιπόν *διάφορες μορφές αρίθμησης, που διακρίνονταν από το συμβολισμό που χρησιμοποιούσαν, το χωρισμό των αριθμών σε τάξεις, τον τρόπο γραφής των υπόλοιπων αριθμών, την αξία που είχε κάθε σύμβολο σε σχέση με τη θέση του στον αριθμό* κ.τ.λ. Οι μορφές αυτές αρίθμησης είναι σήμερα γνωστές ως *Συστήματα Αρίθμησης.*

Σε κάθε σύστημα αρίθμησης ο αριθμός των μονάδων μιας τάξης που δίνει μια μονάδα της αμέσως ανώτερης τάξης λέγεται βάση του συστήματος.

Από τα γνωστά συστήματα αρίθμησης τελειότερα θεωρούνται εκείνα τα οποία έχουν:

- Ειδικό σύμβολο για κάθε αριθμό μικρότερο από τη βάση του συστήματος
- Με συνδυασμό των ειδικών αυτών συμβόλων παριστάνουν οποιονδήποτε άλλο αριθμό του συστήματος, οσοδήποτε μεγάλο.
- Η αξία του κάθε συμβόλου δεν είναι πάντοτε η ίδια αλλά εξαρτάται από τη θέση που έχει το σύμβολο αυτό μέσα στον αριθμό.

Τα συστήματα αρίθμησης αυτής της κατηγορίας ονομάζονται *Συστήματα Αρίθμησης θέσης*. Ένα *τέτοιο σύστημα θέσης* είναι και εκείνο που *χρησιμοποιούμε σήμερα,* καθώς διαφοροποιήθηκε με τον καιρό και έγινε αντιληπτός και κατανοητός και ο αφηρημένος χαρακτήρας των πράξεων, ότι δηλαδή το αποτέλεσμα μιας πράξης είναι ανεξάρτητο από τα αντικείμενα στα οποία αναφέρονται οι αριθμοί.

Το σύστημα αυτό έχει ως βάση τον αριθμό 10 και γι αυτό ονομάζεται δεκαδικό. Έχει ειδικό σύμβολο για κάθε αριθμό μικρότερο της βάσης. Τα σύμβολα αυτά, είναι τα 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 *και* παριστάνουν τις απλές μονάδες ή τις μονάδες πρώτης τάξης. Τα σύμβολα 1,10,100,... παριστάνουν τις μονάδες της πρώτης, δεύτερης, τρίτης,... τάξης αντίστοιχα. Δέκα μονάδες της πρώτης τάξης δίνουν μια μονάδα της δεύτερης τάξης, η οποία ονομάζεται δεκάδα και συμβολίζεται με το 10. Δέκα μονάδες της δεύτερης τάξης, δηλαδή δέκα δεκάδες, δίνουν μια μονάδα της τρίτης τάξης, η οποία ονομάζεται εκατοντάδα και συμβολίζεται με το 100. Δέκα εκατοντάδες δίνουν μια μονάδα της τέταρτης τάξης, η οποία ονομάζεται χιλιάδα και συμβολίζεται με το 1000 κ.ο.κ.

Η αξία κάθε συμβόλου εξαρτάται από τη θέση που έχει το σύμβολο αυτό μέσα στον αριθμό. Π.χ. στον 52572, το σύμβολο 2 που βρίσκεται στην πρώτη από δεξιά θέση του αριθμού παριστάνει δύο απλές μονάδες, ενώ το ίδιο σύμβολο 2 που βρίσκεται στη δεύτερη από αριστερά θέση του αριθμού αυτού, παριστάνει 2 χιλιάδες ή 2 *1000 = 2.000 μονάδες» (Εξαρχάκος, 1991).

«Καθώς λοιπόν γεννήθηκε από την ανάγκη του πρωτόγονου ακόμη ανθρώπου για απαρίθμηση και μέτρηση, η έννοια του αριθμού, ακολούθησε μια καταπληκτική πορεία ανάπτυξης κι εξέλιξης μέσα στους αιώνες της ανθρώπινης ιστορίας.

Με την εισαγωγή των αφηρημένων πράξεων γεννιέται η ανάγκη να μελετηθούν οι ιδιότητες τους, να διατυπωθούν κανόνες που θα καθορίζουν τη διαδικασία εκτέλεσης πράξεων και να καθοριστούν οι απαραίτητες προϋποθέσεις για τη λύση προβλημάτων.

Μέσα από αυτή τη διαδικασία της μελέτης των πράξεων και των ιδιοτήτων τους, εμφανίζεται η ανάγκη να μελετηθούν οι ίδιοι οι αριθμοί, να διατυπωθούν κανόνες για τις σχέσεις που έχουν μεταξύ τους, να καθοριστούν οι ιδιότητες τους και να ταξινομηθούν σε κατηγορίες σύμφωνα με τις ιδιότητες που έχουν, ώστε να είναι δυνατή η μελέτη κάθε κατηγορίας χωριστά.

Η δημιουργία και ανάπτυξη της θεωρίας αριθμών ως ιδιαίτερης μαθηματικής επιστήμης είναι έργο των αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών. Οι Πυθαγόρειοι, οι πρώτοι που ασχολήθηκαν σοβαρά και συστηματικά με τους αριθμούς, ονόμασαν «Λογιστική» *την επιστήμη που ασχολείται με τη μελέτη των πράξεων και τους υπολογισμούς με αριθμούς*. Ενώ *την επιστήμη που ασχολείται με τη μελέτη των ιδιοτήτων των αριθμών και των σχέσεων που τους διέπουν*, την είχαν ονομάσει «Αριθμητική». Οι ονομασίες αυτές παρέμειναν και καθ' όλη τη διάρκεια του Μεσαίωνα και μόνο κατά το τέλος του 15ου αιώνα οι δυο αυτοί κλάδοι ενοποιήθηκαν με το κοινό όνομα *«Αριθμητική».*

Σήμερα, ιδιαίτερα στην Αγγλία και στις Η.Π.Α.., ο όρος «Αριθμητική» χρησιμοποιείται με την έννοια της ικανότητας και της τέχνης εκτέλεσης πράξεων με αριθμούς και λύσης προβλημάτων, ενώ το θεωρητικό μέρος της μελέτης των αριθμών και των ιδιοτήτων τους αποδίδεται με τον όρο «Θεωρία Αριθμών».

Η Θεωρία Αριθμών μελετά τους φυσικούς αριθμούς και τις ιδιότητες τους, καθώς και τις σχέσεις που τους διέπουν. Πρόκειται για μια περιοχή των Μαθηματικών σημαντικότατη κι ενδιαφέρουσα, για «τη βασίλισσα των Μαθηματικών» κατά την άποψη του Gauss» (Εξαρχάκος, 1991).

7.1. Η εκμάθηση της προφορικής αρίθμησης

7.1.1. Οι λέξεις αριθμοί

Προφορική αρίθμηση εννοούμε τον τρόπο με τον οποίον οι φυσικοί αριθμοί αντιστοιχίζονται σε συγκεκριμένες λέξεις. Οι λέξεις αυτές ονομάζονται λέξεις- αριθμοί και χρησιμοποιούνται σε πολλές καταστάσεις με διαφορετικές μαθηματικές έννοιες. Παράλληλα με την εκμάθηση της λέξεις- κλειδί ο μαθητής μαθαίνει και τις διαφορετικές καταστάσεις που μπορεί να χρησιμοποιηθεί αυτή. Οι πολλές διαφορετικές σημασίες που μπορεί να δώσει σε μια λέξη- κλειδί το παιδί κάνουν την κατανόηση αυτών αρκετά δύσκολη και πολύπλοκη. Συνηθισμένο φαινόμενο είναι το παιδί να γνωρίζει μία από τις έννοιες της λέξης και να αγνοεί εντελώς τις άλλες ή να δυσκολεύεται να ερμηνεύσει την διαφορετικότητα ανάλογα με την σημασία. Αρκεί να υπογραμμιστεί ότι η μάθηση των λέξεων –κλειδί και ο διαχωρισμός τους ανάλογα με τη χρήση τους διαρκεί από τα 2 έως τα 8 χρόνια στα περισσότερα παιδιά.

Η διαδικασία είναι πολύπλοκη και αυτό γίνεται κατανοητό αν προσέξουμε τις έννοιες των λέξεων –αριθμών μέσα από τις επτά χρήσεις τους :

- **η πληθική χρήση,** όπου η λέξη-αριθμός αναφέρεται στην ολότητα ενός συνόλου με διακριτά στοιχεία . και δείχνει από πόσα στοιχεία αποτελείται (θέλω δύο μπισκότα)
- **η διατακτική χρήση,** όπου η λέξη-αριθμός αναφέρεται σ' ένα στοιχείο στα πλαίσια μιας συλλογής διατεταγμένων στοιχείων και περιγράφει τη σχετική θέση αυτού του στοιχείου (θέλω να είμαι πρώτος)
- **η μετρική χρήση,** όπου η λέξη-αριθμός αναφέρεται σε μια συνεχή ποσότητα και δείχνει πόσες μονάδες αντιστοιχούν σ' αυτήν (είμαι δύο χρονών) (Λεμονίδης, 1999)

Δυο άλλες χρήσεις, αυτές της ακολουθίας και της αρίθμησης δίνουν τα πολιτιστικά εργαλεία που εγγυώνται την ακρίβεια της λέξης-αριθμού που χρησιμοποιείται μέσα σε πληθικά, διατακτικά και μετρικά πλαίσια.

Η ακολουθιακή και αριθμητική χρήση των λέξεων-αριθμών διαχωρίζεται από το εάν οι λέξεις-αριθμοί αναφέρονται σε αντικείμενα ή όχι.

- Εάν οι λέξεις-αριθμοί λέγονται μόνο χωρίς καμία αναφορά σε αντικείμενα, τότε χρησιμοποιούνται σε μια κατάσταση **ακολουθίας**. Σ' αυτήν την *περίπτωση* υπάρχει μια σειρά στις λέξεις-αριθμούς που είναι η σταθερή σειρά τους και οι λέξεις δεν έχουν καμία αναφορά και δεν περιγράφουν τίποτα.
- Εάν οι λέξεις-αριθμοί λέγονται σε μια κατάσταση οντοτήτων και κάθε λέξη-αριθμός αναφέρεται σε μια οντότητα, τότε η κατάσταση είναι μια κατάσταση **αρίθμησης.** Οι λέξεις της αρίθμησης αναφέρονται σε αντικείμενα στα οποία αντιστοιχούν από τη δραστηριότητα της απαρίθμησης, αλλά αυτές οι λέξεις δεν περιγράφουν τα αντικείμενα και δε δίνουν καμία πληροφορία γι' αυτά.
- Μια έκτη χρήση των λέξεων-αριθμών αφορά την ανάγνωση τους. Η **συμβολική χρήση** ανακαλεί την έκφραση μιας λέξης -αριθμού απομονωμένης χωρίς καμιά άλλη πληροφορία. *"Αυτό είναι ένα οκτώ" ανακοι*νώνουμε διαβάζοντας ένα οκτώ. Αργότερα, οι αριθμοί παίρνουν μια σημασία πληθική, διατακτική, μετρική, μια σημασία αρίθμησης και μια σημασία ακολουθίας.
- Τέλος, οι λέξεις-αριθμοί χρησιμοποιούνται επίσης μέσα σε πλαίσια μη **αριθμητικά** ή το πολύ σε **ημιαρίθμητικά**, όπως όταν σχηματίζουμε τους αριθμούς των τηλεφώνων, τις γραμμές των λεωφορείων, τα κανάλια της τηλεόρασης, σε ένα δρόμο τα νούμερα των σπιτιών και τους ταχυδρομικούς κώδικες.

Οι διαφορετικές σημασίες είναι ανεξάρτητες η μία από την άλλη και τα μικρά παιδιά ακούνε τις λέξεις –αριθμούς μέσα σε αυτά τα στάδια και σιγά σιγά αρχίζουν να δημιουργούν ανάμεσα σε αυτές σχέσεις έτσι ώστε η ανακοίνωση μιας λέξης- αριθμού να καλύπτει περισσότερες από μια σημασίες.

7.1.2. Τα στάδια εξέλιξης της μάθησης της προφορικής ακολουθίας

Το παιδί μαθαίνει να κατανοεί και να χρησιμοποιεί την προφορική ακολουθία με δύο μηχανισμούς, την αποστήθιση και την οργάνωση της προφορικής αριθμητικής ακολουθίας.

✓ **<u>αποστήθιση</u>**

Η μάθηση της προφορικής αριθμητικής ακολουθίας από το 1 μέχρι το 100 αρχίζει πολύ νωρίς, περίπου σε ηλικία δύο ετών και ολοκληρώνεται στις περισσότερες περιπτώσεις στο τέλος της πρώτης ή της δεύτερης χρονιάς της δημοτικής εκπαίδευσης. Η ηλικία της μάθησης είναι πολύ διαφορετική από το ένα παιδί στο άλλο καθώς επίσης και οι περίοδοι ανάπτυξης σ' ένα μόνο παιδί έχουν πολύ μεταβλητή διάρκεια. Οι διαφορές αυτές σε μεγάλο βαθμό έχουν να κάνουν με τα διαφορετικά ερεθίσματα που δέχεται κάθε παιδί από το εξωτερικό του περιβάλλον,

Στην ερώτηση *"δείξε μου μέχρι πόσο ξέρεις να μετράς"* παρατηρούμε ότι οι προφορικές αριθμητικές ακολουθίες που δίνουν τα παιδιά για απάντηση αποτελούνται από τρία μέρη. Σ' ένα παιδί που απαντά διαδοχικά στην παραπάνω ερώτηση παρατηρούμε ότι στις απαντήσεις συνυπάρχουν:

α) ένα πρώτο μέρος που είναι **σταθερό και σωστό,** το μέγεθος του οποίου αυξάνεται καθώς αυξάνεται και η ηλικία των παιδιών

β) ένα δεύτερο μέρος που είναι **σταθερό αλλά λανθασμένο,** διότι είτε είναι λάθος η σειρά των αριθμών είτε λείπουν στοιχεία και δίνεται από παιδιά από 3 ½ μέχρι 6 χρόνων και το 88% περιέχουν περιλαμβάνουν παραλείψεις. Το 3% επαναλήψεις και το 9% αντιστροφές.

γ) ένα τρίτο μέρος που δεν είναι ούτε **σταθερό ούτε σωστό,** διότι μεταβάλλεται σε κάθε απάντηση που δίνει το παιδί, είναι ακανόνιστο με επαναλαμβανόμενες ακολουθίες αριθμών και προέρχεται από το γεγονός ότι τα περισσότερα παιδιά δεν σταματούν να αριθμούν αφού έχουν εξαντλήσει το σύνολο των διατεταγμένων σωστών ή μη αριθμών που γνωρίζουν. Αν και τα μέρη αυτά είναι μη σταθερά, πολλές φορές περιέχουν κάποια δομή και κάποια κανονικότητα. Συνήθως βρίσκουμε στις διάφορες επαναλαμβανόμενες αριθμήσεις του ίδιου παιδιού σύνολα αριθμών τα οποία λίγο πολύ επαναλαμβάνονται. Συνήθως τα σύνολα αυτά των αριθμών είναι διαφορετικά από το ένα παιδί στο άλλο. Σε 1 μεγάλη συχνότητα μέσα στα μη σταθερά μέρη συναντώνται οι λέξεις-αριθμοί: 13,14,16,18,19,20 και 29.

✓ **η οργάνωση της προφορικής αριθμητικής ακολουθίας**

Αναμενόμενο είναι πως η διαδικασία της απαρίθμησης από μόνης της δεν θα είναι αρκετή να επιφέρει στο μαθητή ολοκληρωμένη μάθηση της αριθμητικής ακολουθίας. Είναι απαραίτητη η γνώση και ο έλεγχος των αρχών της γλωσσικής κατασκευής αυτής της ακολουθίας, η οποία κάνει διευκολύνει την προφορική αρίθμηση και την αντιστοιχία λέξεων- αριθμών σε σύνολα οποιουδήποτε μεγέθους.

Οι Fuson, Richards *και* Briars μετά από μια σειρά πειραμάτων όρισαν πέντε διαφορετικά επίπεδα οργάνωσης της αριθμητικής ακολουθίας.

1) <u>Το επίπεδο της αλυσίδας</u>

Σε αυτό το στάδιο το παιδί είναι ικανό να κάνει απλή απαγγελία των αριθμών (για παράδειγμα : έναδύοτρίατέσσερα….). Η διαδικασία αυτή ουσιαστικά δεν έχει συγκεκριμένη αριθμητική σημασία.

2) <u>Το επίπεδο της αδιαίρετης αλυσίδας</u>

Το στάδιο αυτό παρατηρείται μετά την ηλικία των τεσσάρων χρονών στο παιδί. Σε αυτό το στάδιο οι λέξεις- αριθμοί είναι διαφοροποιημένες και διαχωρισμένες μεταξύ τους. Η καταμέτρηση μπορεί να γίνει από το παιδί μόνο αν ξεκινήσει από το ένα και είναι ποιο σύνθετο από την απλή απαγγελία της προφορικής ακολουθίας γιατί το παιδί θα πρέπει να θυμάται κατά τη διάρκεια της αρίθμησης τον όρο μέχρι τον οποίο θα πρέπει να φτάσει και κατευθύνει την συμπεριφορά του ώστε να σταματήσει την απαγγελία μόλις φτάσει στον συγκεκριμένο όρο. Επίσης το παιδί αρχίζει να έχει την δυνατότητα να βρίσκει ποιοι αριθμοί βρίσκονται πριν ή μετά από κάποιον συγκεκριμένο, βέβαια απαγγέλλει την ακολουθία ξεκινώντας από το ένα μέχρι να φτάσει στο αριθμό που θέλει.

3) <u>Το επίπεδο της διασπασμένης αλυσίδας</u>

Αυτό το στάδιο παρατηρείται στα παιδί έξι χρονών όπου είναι ικανά να αρχίσουν ακολουθία αριθμητικής ακολουθίας από οποιοδήποτε αριθμό χωρίς να είναι απαραίτητο να αρχίσει από το ένα. Ακόμη αρχίζει το παιδί να μπορεί να μετράει αντίστροφα.

4) <u>Το επίπεδο της αριθμήσιμης αλυσίδας</u>

Το στάδιο αυτό παρατηρείται στην ηλικία των επτά χρονών στο παιδί και οι λέξεις – αριθμοί γίνονται γι αυτό ποια αφηρημένες έννοιες και μπορεί να τα χρησιμοποιεί σαν διαχωρισμένες ποσότητες. Η ικανότητα της αντίστροφης μέτρησης γίνεται ακόμα ποιο δυνατή.

5) <u>Το επίπεδο της διπλής κατεύθυνσης</u>

Το οποίο εμφανίζεται στην ηλικία των οκτώ χρονών και στο οποίο η προφορική ακολουθία μπορεί να γίνεται με ευκολία και προς τις δύο κατευθύνσεις.

7.2. Η διάταξη συνόλων

Το παιδί σιγά –σιγά εκτός από την ικανότητα να απαγγέλλει λέξεις αριθμούς αρχίζει και αναπτύσσει την ικανότητα να ποσοτικοποιεί δεδομένα και να βρίσκει από πόσα στοιχεί αποτελείται ένα σύνολο.

Οι διαδικασίες μέσα από τις οποίες το καταφέρνει αυτό είναι η δύο.

- ***Η άμεση εκτίμηση***

«Άμεση εκτίμηση» ονομάζουμε τη γρήγορη, ακριβή και σίγουρη εκτίμηση του πλήθους μιας συλλογής, που παρουσιάζεται κατά μια πολύ σύντομη χρονική διάρκεια» (Λεμονίδης, 1999).

Η μέθοδος αυτή μπορεί να γίνει μόνο σε σύνολα περιορισμένων στοιχείων και εμφανίζεται σε μικρή ηλικία. Αυτό δεν σημαίνει βέβαια ότι είναι έμφυτη ικανότητα των παιδιών. Είναι μια ικανότητα που καλλιεργείται και αναπτύσσεται.

- ***Η απαρίθμηση***

Είναι διαδικασία που δίνει την δυνατότητα να υπολογίζεται το πλήθος των συνόλων οποιουδήποτε στοιχείου.

Συγκεκριμένα «με τον όρο απαρίθμηση ή καταμέτρηση μιας συλλογής οντοτήτων ονομάζουμε την αντιστοίχηση ένα προς ένα των λέξεων –αριθμών της προφορικής ακολουθίας των φυσικών αριθμών $N^*=N-\{0\}$ με τα στοιχεία της συλλογής. Η τελευταία λέξη- αριθμός πουν αντιστοιχεί στο τελευταίο στοιχείο της συλλογής αναπαριστά το πλήθος ή τον πληθάριθμο της συλλογής» (Λεμονίδης, 1999).

Η ικανότητα αυτή παρατηρείται στο παιδί από πολύ νωρίς . υπάρχουν όμως και κάποιοι εξωτερικοί παράγοντες που επηρεάζουν την απόδοση των παιδιών και έχει παρατηρηθεί ότι όσο ποιο πολλά στοιχεία έχει ένα σύνολο τόσο μεγαλύτερη πιθανότητα έχει να γίνει λάθος εκ μέρους των παιδιών.

Οι **Gelman** *και* **Gallister** μετά από μια σειρά πειραμάτων έθεσαν σαν αρχές της απαρίθμησης τις παρακάτω :

Η αρχή της αντιστοιχίας ένα-προς-ένα σύμφωνα με την οποία κάθε στοιχείο μιας συλλογής πρέπει να επονομάζεται από μια και μόνο λέξη-αριθμό. Σε αυτό το στάδιο τα παιδιά αγγίζουν με το δάχτυλο τους τα στοιχεία ή δείχνουν με το βλέμμα τους κάθε στοιχείο που απαριθμούν.

Η αρχή της σταθερής ακολουθίας σύμφωνα με την οποία η ακολουθία *των* λέξεων-αριθμών πρέπει να είναι σταθερή σε κάθε απαρίθμηση και τα παιδιά θα πρέπει να κάνουν διατεταγμένη αντιστοίχηση μεταξύ στοιχείων και αριθμών.

Η αρχή της πληθικότητας σύμφωνα με την οποία η λέξη-αριθμός που χρησιμοποιείται για να ονομάσει το τελευταίο στοιχείο μιας συλλογής αναπαριστά το συνολικό αριθμό των στοιχείων. Εδώ το παιδί θα πρέπει να αντιληφθεί ότι ο τελευταίος αριθμός της απαρίθμησης εκφράζει το σύνολο των στοιχείων.

Η αρχή της αφαίρεσης που επιτρέπει να ομαδοποιούμε σε μια συλλογή στοιχεία διαφορετικής φύσης με σκοπό να τα απαριθμήσουμε. Είναι σύνηθες φαινόμενο τα παιδία να μην μπορούν να απαριθμήσουν στοιχεία ετερογενή, πρέπει λοιπόν να μάθουν να κάνουν την απαρίθμηση ανεξάρτητων μεταξύ τους στοιχείων.

Η αρχή της ανεξαρτησίας της σειράς σύμφωνα με την οποία η σειρά με *την* οποία απαριθμούνται τα στοιχεία μιας συλλογής δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα της απαρίθμησης , με την προϋπόθεση ότι τηρείται η αρχή του ένα προς ένα. Τα παιδιά πρέπει να κατανοήσουν πως δεν έχει σημασία ποια λέξη αριθμός θα δοθεί σε κάθε στοιχείο αρκεί να δίνεται μία ονομασία αντίστοιχα σε κάθε στοιχείο.

7.3. Η κατανόηση της πληθικής και της διατακτικής έκφρασης του αριθμού

➢ ***<u>Η πληθική έκφραση του αριθμού</u>***

Κατανόηση της πληθικής έκφρασης του αριθμού εννοούμε αν το παιδί μπορεί να καταλάβει και να κατανοήσει τη σταθερότητα του πλήθους ενός συνόλου ακόμα και αν μεταβληθούν κάποια χαρακτηριστικά του. Ο Piaget έκανε κάποια πειράματα για *να* δει κατά πόσο μπορεί το παιδί να κατανοήσει την πληθική έννοια του αριθμού. Το πείραμα που εφάρμοσε ήταν το πείραμα της διατήρησης του αριθμού, έβαλε το παιδί μπροστά σε δύο σύνολα με χάντρες ίσες στον αριθμό, μετά αραίωσε τις χάντρες έτσι ώστε το ένα σύνολο να καλύπτει μεγαλύτερο μέρος στο χώρο και ρώτησε το παιδί αν υπάρχει ακόμα η ισοδυναμία.

αρχική τοποθέτηση

(κόκκινες χάντρες)

O O O O O O O O O

O O O O O O O O O

(μπλέ χάντρες)

επανατοποθέτηση

(κόκκινες χάντρες)

O O O O O O O O O

O O O O O O O O O

(μπλε χάντρες)

Σαν αποτέλεσμα βρήκε ότι τα παιδιά 6 με 7 χρονών αποτυχαίνουν στο πείραμα. Οι απαντήσεις των παιδιών κατατάχτηκαν σε τρία στάδια:

ΠΡΩΤΟ ΣΤΑΔΙΟ

Μη αντιστοίχηση όρο με όρο, ούτε ισοδυναμία

Αυτό το στάδιο περιλαμβάνει όλα τα παιδιά που δεν μπορούν να πραγματοποιήσουν αντιστοίχηση όρο με όρο και λειτουργούν με μια συνολική αντιστοίχηση που βασίζεται μόνο στην αντίληψη των μηκών των σειρών.

ΔΕΥΤΕΡΟ ΣΤΑΔΙΟ

Αντιστοίχηση όρο με όρο αλλά όχι διαρκής ισοδυναμία

Σε αυτό το στάδιο τα παιδιά πετυχαίνουν την αρχική αντιστοίχηση αλλά οι συμπεριφορές τους δείχνουν ότι οι ποσότητες εξαρτώνται περισσότερο από το χώρο που καταλαμβάνει μια σειρά και λιγότερο από τον αριθμό ή την αντιστοίχηση όρο με όρο. Ο αριθμός παραμένει μια λεκτική έννοια ακόμη και όταν το παιδί αριθμεί σωστά.

ΤΡΙΤΟ ΣΤΑΔΙΟ

Αντιστοίχηση και διαρκείς ισοδυναμία

Σε αυτό το στάδιο η μπορούν τα παιδιά να διατηρήσουν την ισοδυναμία οποιαδήποτε και αν είναι η διάταξή τους στο χώρο.

Το πείραμα αυτό του Piaget αμφισβητήθηκε γιατί θεωρήθηκε πως ο τρόπος διεξαγωγής του πειράματος προδιαθέτει τα παιδιά να απαντήσουν αρνητικά και ότι τα μικρά παιδιά ακόμα δεν μπορούν να κατανοήσουν γλωσσικά τι τους ζητάει αυτός που απαγγέλλει την ερώτηση.

- ***Η διατακτική έκφραση του αριθμού***

Η διατακτική έκφραση του αριθμού έχει σχέση με τον διαχωρισμό των αντικειμένων σε μεγαλύτερα ή μικρότερα. Διάταξη θεωρείται όταν το παιδί βάζει σε σειρά στο χώρο αλλά και στο μυαλό του(κατά τον Piaget) τα αντικείμενα που θέλει να μετρήσει. Όταν το παιδί αρχίζει να δημιουργεί μια σχέση διάταξης ανάμεσα στο αντικείμενα επιδιώκει να συγκρίνει με κριτήριο «ποιο μεγάλο ή ποιο μικρό».

Ο Piaget έκανε ένα πείραμα προκειμένου να εξακριβώσει κατά πόσο το παιδί διαθέτει την ικανότητα αυτή. Έδωσε στα παιδία 10 ράβδους διαφορετικού μεγέθους και του ζήτησε να τις βάλουν σε σειρά από την ποιο μικρή στην ποιο μεγάλη.
Τα αποτελέσματα από τις απαντήσει των μαθητών διακρίνουν τρία στάδια :

Το πρώτο στάδιο όπου το παιδί ακόμα δεν έχει καμία ικανότητα να σειροθετήσει πλήρως τις ράβδους.

Το δεύτερο στάδιο όπου το παιδί σιγά σιγά αρχίζει με μερικές ράβδους και τις τοποθετεί σωστά αλλά δεν μπορεί να παρεμβάλει τις άλλες μετά.

Το τρίτο στάδιο είναι αυτό που όλες οι ράβδοι τοποθετούνται σωστά και η κάθε μια είναι μεγαλύτερη από την προηγούμενη και μικρότερη από την επόμενη.

7.4. Η γραφή του αριθμού

Το μικρό παιδί αρχικά δεν μπορεί να κάνει τη διάκριση μεταξύ γραμμάτων και αριθμών. *Στην* πρώτη τάξη τα παιδιά συχνά γνωρίζουν να απαγγέλλουν τους αριθμούς αλλά δεν μπορούν να τους αναγνωρίσουν ούτε να τους γράψουν. Καθώς μεγαλώνουν αρχίζουν να βελτιώνονται καθώς προοδεύουν στην γραφή και στην απαγγελία των αριθμών.

«Σε ένα πείραμα που έγινε από τους Sastre *και* Moreno ζητήθηκα από τα παιδία να αναπαραστήσουν έναν αριθμό. Από τα αποτελέσματα που δόθηκαν, οι παραπάνω διάκριναν τρις τύπους συμπεριφοράς των παιδιών :

Ο πρώτος τύπος συμπεριφοράς συνίσταται στο ότι τα παιδιά κατασκευάζουν ένα σχήμα, το οποίο φαινομενικά δεν έχει καμία σχέση με τον αριθμό των στοιχείων που πρέπει να αναπαραστήσουν. Οι αναπαραστάσεις που δίνονται μοιάζουν μ' ένα ελεύθερο σχέδιο.

Ο δεύτερος τύπος συμπεριφοράς συνίσταται στην κατασκευή σχεδίων που είναι σχηματικά και δείχνουν μια αντιστοιχία όρο με όρο με τον αριθμό των υπό εξέταση στοιχείων. Έτσι για παράδειγμα, μια συλλογή από έξι καραμέλες αναπαριστάνεται μ ένα σχέδιο που περιέχει σχηματικά έξι καραμέλες.

Ο τρίτος τύπος συμπεριφοράς χαρακτηρίζεται από την προσφυγή στα ψηφία για να αποδοθεί η ποσότητα, αλλά εδώ το παιδί γράφει τόσα ψηφία όσα είναι τα αντικείμενα που θέλει να αναπαραστήσει. Έχουμε δηλαδή απαντήσεις όπως "1 2 3 4 5 6" για μια συλλογή των έξι στοιχείων. Το πρώτο στοιχείο παριστάνεται με το ψηφίο 1, το δεύτερο με το ψηφίο 2, κτλ. Κάθε ψηφίο αναπαριστά μόνο ένα στοιχείο.

Ο τέταρτος τύπος συμπεριφοράς συνίσταται στη συμβατική χρήση των ψηφίων, χρησιμοποιείται δηλαδή μόνο ένα ψηφίο για να περιγράψει ολόκληρη την ποσότητα.

Παρατηρείται, μια εξέλιξη της συμπεριφοράς σύμφωνη με την ηλικία των παιδιών. Έτσι από τα 6 μέχρι τα 10 χρόνια παρατηρείται καταρχήν μια εξαφάνιση σχεδόν των συμπεριφορών του πρώτου τύπου. Οι συμπεριφορές του δευτέρου τύπου ελαττώνονται λίγο προς όφελος των καθαρά-αριθμητικών απαντήσεων, οι οποίες αυξάνονται αλματωδώς σε συνάρτηση με την ηλικία των παιδιών» (Λεμονίδης, 1999).

8.1. Η ψυχολογία των μαθηματικών

«Τα προβλήματα της μάθησης είναι προβλήματα της ψυχολογίας, και Για να βελτιώσουμε τις μεθόδους διδασκαλίας των μαθηματικών πρέπει να μάθουμε πολύ περισσότερα πράγματα για το πώς μαθαίνονται τα μαθηματικά»
Richard Skemp

Η ψυχολογία των μαθηματικών δεν είναι μια καινούργια επιστήμη, ούτε συνονθύλευμα πολύπλοκων συνδυασμών με ορισμούς και έννοιες της ψυχολογίας και των μαθηματικών. Είναι η μελέτη των διαδικασιών μέσα από τις οποίες συντελείται η απόκτηση μαθηματικών γνώσεων, διερευνά θέματα όπως η ανάπτυξη της έννοιας του αριθμού, η εκμάθηση αριθμητικών πράξεων, η λύση λεκτικών προβλημάτων και η δημιουργία στάσεων και κινήτρων για τη μαθηματική επιστήμη. Οι ψυχολόγοι προσπαθούν επίσης να καταλάβουν γιατί μερικά προβλήματα είναι πιο δύσκολα για τους μαθητές να τα λύσουν απ' ό,τι άλλα, και γιατί υπάρχουν ατομικές διαφορές στην ανάπτυξη της μαθηματικής δεξιότητας.

Το ενδιαφέρον των ψυχολόγων για τα μαθηματικά άρχισε πριν από πολλά χρόνια και βασίζεται στην ιδέα ότι η μαθηματική και λογική σκέψη είναι ένα καλό μοντέλο για να περιγράψει κανείς την ανθρώπινη σκέψη γενικότερα. Αρκετοί φιλόσοφοι του 19ου αιώνα πίστευαν ότι η μελέτη της λογικής είναι ταυτόσημη με τη μελέτη της ανθρώπινης συλλογιστικής σκέψης, και θέλησαν να διαπιστώσουν σε ποιο βαθμό οι άνθρωποι ακολουθούν τους κανόνες της λογικής όταν σκέπτονται. Σήμερα οι περισσότεροι ψυχολόγοι δεν πιστεύουν ότι η μαθηματική λογική είναι ο καλύτερος τρόπος για να περιγράψει κανείς την ανθρώπινη σκέψη.

Πάντως, η μελέτη της ανάπτυξης της μαθηματικής σκέψης συνεχίζει να έχει ενδιαφέρον, γιατί αναγκάζει τους ψυχολόγους να σκεφτούν πώς θα βρουν λύσεις για πολλά από τα σύγχρονα προβλήματα της γνωστικής ψυχολογίας, όπως, για παράδειγμα, τους τρόπους με τους οποίους μαθαίνουμε να χρησιμοποιούμε συμβολικά συστήματα, το ρόλο των εσωτερικών αναπαραστάσεων, την αλληλεπίδραση ανάμεσα στην κατανόηση (μαθηματικών) εννοιών και στην εφαρμογή τους στην πράξη, και στη σχέση ανάμεσα στους γνωστικούς και τους συναισθηματικούς παράγοντες στη μάθηση.

8.2. Η θεωρία του Piaget για τα μαθηματικά

Μία τελείως διαφορετική αντιμετώπιση των μαθηματικών διαφαίνεται μέσα από την ψυχολογική θεωρία του Piaget ο οποίος επηρεάστηκε άμεσα από τα μαθηματικά και χρησιμοποίησε την έννοια του «συνόλου» για να χαρακτηρίσει τις δομές της ανθρώπινης νοημοσύνης, δίνοντας ιδιαίτερη σημασία στην ανάπτυξη μηχανισμών μάθησης όπως αυτών της αυτορρύθμισης, της εξισορρόπησης, της αφομοίωσης και της συμμόρφωσης, που επιτρέπουν στον άνθρωπο να προσαρμόζεται στο περιβάλλον του. Για τον Piaget, η κυρίαρχη μορφή της ανθρώπινης νοητικής δραστηριότητας -αυτή που βάζει τις βάσεις για την ανάπτυξη των δομών της λειτουργικής σκέψης- είναι η δραστηριότητα που βασίζεται στη λογικομαθηματική εμπειρία. Αυτό είναι το είδος της δραστηριότητας που μέσα από τον μηχανισμό της «στοχαστικής αφαίρεσης» ανακαλύπτει σχέσεις ανάμεσα στα αντικείμενα που κάνουν δυνατή, ανάμεσα σ' άλλα, τη δημιουργία ιεραρχικά δομημένων ταξινομήσεων και την ανακάλυψη γενικών αρχών.

Ο θεωρεί πως τα παιδιά έρχονται σε επαφή πολύ νωρίς με την τυπική αριθμητική, σε μια ηλικία που τους λείπει μια συνεκτική έννοια του αριθμού και πως έχοντας μια περιορισμένη γνώση για τον αριθμό, όταν αρχίζουν το σχολείο δεν καταλαβαίνουν, στο σύνολό της ,την ιδέα ότι ο αριθμός διατηρείται όταν ένα σύνολο αντικειμένων μετατοπίζεται ή επανατοποθετείται.

Σε ένα από τα σημαντικότερα άρθρα του, ο Piaget που υποστηρίζει :

<<Είναι μεγάλο λάθος να υποθέσουμε ότι ένα παιδί κατακτά την έννοια του αριθμού και άλλων μαθηματικών εννοιών μόνο από διδασκαλία. Αντίθετα, μέχρι ένα σημαντικό βαθμό τις αναπτύσσει το παιδί μόνο του, ανεξάρτητα και αυθόρμητα. Όταν οι ενήλικοι προσπαθούν να επιβάλλουν μαθηματικέ έννοιες σ' ένα παιδί πρόωρα, η μάθηση του είναι κυρίως λεκτική· η αληθινή κατανόηση τους έρχεται μόνο μαζί με τη νοητική ανάπτυξη του παιδιού.

Αυτό μπορεί να γίνει κατανοητό εύκολα μ' ένα πείραμα. Ένα παιδί 5 ή 6 χρονών μπορεί να διδάσκεται από τους γονείς του να μετράει από το ένα μέχρι το δέκα. Αν βάλουμε δέκα πέτρες σε μια σειρά, μπορεί να τις μετρήσει σωστά. Αλλά, αν οι πέτρες ξανατοποθετηθούν σ' ένα πιο πολύπλοκο σχήμα, ή συγκεντρωθούν όλες μαζί δεν μπορεί πια να τις μετρήσει με μια συνεπή ακρίβεια. Αν και το παιδί ξέρει τα ονόματα των αριθμών, δεν έχει ακόμη κατανοηθεί την ουσιαστική ιδέα του αριθμού δηλαδή, ότι ο αριθμός των αντικειμένων σε μια ομάδα παραμένει ο ίδιος, «διατηρείται», ανεξάρτητα από το πώς ανακατεύονται ή τοποθετούνται.>>

Στις έρευνες του ο Piaget βρήκε ότι τα παιδιά της προσχολικής ηλικίας που βρίσκονται στην περίοδο της προσυλλογιστικής σκέψης δεν έχουν αναπτύξει ακόμη την έννοια της διατήρησης του αριθμού. Δηλαδή, ενώ τα παιδιά συμφωνούν ότι υπάρχει ο ίδιος αριθμός αντικειμένων σε δύο σειρές -όταν τα αντικείμενα είναι τοποθετημένα σε αντιστοιχία ένα προς ένα-, όταν ο ερευνητής τα μετατοπίζει έτσι ώστε οι δύο σειρές να μην έχουν πια το ίδιο μήκος, τότε τα παιδιά νομίζουν ότι ο αριθμός των αντικειμένων στη μία σειρά έχει αλλάξει, και λένε ότι η μία σειρά έχει περισσότερα αντικείμενα.

Ο Piaget συμπεραίνει ότι, εφόσον το παιδί δεν μπορεί να διακρίνει τη διαφορά ανάμεσα στις πράξεις της μεταθετικότητας (που δεν αλλάζουν τον αριθμό) και στις πράξεις της πρόσθεσης και αφαίρεσης (που επηρεάζουν τον αριθμό), δεν έχει ακόμη αναπτύξει την έννοια του αριθμού. Η έννοια του αριθμού εμφανίζεται όταν το παιδί μεταβεί στην περίοδο των συγκεκριμένων λογικών ενεργειών, όταν δηλαδή έχει αναπτύξει τις κατάλληλες λογικομαθηματικές δομές που του επιτρέπουν να λειτουργεί και να σκέπτεται με τρόπους που κάνουν δυνατή την κατανόηση της διατήρησης της ποσότητας, της μάζας, του αριθμού, και ούτω καθεξής.

Ακόμη, θεωρεί ότι η ανάπτυξη αυτή είναι σ' ένα μεγάλο βαθμό μία «αυθόρμητη ψυχολογική ανάπτυξη», και όχι το αποτέλεσμα συγκεκριμένης διδασκαλίας και μάθησης. Επίσης είναι κατηγορηματικός στην άποψη του ότι οι προσπάθειες των ενηλίκων να επιβάλουν μαθηματικές έννοιες στα παιδιά δεν καταλήγουν παρά μόνο σε επιφανειακή λεκτική μάθηση αν τα παιδιά δεν έχουν ακόμη κατανοήσει τη βασική έννοια του αριθμού - δηλαδή ότι ο αριθμός των αντικειμένων σε μία ομάδα «διατηρείται» ανεξάρτητα από το αν τα αντικείμενα αλλάξουν θέση.

Οι απόψεις του Piaget για τη διατήρηση γενικά και για τη διατήρηση του αριθμού ειδικότερα έχουν βάλει τις βάσεις για το σχεδιασμό πλήθους άλλων ερευνών που έχουν αναλύσει εξονυχιστικά το θέμα αυτό και επιπρόσθετα είναι ένας μεγάλος ερευνητής που προκάλεσε επιστημονική επανάσταση στο χώρο της ψυχολογίας της ανάπτυξης. Η μεγαλύτερη ίσως προσφορά του είναι η άποψη ότι η μάθηση είναι το αποτέλεσμα μιας ενεργής αλληλεπίδρασης ανάμεσα στο άτομο και στο περιβάλλον του - αυτό που ονομάζουμε εποικοδομητική προσέγγιση στη μάθηση. Βάζοντας ως στόχο της ανάπτυξης την προσαρμογή του ατόμου στο περιβάλλον του, ως μια νοητικά κατευθυνόμενη δραστηριότητα, περιέγραψε σημαντικούς μηχανισμούς μάθησης που, όπως ο μηχανισμός της στοχαστικής αφαίρεσης, προσπαθούν να εξηγήσουν τους τρόπους με τους οποίους αναπτύσσεται η μαθηματική γνώση. Οι περισσότεροι, όμως ψυχολόγοι σήμερα συμφωνούν ότι ο Jean Piaget δεν έδωσε αρκετά λεπτομερείς περιγραφές των διαδικασιών επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων, ούτε προσπάθησε να καταλάβει τις επιδράσεις του κοινωνικού και πολιτισμικού περιβάλλοντος στην ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης. Με τα θέματα αυτά ασχολούνται σήμερα πολλοί ψυχολόγοι.

8.3. Η έρευνα της Gelman για τα μαθηματικά

Η Gelman υποστηρίζει ότι τα παιδιά της προσχολικής ηλικίας μπορούν να αντιμετωπίσουν τον αριθμό ως μία σταθερά, και καταλαβαίνουν ότι πράξεις σαν τη μετατόπιση και την επανατοποθέτηση των αντικειμένων σε μία σειρά δεν επηρεάζουν τον αριθμό. Η αποτυχία τους στα έργα της διατήρησης του αριθμού του Piaget οφείλεται σε δυσκολίες που είναι έξω από τη χρήση της λογικής του αριθμού, δυσκολίες που έχουν να κάνουν με τις λέξεις που χρησιμοποιούνται στις οδηγίες, ή γενικότερα με το ότι τα παιδιά παραπλανούνται από άσχετες ενδείξεις και δεν εκτιμούν σωστά τις απαιτήσεις του έργου της διατήρησης.

Με βάση το σκεπτικό αυτό, η Gelman επινόησε ένα «μαγικό» έργο στο οποίο το παιδί δημιουργεί μία προσδοκία ότι μια διάταξη θα περιέχει ένα συγκεκριμένο αριθμό αντικειμένων (π.χ. τρία). Στην ακολουθία η διάταξη αλλάξει «μαγικά», είτε με τρόπους που επηρεάζουν τον πληθικό αριθμό (πρόσθεση ή αφαίρεση αντικειμένων), είτε με μετάθεση και επανατοποθέτηση των αντικειμένων. Κάτω από τις συνθήκες αυτές, και όταν ο αριθμός είναι μικρός, τα παιδιά εκπλήσσονται περισσότερο από τις αλλαγές του πληθικού αριθμού (τις οποίες και επεξηγούν ως διαδικασίες πρόσθεσης και αφαίρεσης) απ' ό,τι από αλλαγές που δεν επηρεάζουν τον αριθμό.

Οι έρευνες της Gelman για τον αριθμό, καθώς και πλήθος άλλων ερευνών, έχουν δείξει ότι τα παιδιά της προσχολικής ηλικίας είναι πιο ικανά να σκέπτονται, λογικά απ' ό,τι είχε αρχικά υποθέσει ο Piaget. Δύο από τις έρευνες της (αφαίρεση σε αντιδιαστολή με τη μετατόπιση και πρόσθεση σε αντιδιαστολή με τη μετατόπιση) έδειξαν πώς τα παιδία μικρής ηλικία κατέχουν κανόνες σταθερότητας του αριθμού αλλά αποτυγχάνουν να «διατηρούν». Ένα μέρος του προβλήματος του παιδιού μπορεί να είναι το ότι δεν έχει καταλάβει πλήρως πως οι λέξεις «λιγότερο», «περισσότερο», και το «ίδιο», σχετίζονται με τη γνώση του για τους αριθμούς, όπως επίσης και με τη γνώση του γι' άλλες διαστάσεις ενός συνόλου και συνόλων διαφορετικού τύπου.

Φαίνεται λοιπόν ότι το έργο της διατήρησης δεν είναι μόνο μια δοκιμασία της λογικής ικανότητας, αλλά και του ελέγχου της προσοχής, της σωστής σημασιολογικής ερμηνείας, καθώς και των δεξιοτήτων για την εκτίμηση.

Πιο συγκεκριμένα, για την έννοια του αριθμού, δείχνουν ότι τα παιδιά της προσχολικής ηλικίας μπορούν να κατανοούν σε κάποιο αρχικό επίπεδο προσθετικές και αφαιρετικές διαδικασίες, άρα δεν είναι ανάγκη να περιμένουμε να φτάσουν τα 7-8 χρόνια πριν αρχίσουμε κάποια μαθηματική εκπαίδευση.

8.4. Η θεωρία των Groen & Parkman *και* Fuson για το μοντέλο μέτρησης που χρησιμοποιούν τα παιδιά στις πρώτες τάξεις του δημοτικού –διαδικασία πρόσθεσης

Οι Groen *και* Parkman έχουν διακρίνει τρία μοντέλα αρίθμησης για παιδιά. Κάθε μοντέλο δείχνει πώς ένα παιδί μπορεί να επιλύσει ένα πρόβλημα μονοψήφιας πρόσθεσης ,δηλαδή της μορφής μ+ν=…..

αυτά τα τρία μοντέλα είν*αι* :

- ✓ *Μοντέλο ολικής μέτρησης* :

Θέτουμε έναν μετρητή στο 0. Τον αυξάνουμε κατά *μ* και μετά κατά *ν. Για την* πρόσθεση 3+5, το παιδί λέει; «1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8».

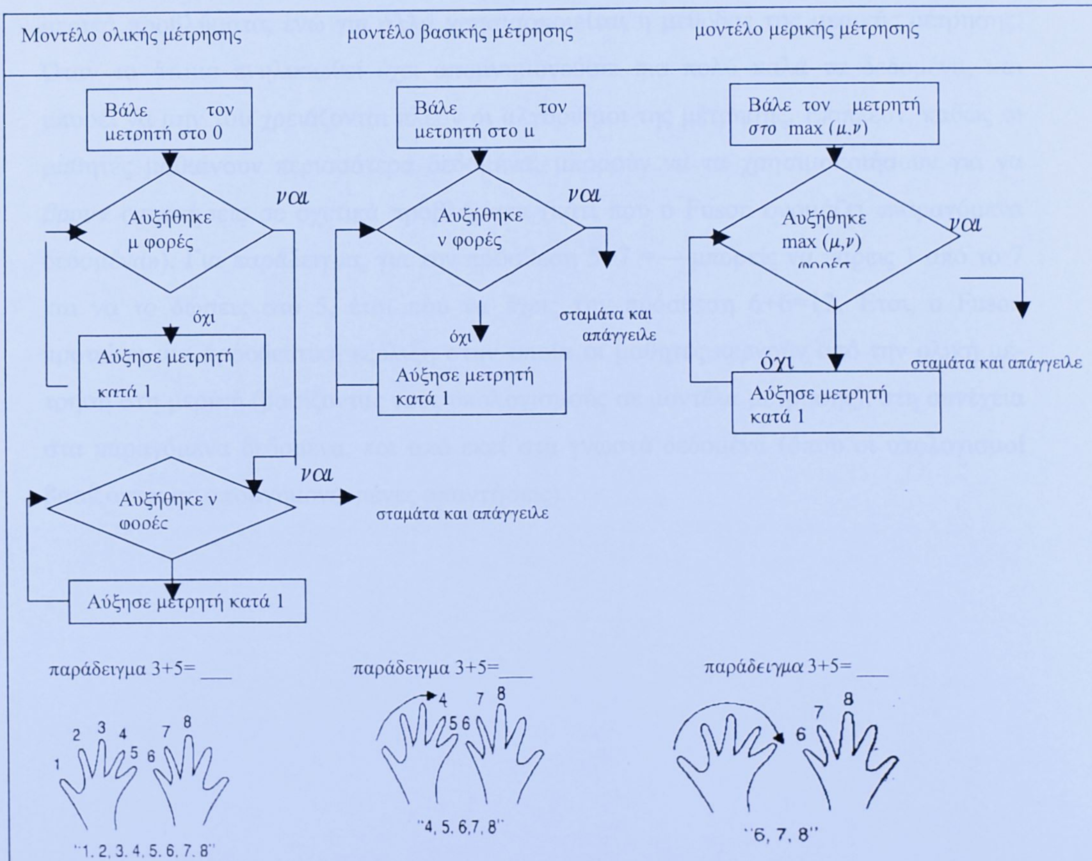
- ✓ *Μοντέλο μερικής μέτρησης* :

Θέτουμε έναν μετρητή στον πρώτο αριθμό *(μ)* και τον αυξάνουμε κατά ν. Για την πρόσθεση 3+5, το παιδί λέει: «4, 5, 6, 7, 8».

✓ <u>*Μοντέλο ελάχιστης μέτρησης*</u> :

Θέτουμε έναν μετρητή στον μεγαλύτερο από τους δύο αριθμούς *μ και ν*. Αυξάνουμε τον μετρητή κατά τον μικρότερο από τους δύο αριθμούς *μ και ν*. Για την *πρόσθεση* 3+5, το παιδί λέει: «6, 7, 8».

Πίνακας 1 : τα τρία μοντέλα μέτρησης για την απλή πρόσθεση διαμορφωμένο από Groen *και* Parkman



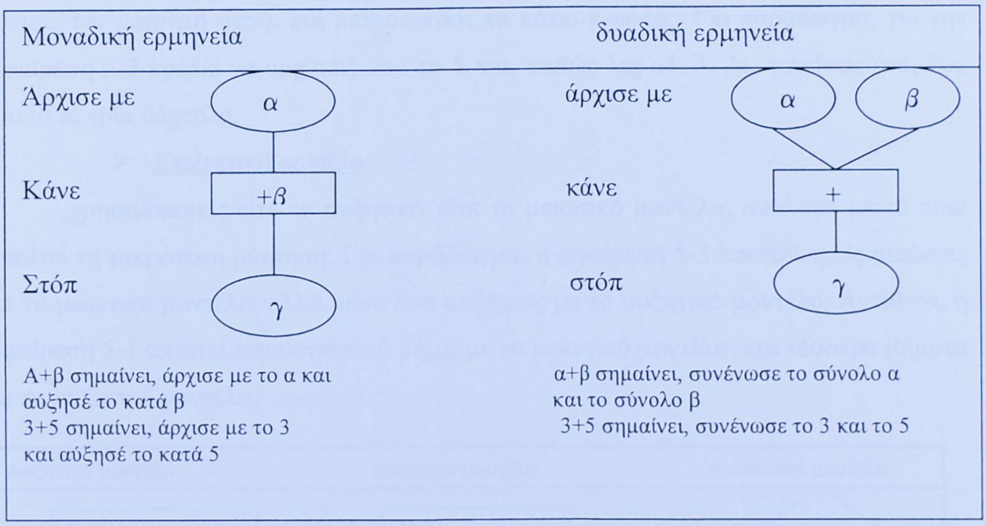
Στην προσπάθειά τους οι Groen *και* Parkman να ανακαλύψουν ποιο μοντέλο πρόσθεσης χρησιμοποιούν τα παιδία περισσότερο ζήτησαν από μαθητές της πρώτης τάξης δημοτικού σχολείου να κάνουν όλα τα προβλήματα μονοψήφιας πρόσθεσης (δηλαδή όλα τα προβλήματα που δίνουν άθροισμα μικρότερο ή ίσο του 9) *και* ανακάλυψαν πως οι μαθητές της Α' Δημοτικού συμπεριφέρονται όπως προβλέπει το *μοντέλο ελάχιστης μέτρησης*. Φαίνεται λοιπόν ότι στην Α' Δημοτικού κιόλας ο κύριος αλγόριθμος για απλή πρόσθεση είναι μια διαδικασία μερικής *μέτρηση*.

Καθώς τα παιδιά αποκτούν μεγαλύτερη πείρα με τα απλά προβλήματα πρόσθεσης, αναπτύσσεται μια νέα διαδικασία, την οποία ο Fuson ονομάζει «γνωστά δεδομένα». Η νέα διαδικασία είναι η απομνημόνευση των απαντήσεων για απλά προβλήματα πρόσθεσης. Στα πειράματα των παραπάνω ερευνητών παρατηρήθηκε ότι τα παιδιά της Α' Δημοτικού είναι πολύ γρήγορα στις «διπλές» προσθέσεις, όπως 2+2 3+3 κλπ. Προφανώς έχουν απομνημονεύσει απαντήσεις για *μερικές,* αλλά όχι για όλες τις προσθέσεις. Έτσι η διαδικασία των «γνωστών δεδομένων» χρησιμοποιείται για μερικά προβλήματα, ενώ για άλλα χρησιμοποιείται η μέθοδος της μερικής μέτρησης. Όταν το άτομο ενηλικιωθεί έχει απομνημονεύσει πια πολύ καλά τα δεδομένα, και μπορεί να μην του χρειάζονται πλέον οι αλγόριθμοι της μέτρησης. Επιπλέον, καθώς οι μαθητές μαθαίνουν περισσότερα δεδομένα, μπορούν να τα χρησιμοποιήσουν για να *βρουν απαν*τήσεις σε σχετικά προβλήματα (κάτι που ο Fuson ονομάζει «παραγόμενα δεδομένα»). Για παράδειγμα, για την πρόσθεση 5+7 = —μπορείς να πάρεις 1 από το 7 και να το δώσεις στο 5, έτσι που να έχεις την πρόσθεση 6+6=12. Έτσι, ο Fuson προτείνει μια προοδευτική εξέλιξη στην οποία οι μαθητές περνούν από την ολική μέτρηση στη μερική (βασίζοντας τους υπολογισμούς σε μοντέλα μέτρησης), στη συνέχεια στα παραγόμενα δεδομένα, *και* από εκεί στα γνωστά δεδομένα (όπου οι υπολογισμοί βασίζονται σε απομνημονευμένες απαντήσεις).

8.5. Η θεωρία της Weaver για την πρόσθεση

Η Weaver έκανε διάκριση ανάμεσα στην ερμηνεία που βλέπει την πρόσθεση ως μια «μοναδική πράξη» (π.χ., 5+3 σημαίνει ότι αρχίζεις με πέντε και η πράξη είναι «πρόσθεσε τρία»), και την ερμηνεία που τη βλέπει ως μια «δυαδική πράξη» (π.χ., 5+3 σημαίνει «συνένωσε το τρία και το πέντε»). Ο πίνακας δίνει παραδείγματα των δύο ερμηνειών της πρόσθεσης. Όπως βλέπουμε, η μοναδική ερμηνεία μοιάζει με το πρόβλημα «πρόκλησης αλλαγής» τουGreeno, ενώ η δυαδική ερμηνεία μοιάζει με τα προβλήματα «συνένωσης» του Greeno.

Πίνακας 2 : η διάκριση των μεθόδων πρόσθεσης διαμορφωμένος από την Weaver



Ο Fuson έχει υποστηρίξει ότι η μοναδική ερμηνεία τείνει να είναι η πρώτη που αναπτύσσεται στα παιδιά, πριν ακόμη και από την άτυπη διδασκαλία.

8.6. Η θεωρία των Goods για το μοντέλο μέτρησης παιδιών στις πρώτες τάξεις του δημοτικού –διαδικασία αφαίρεσης

Οι Goods έχουν διακρίνει τρία μοντέλα αφαίρεσης για παιδιά. Κάθε μοντέλο δείχνει πώς ένα παιδί μπορεί να επιλύσει ένα πρόβλημα αφαίρεσης της μορφής *μ-ν*=….. Τα τρία μοντέλα είναι τα εξής:

- <u>*Αυξητικό μοντέλο*</u>

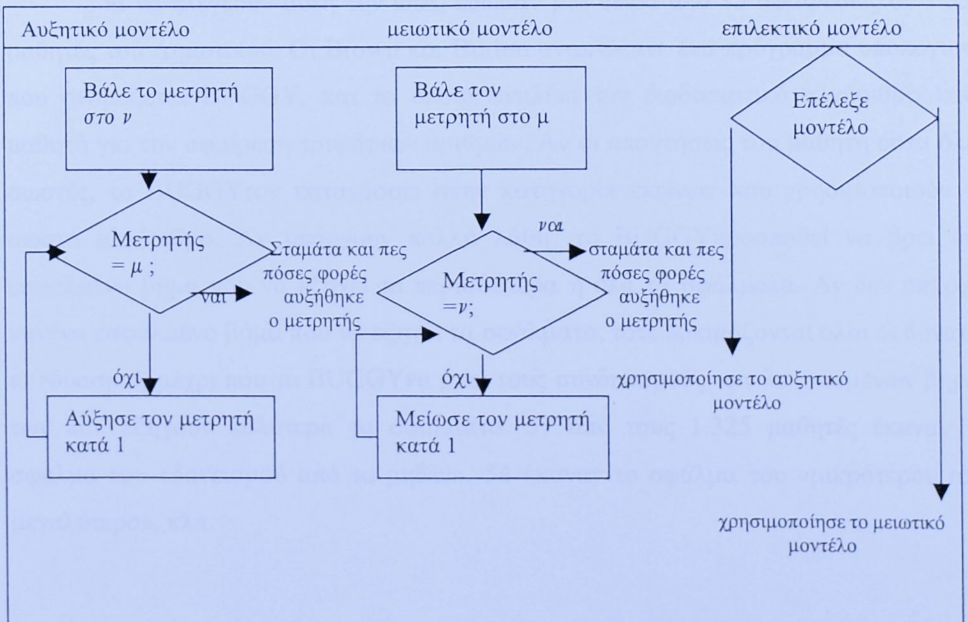
θέτεις τον μετρητή στο *ν* και μετράς προς τα πάνω μέχρι να φτάσεις στο *μ*. Για παράδειγμα, για την αφαίρε*ση* 5-3 πρέπει να αρχίσεις από το 3 και, καθώς λες «4, 5», εκτείνεις ένα και μετά δύο δάχτυλα.

- <u>*Μειωτικό μοντέλο*</u>

θέτεις τον μετρητή στο *μ και* μετράς προς τα κάτω *ν* φορές. Για παράδειγμα, για την αφαίρεση 5-3 πρέπει να αρχίσεις από το 5 και, καθώς λες «4, 3, 2», εκτείνεις ένα, δύο και μετά τρία δάχτυλα.

- <u>*Επιλεκτικό μοντέλο*</u>

χρησιμοποιείς είτε το αυξητικό είτε το μειωτικό μοντέλο, ανάλογα με το ποιο απαιτεί τη μικρότερη μέτρηση. Για παράδειγμα, η αφαίρεση 5-3 απαιτεί τρείς μειώσεις με το μειωτικό μοντέλο, αλλά μόνο δυο αυξήσεις με το αυξητικό μοντέλο. Αντίθετα, η αφαίρεση 5-1 απαιτεί ένα μετρητικό βήμα με το μειωτικό μοντέλο, και τέσσερα βήματα *με* το αυξητικό μοντέλο.



Οι Goods για να ανακαλύψουν ποιο μοντέλο περιγράφει καλύτερα την απόδοση των παιδιών, ζήτησαν από μαθητές της Β' και της Δ' τάξης να λύσουν όλα τα μονοψήφια προβλήματα αφαίρεσης και διαπίστωσαν ότι οι περισσότεροι μαθητές της Β' και όλοι οι μαθητές της Δ' φέρονται όπως προβλέπει το μοντέλο επιλογής. Τα άλλα μοντέλα δεν προσαρμόζονται τόσο καλά στην απόδοση των μαθητών της Δ'. Όμως, για το 20% περίπου από τους μαθητές της Β', η καλύτερη προσαρμογή επιτυγχάνεται από λιγότερο εξελιγμένα μοντέλα, όπως το μειωτικό. Έτσι, υπάρχουν στοιχεία που δείχνουν ότι, καθώς τα παιδιά αποκτούν μεγαλύτερη πείρα, περνούν από μια απλοϊκή σε μια πιο εξελιγμένη μέθοδο μέτρησης για την απλή αφαίρεση.

Από τη στιγμή που οι μαθητές θα αποκτήσουν κάποια ευχέρεια στην απλή αφαίρεση (δηλαδή, καθώς αυτές οι διαδικασίες γίνονται αυτόματες), ο απλός υπολογισμός μπορεί να γίνει ένα τμήμα μεγαλύτερων αλγορίθμων. Για παράδειγμα, οι αλγόριθμοι για αφαίρεση (με δανεισμό), ενσωματώνουν τους απλούς υπολογισμούς.

8.7. Η έρευνα Brown και Burton για την αφαίρεση

Οι Brown και Burton υποστήριξαν πως η απόδοση των μαθητών στους αριθμητικούς υπολογισμούς μπορεί να περιγραφεί λέγοντας ότι χρησιμοποιούν έναν διαδικαστικό αλγόριθμο -ίσως έναν αλγόριθμο με ένα ή περισσότερα σφάλματα- και τον εφαρμόζουν συστηματικά στους υπολογισμούς τους.

Για να ελέγξουν αυτή την ιδέα, έδωσαν μια σειρά από 15 αφαιρέσεις σε 1.325 μαθητές του Δημοτικού. Οι Brown και Burton αναπτύξανε ένα πρόγραμμα υπολογιστή που ονομάζεται BUGGY, και το οποίο αναλύει τον διαδικαστικό αλγόριθμο κάθε μαθητή για την αφαίρεση τριψήφιων αριθμών. Αν οι απαντήσεις του μαθητή είναι όλες σωστές, το BUGGYτον κατατάσσει στην κατηγορία εκείνων που χρησιμοποιούν το σωστό αλγόριθμο. Αν υπάρχουν πολλά λάθη, το BUGGYπροσπαθεί να βρει ένα εσφαλμένο βήμα που να εξηγεί τα περισσότερα ή όλα τα σφάλματα. Αν δεν υπάρχει κανένα εσφαλμένο βήμα που να εξηγεί τα σφάλματα, τότε δοκιμάζονται όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί, μέχρι που το BUGGYνα βρει τους συνδυασμούς των λανθασμένων βημάτων που εξηγούν καλύτερα τα σφάλματα. 57 από τους 1.325 μαθητές έκαναν το σφάλμα του «δανεισμού από το μηδέν», 54 έκαναν το σφάλμα του «μικρότερου από μεγαλύτερο», κλπ.

Αν και το *πρόγραμμα* BUGGYστηρίζεται σε εκατοντάδες λανθασμένα βήματα ή συνδυασμούς λανθασμένων βημάτων, δεν ήταν απόλυτα επιτυχές στο να διαγνώσει τους αλγόριθμους αφαίρεσης όλων των μαθητών. Το πρόγραμμα βρήκε τους αλγόριθμους συμπεριλαμβανομένων των εσφαλμένων βημάτων που παρήγαγαν ολοκληρωτικά ή εν μέρει τις απαντήσεις που δόθηκαν από το 43% των μαθητών. Οι άλλοι μαθητές φάνηκαν να κάνουν τυχαία λάθη, ή δεν χρησιμοποιούσαν συστηματικά τα ίδια εσφαλμένα βήματα. Η δουλειά των Brown *και* Burton επιτρέπει μιαν ακριβή περιγραφή των ατομικών διαφορών στη γνώση των αλγορίθμων αφαίρεσης από μερικούς μαθητές.

Πίνακας 3 : μερικά εσφαλμένα βήματα αφαίρεσης προσαρμοσμένα από τους Brown *και* Burton (1978)

Αριθμός περιπτώσεων *σε* 1325 μαθητές	όνομα	παραδείγματα	Περιγραφή
57	Δανεισμός από μηδέν	103 -45 158	Όταν δανείζεται από μια στήλη που το πάνω ψηφίο της είναι 0, ο μαθητής που γράφει 9, αλλά *δε* συνεχίζει να δανείζεται από τη στήλη στα αριστερά *του* 0.
54	Μικρότερο από μεγαλύτερο	253 -188	Ο μαθητής αφαιρεί το μικρότερο ψηφίο κάθε στήλης από το μεγαλύτερο, ανεξάρτητα από το ποιο είναι από πάνω και ποιο από κάτω.
10	Διαφ. 0-N=N	140 -21	Κάθε φορά που το πάνω ψηφίο μιας στήλης είναι 0, ο μαθητής γράφει το κάτω ψηφίο σαν απάντηση.
34	Διαφ. 0-N=N Και υπερπήδηση *του* 0	304 -75 ——	Κάθε φορά που το πάνω ψηφίο μιας στήλης είναι 0, ο μαθητής γράφει το κάτω ψηφίο σαν απάντηση. Όταν χρειάζεται να δανειστεί από μια στήλη που το πάνω ψηφίο της είναι 0, υπερπηδά αυτή τη στήλη και δανείζεται από την επόμενη.

8.8. Η θεωρία των Efraim Fischbein, Maria Deri, Maria Sainati Nello *και* Maria Sciolis Marino για τις πράξεις διαίρεσης και πολλαπλασιασμού

«Τα αρχικά διδακτικά μοντέλα φαίνονται να ριζώνουν τόσο βαθιά στο νου τον μαθητή, ώστε συνεχίζουν να ασκούν έναν ασυνείδητο έλεγχο πάνω στη νοητική του συμπεριφορά ακόμη και αφού ο μαθητής αποκτήσει τυπικές μαθηματικές έννοιες που είναι σωστές και στηρίζονται σε γερές βάσεις»

Οι ερευνητές δέχονται ότι το πρωτόγονο μοντέλο που συνδέεται με τον πολλαπλασιασμό είναι η *επαναληπτική πρόσθεση,* στην οποία συνενώνεται ένας αριθμός ομάδων ίδιου μεγέθους. αυτό είναι το μοντέλο που επηρεάζει άδηλα το .νόημα και τη χρήση του πολλαπλασιασμού, ακόμη και σε άτομα με σημαντική εκπαίδευση στα μαθηματικά.

Σύμφωνα με την ερμηνεία της επαναληπτικής πρόσθεσης, 3x5 σημαίνει 5+5+5 ή 3+3+3+3+3. Αυτή η ερμηνεία δε θεωρεί τον πολλαπλασιασμό αντιμεταθετική πράξη. Ο ένας παράγοντας (ο αριθμός των ίσων ομάδων) θεωρείται ο *τελεστής,* Ο άλλος (το μέγεθος κάθε ομάδας) θεωρείται ο *τελεστέος.* Ο τελεστέος μπορεί να είναι οποιαδήποτε θετική ποσότητα, αλλά ο τελεστής πρέπει να είναι ακέραιος αριθμός. Δεν μπορεί κανείς να συλλάβει *διαισθητικά* την επανάληψη μιας ποσότητας π 0,63 φορές ή 3/7 φορές, ενώ μπορεί εύκολα να συλλάβει την επανάληψη του 0,63 3 φορές = 0,63+0,63+0,63, ακόμη και αν δεν μπορεί να εκτελέσει την πράξη. Επειδή ο τελεστής είναι πάντα ακέραιος, ο πολλαπλασιασμός αναγκαστικά μεγαλώνει έναν αριθμό.

Όσον αναφορά τη διαίρεση από τις διάφορες ερμηνείες που μπορούν να δοθούν στη διαίρεση, υπάρχουν δύο που, από την παιδική ηλικία και μετά, επηρεάζουν την ανάκληση και χρήση της πράξης όταν ένα πρόβλημα φαίνεται να χρειάζεται διαίρεση Η δομή του προβλήματος καθορίζει ποιο μοντέλο ενεργοποιείται.
Τα μοντέλα είναι τα εξής :

- <u>*Διαίρεση μερισμού*</u>

Ένα αντικείμενο ή μια ομάδα από αντικείμενα διαιρείται σε έναν αριθμό από ίσα τμήματα ή υποομάδες. Ο διαιρετέος πρέπει να είναι μεγαλύτερος από το διαιρέτη· ο διαιρέτης (τελεστής) πρέπει να είναι ακέραιος· το πηλίκο πρέπει να είναι μικρότερο από *τον* διαιρετέο (τελεστέο).

- *Διαίρεση μετρήσεως*

Σε αυτό το μοντέλο θέλουμε να βρούμε πόσες φορές μια δοσμένη ποσότητα περιέχεται σε μια μεγαλύτερη ποσότητα. Σ' αυτή την περίπτωση, ο μοναδικός περιορισμός είναι ότι ο διαιρετέος πρέπει να είναι μεγαλύτερος από τον διαιρέτη. Αν το πηλίκο είναι ακέραιος, το μοντέλο μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελεί *επαναληπτική αφαίρεση.*

Μετά από την έρευνά τους οι ερευνητές κατάληξαν στο ότι αρχικά, υπάρχει μόνο ένα διαισθητικό πρωτόγονο μοντέλο, για τα προβλήματα διαίρεσης, *το μοντέλο της διαίρεσης μερισμού*. Με τη διδασκαλία, οι μαθητές αποκτούν ένα δεύτερο διαισθητικό μοντέλο, το μοντέλο της διαίρεσης μετρήσεως. Στην Θ' τάξη, το μετρητικό μοντέλο έχει σταθεροποιηθεί πια και επηρεάζει τη σκέψη των μαθητών, ενώ οι μαθητές της Ζ' τάξης βρίσκονται σε ένα μεταβατικό στάδιο σε σχέση με τα 2 μοντέλα.

8.9. Η έρευνα των Eric de Corte *και* Lieven Verschaffel για τις δεξιότητες των παιδιών και τις διαδικασίες που χρησιμοποιούν τα παιδιά κατά την επίλυση στοιχειωδών λεκτικών προβλημάτων

Οι ερευνητές Greeno, Heller και Riley εισήγαγαν ένα σχήμα ταξινόμησης για τα στοιχειώδη λεκτικά προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης, βασισμένο στις σημασιολογικές σχέσεις που τα διέπουν. Ειδικότερα διέκριναν τρεις κύριες κατηγορίες λεκτικών προβλημάτων: προβλήματα *μεταβολής, σύνθεσης και σύγκρισης.* Τα προβλήματα μεταβολής αναφέρονται στις δυναμικές καταστάσεις στις οποίες ένα γεγονός μεταβάλλει την αξία κάποιας ποσότητας, όπως στο ακόλουθο παράδειγμα:

Ο Γιάννης είχε 3 βόλους· ο Θωμάς του έδωσε 5 ακόμη βόλους. Πόσους έχε. ο Γιάννης τώρα;

Τα προβλήματα σύνθεσης αναφέρονται σε στατικές καταστάσεις που περιέχουν δύο ποσότητες, που είτε λαμβάνονται υπόψη είτε σε συνδυασμό, όπως στην παρακάτω περίπτωση:

Ο Γιάννης έχει 3 βόλους- ο Θωμάς έχει 5 βόλους. Πόσους βόλους έχουν και οι δύο μαζί;

Τα προβλήματα σύγκρισης περιλαμβάνουν δύο ποσότητες προς σύγκριση και τη διαφορά ανάμεσα τους. Για παράδειγμα:

Ο Γιάννης έχει 3 βόλους- ο Θωμάς έχει 5 βόλους περισσότερους από το Γιάννη. Πόσους βόλους έχει ο Θωμάς;

Κάθε μία από τις τρεις κατηγορίες υποδιαιρείται σε διαφορετικούς τύπους προβλημάτων, ανάλογα με το ποια είναι η άγνωστη ποσότητα. Στα προβλήματα μεταβολής και σύγκρισης έγιναν περαιτέρω διακρίσεις, που εξαρτώνται από την κατεύθυνση του συμβάντος (αύξηση ή ελάττωση) και από τη σχέση (περισσότερο ή λιγότερο), αντίστοιχα. Συνδυάζοντας τα τρία αυτά χαρακτηριστικά των λεκτικών προβλημάτων, ο Greeno και οι συνεργάτες του κατέληξαν σε 14 τύπους προβλημάτων.

Οι ίδιοι συγγραφείς πρότειναν επίσης ένα θεωρητικό μοντέλο επίλυσης στοιχειωδών λεκτικών αριθμητικών προβλημάτων, στο οποίο η σημασιολογική επεξεργασία του προβλήματος θεωρείται ως μια αποφασιστική συνιστώσα σε μία ικανή διαδικασία επίλυσης.

Βασισμένοι στη δουλειά τους από τη μια και στα αποτελέσματα των εμπειρικών ερευνών *τους ο* Eric de Corte *και* Lieven Verschaffel από την άλλη, έχουν αναπτύξει ένα μοντέλο επίλυσης λεκτικών προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης, που περιλαμβάνει πέντε στάδια:

(1) Γίνεται μία σύνθετη σκόπιμη δραστηριότητα επεξεργασίας μενού: αρχίζοντας από το λεκτικό κείμενο, ο μαθητής σκευάζει μια σφαιρική, αφηρημένη, εσωτερική αναπαράσταση του προβλήματος, στα πλαίσια των συνόλων και των σχέσεων των συνόλων.

(2) Με βάση αυτή την αναπαράσταση, ο λύτης του προβλήματος επιλέγει μια κατάλληλη τυπική αριθμητική πράξη ή μια άτυπη στρατηγική υπολογισμού για να βρει το άγνωστο στοιχείο αναπαράσταση του προβλήματος.

(3) Η πράξη ή το έργο που έχει επιλεγεί εκτελείται.

(4) Ο λύτης επανενεργοποιεί την αρχική αναπαράσταση του προβλήματος, αντικαθιστά το άγνωστο στοιχείο με το αποτέλεσμα της πράξης που έχει εκτελεστεί και διατυπώνει την απάντηση.

(5) Εκτελούνται πράξεις επαλήθευσης για να ελεγχθεί η ορθότητα της λύσης που βρέθηκε στο προηγούμενο στάδιο.

Όπως αναφέραμε παραπάνω, το πρώτο στάδιο της διαδικασίας επίλυσης είναι αντιληπτό ως μία σκόπιμη δραστηριότητα επεξεργασίας κειμένου. Η προκύπτουσα αναπαράσταση του προβλήματος θεωρείται το αποτέλεσμα μιας σύνθετης αλληλεπίδρασης πληροφοριών που προκύπτουν από το κείμενο με τις προϋπάρχουσες γνώσεις του μαθητή. Έτσι η επεξεργασία των λεκτικών δεδομένων, όπως επίσης η δραστηριότητα των γνωστικών σχημάτων του υποκειμένου, συντελούν στην κατασκευή της αναπαράστασης του προβλήματος. Διακρίνονται δύο κύριες κατηγορίες γνωστικών σχημάτων: (α) τα σημασιολογικά σχήματα που αναπαριστούν τη γνώση του υποκειμένου για την αύξηση και την ελάττωση, τη θέση και τη σύγκριση συνόλων αντικειμένων (το σχήμα αλλαγής σύνθεσης και τη σύγκρισης αντίστοιχα), και (β) το σχήμα των λεκτικών προβλημάτων, που περιέχει γνώση της δομής των λεκτικών προβλημάτων γενικά, το ρόλο και την πρόθεση τους στη διδασκαλία της αριθμητικής, και τους λανθάνοντες κανόνες και τις υποθέσεις που υπόκεινται σ' αυτόν ειδικά τον τύπο κειμένου.

Μια διαχρονική διερεύνηση με παιδιά της Α' τάξης συνετέλεσε ουσιαστικά *στην* ανάπτυξη του θεωρητικού τους μοντέλου.

8.9.1. Περιγραφή πειράματος και τεχνική

Τα δεδομένα των αναπαραστάσεων και των διαδικασιών επίλυσης των παιδιών σε σχέση με τα στοιχειώδη λεκτικά προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης συγκεντρώθηκαν κατά τη διάρκεια της σχολικής χρονιάς 1981-1982. Τριάντα μαθητές της Α' τάξης έδωσαν ατομικές συνεντεύξεις τρεις φορές κατά τη διάρκεια της σχολικής χρονιάς: στην αρχή, το Σεπτέμβριο, τον Ιανουάριο, και, στο τέλος, τον Ιούνιο. Κάθε φορά τους δίνονταν οκτώ λεκτικά προβλήματα (βλ. Πίνακα 1).

Ο ερευνητής διάβαζε δυνατά τα προβλήματα. Για κάθε πρόβλημα ζητούσε από τα παιδιά να εκτελέσουν τα ακόλουθα έργα: (α') να επαναλάβουν το πρόβλημα, (β') να το λύσουν, (γ') να εξηγήσουν και να αιτιολογήσουν τη μέθοδο επίλυσης του, (δ') *να κα*-τασκευάσουν μια υλική αναπαράσταση της ιστορίας με κούκλες και τουβλάκια, και (ε') να γράψουν την αντίστοιχη αριθμητική πρόταση. Όταν το παιδί αδυνατούσε να λύσει κάποιο πρόβλημα μόνο του, ο ερευνητής άρχιζε τη διαδικασία που ονομαζόταν *διαδικασία συστηματικής βοήθειας.* Αυτή συμπεριλάμβανε την *ανάγνωση του* προβλήματος πρόταση με πρόταση, όπου μετά από κάθε πρόταση ζητούσε από το παιδί να αναπαραστήσει την κατάσταση με κούκλες και τουβλάκια.

Οι ατομικές συνεντεύξεις βιντεοσκοπήθηκαν. Τα δεδομένα υποβλήθηκαν σε ποσοτική και ποιοτική ανάλυση.

Πίνακας 4 : τύποι προβλημάτων που χρησιμοποιήθηκαν στη μελέτη των Eric de Corte *και* Lieven Verschaffel

I.. :

Τύπος	*Πρόβλημα*	*Σχήμα*	*Διεύθυνση*	*Άγνωστος*
Μεταβολή 1	0 Πέτρος είχε 3 μήλα· η Άννα έδωσε στον Πέτρο 5 ακόμη μήλα. Πόσα μήλα έχει ο Πέτρος τώρα;	Μεταβολή	Αύξηση	Τελικό σύνολο
Μεταβολή 2	Ο Π. είχε 6 μήλα· έδωσε 2 μήλα στην Α. Πόσα μήλα έχει ο Π. τώρα;	Μεταβολή	Ελάττωση	Τελικό σύνολο

Μεταβολή 3	0 Π. έχει 3 μήλα· η Α. έδωσε στον Π. μερικά ακόμη μήλα. Ο Π. τώρα έχει 10 μήλα. Πόσα μήλα έδωσε στον Πέτρο η Άννα;	Μεταβολή	Αύξηση	Μεταβαλλόμ *ενο* σύνολο
Μεταβολή 6	0 Π. είχε μερικά μήλα· έδωσε 3 μήλα στην Α· τώρα ο Π. έχει 5 μήλα. Πόσα μήλα είχε ο Π. στην αρχή;	Μεταβολή	Ελάττωση	Αρχικό σύνολο
Σύνθεση 1	0 Π. έχει 3 μήλα η Α. έχει 7 μήλα. Πόσα μήλα έχουν και οι δύο μαζί;	Σύνθεση	—	Υπερ σύνολο
Σύνθεση 2	0 Π. έχει 3 μήλα η Α. έχει επίσης μερικά μήλα. ο Π. *και* η Α. έχουν 9 μήλα και οι δυο μαζί. Πόσα μήλα έχει η Άννα;	Σύνθεση	—	Υποσύνολο
Σύγκριση 1	Ο Π. έχει 3 μήλα η Α. έχει μερικά περισσότερα μήλα από τον Πέτρο. Η Άννα έχει 8 μήλα. Πόσα περισσότερα μήλα έχει η Άννα;	Σύγκριση	Περισσότερο	Σύνολο *της* διαφοράς
Σύγκριση 3	Ο Π. έχει 3 μήλα η Α. έχει 6 μήλα περισσότερα από τον Π. Πόσα μήλα έχει η Άννα;	Σύγκριση	Περισσότερο	Συγκρινόμενο σύνολο

8.9.2. Αποτελέσματα- ευρήματα της έρευνας των Eric de Corte *και* Lieven Verschaffel

Τα αποτελέσματα των ερευνών των Eric de Corte *και* Lieven Verschaffel είναι : Οι 30 μαθητές της Α' τάξης πήγαν εκπληκτικά καλά στα οκτώ λεκτικά προβλήματα που τους δόθηκαν κατά την πρώτη συνέντευξη στην αρχή της σχολικής χρονιάς: 27 μαθητές έλυσαν τουλάχιστον τρία προβλήματα σωστά, είτε μόνοι τους είτε με ελάχιστη βοήθεια από τον ερευνητή, τα μισά από τα παιδιά πήγαν καλά σε πέντε τουλάχιστον προβλήματα, και 3 από αυτά πέτυχαν να λύσουν όλα τα προβλήματα.

Ένα δεύτερο βασικό εύρημα που αφορά την επίδοση των παιδιών είναι ότι τα λεκτικά προβλήματα που επιλύονται με την ίδια αριθμητική πράξη, αλλά διαφέρουν ως προς τη σημασιολογική τους δομή, είναι δυνατό να διαφέρουν πολύ στο βαθμό δυσκολίας τους. Στην πρώτη συνέντευξη, για παράδειγμα, 26 παιδιά έλυσαν σωστά το πρόβλημα σύνθεσης 1.Στο πρόβλημα μεταβολής 6 έδωσαν δώδεκα σωστές απαντήσεις και στο πρόβλημα σύγκρισης 3 απάντησαν σωστά μόνο 5 παιδιά. Αυτά τα τρία προβλήματα επιλύονται με την ίδια αριθμητική πράξη, προσθέτοντας δηλαδή τους δυο αριθμούς που δίνονται. Όμως, η σημασιολογική τους δομή διαφέρει αρκετά. Το ίδιο ισχύει και για τα προβλήματα αφαίρεσης. Για παράδειγμα, τα προβλήματα μεταβολής 2, σύνθεσης 2 και σύγκρισης 1 μπορούν να επιλυθούν μειώνοντας τον μεγαλύτερο αριθμό που δίνεται τόσες φορές, όσες είναι ο μικρότερος. Αυτά προβλήματα επιλύθηκαν σωστά από 30, 26 και 14 παιδιά, αντίστοιχα, κατά τη δεύτερη συνέντευξη.

Σε γενικό πλαίσιο από τα πιο σημαντικά αποτελέσματα των πρόσφατων ερευνών της γνωστικής ψυχολογίας, σε σχέση με τα στοιχειώδη προβλήματα αριθμητικής- είναι οτι τα παιδιά της προσχολικής και της πρώτης σχολικής ηλικίας διαθέτουν σ' αυτόν τον τομέα σημαντικά μεγαλύτερες δεξιότητες απ' ό,τι θεωρείται συχνά πως έχουν. Διάφορες μελέτες δείχνουν ότι, όταν αρχίζουν το σχολείο, τα περισσότερα παιδιά φαίνονται να έχουν -με λανθάνοντα τουλάχιστον τρόπο-μία αρκετά πολύπλοκη γνώση του αριθμού και των στοιχειωδών πράξεων όπως η πρόσθεση και η αφαίρεση. Επίσης φαίνονται να μπορούν να εφαρμόσουν αυτή τη γνώση σε διάφορες καταστάσεις .

Σε πολλές άλλες πρόσφατες έρευνες βρέθηκαν επίσης δεδομένα για την επίδραση της σημασιολογικής δομής στη δυσκολία των προβλημάτων, όχι μόνο σε σχέση με τα στοιχειώδη προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης αλλά επίσης για τα δυσκολότερα προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης και για προβλήματα πολλαπλασιασμού. Σύμφωνα με το μοντέλο , το επίπεδο δυσκολίας της σημασιολογικής διάκρισης των προβλημάτων μπορεί να διαφέρει, είτε επειδή το αναγκαίο σημασιολογικό σχήμα για την αναπαράσταση των διαφορετικών τύπων προβλημάτων δεν είναι κάτι που τα παιδιά το κατέχουν εξίσου καλά, είτε επειδή μερικές αναπαραστάσεις προβλημάτων ταιριάζουν πιο εύκολα με την κατάλληλη αριθμητική πράξη απ' ό,τι άλλες.

8.9.3. Στρατηγικές επίλυσης των λεκτικά αριθμητικών προβλημάτων από τους μαθητές σύμφωνα με τους Eric de Corte *και* Lieven Verschaffel και την συμβολή *των* Carpenter *και* Moser

Σχετικά με τις στρατηγικές επίλυσης των παιδιών στα αριθμητικά προβλήματα, η διαχρονική μελέτη των Eric de Corte *και* Lieven Verschaffel έδωσε ευρήματα που, γενικά, συμπλήρωσαν αυτά των προηγούμενων ερευνών. Θα επικεντρωθούμε εδώ σε δύο σημαντικά ευρήματα: (1) στην ποικιλία των στρατηγικών που επινοούν τα παιδιά *για να* λύσουν λεκτικά προβλήματα, και (2) στην ευελιξία αυτών των στρατηγικών επίλυσης σε σχέση με τη συγκεκριμένη φύση του προβλήματος.

Πρώτον, ανακάλυψαν ότι οι μαθητές της Α' τάξης διαθέτουν ένα πλούσιο και ποικίλο ρεπερτόριο στρατηγικών για την επίλυση διαφορετικού τύπου στοιχειωδών λεκτικών προβλημάτων. Οι Carpenter & Moser ανέπτυξαν ένα σχήμα δύο διαστάσεων γι την ταξινόμηση αυτών των στρατηγικών. Αρχικά, διακρίνουν τι στρατηγικές της πρόσθεσης από τις στρατηγικές αφαίρεσης. έπειτα, οι στρατηγικές διευθετούνται, σύμφωνα με το βαθμό εσωτερίκευσής τους, σε *υλικές στρατηγικές,* που βασίζονται στην απευθείας χρησιμοποίηση των δαχτύλων ή κάποιων φυσικών αντικειμένων, σε *λεκτικές στρατηγικές,* που βασίζονται στη χρησιμοποίηση της ακολουθίας της μέτρησης, και σε *νοητικές στρατηγικές,* που βασίζονται στην ανάκληση αριθμητικών πράξεων. Με βάση *τα* δεδομένα τους μπορέσανε να αναπτύξουνε ένα επεξεργασμένο σχήμα ταξινόμησης από αυτό που πρότειναν οι Carpenter & Moser. Χρησιμοποιώντας αυτό το όχημα βρήκανε δέκα διαφορετικές στρατηγικές επίλυσης για σχεδόν όλους τους τύπους λεκτικών προβλημάτων που χρησιμοποιή*σανε*.

Μια σύγκριση των στρατηγικών που παρατηρήθηκαν μ' αυτές που διδάσκονται στα σχολεία φανέρωσε ότι πολλές διαδικασίες που χρησιμοποίησαν τα παιδιά δεν είχαν διδα*χ*τεί ποτέ με σαφή τρόπο, αυτές θα τις ονομάζαμε «επινοήσεις»· π.χ., στρατηγικές επίλυσης που έχουν επινοήσει τα ίδια τα παιδιά με βάση τη γνώση και τις διαδικασίες που απέκτησαν από τη διδασκαλία και από τις καθημερινές τους εμπειρίες. Ακολούθως *σκιαγραφ*είται μία από αυτές τις επινοήσεις: Κάποια από τα παιδιά που πέτυχαν στην επίλυση του προβλήματος μεταβολής 6 («Ο Πέτρος είχε μερικά μήλα· έδωσε 5 μήλα στην Άννα· ο Πέτρος έχει 7 μήλα τώρα· πόσα μήλα είχε ο Πέτρος στην αρχή;»), εφάρμοσαν ένα είδος *στρατη*γικής δοκιμής και λάθους: λογάριασαν το μέγεθος του αρχικού ποσού και έλεγξαν την υπόθεση τους ελαττώνοντας κατά 5, για να δουν αν απέμεναν 7 στοιχεία. Καθώς οι περισσότεροι δάσκαλοι δεν εξηγούν ποτέ αυτή τη στρατηγική στους μαθητές τους, μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι επινοημένη στρατηγική.

Το δεύτερο εύρημα τους σε σχέση με τις στρατηγικές επίλυσης αφορά τη σχέση ανάμεσα στη σημασιολογική δομή των στοιχειωδών αριθμητικών προβλημάτων και τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν τα παιδιά για να τα λύσουν. Αυτό το εύρημα επεκτείνει ένα προηγούμενο· συγκεκριμένα, ότι η σημασιολογική δομή ενός προβλήματος είναι σημαντικά καθοριστική για το επίπεδο δυσκολίας του. Πράγματι, τα δεδομένα δείχνουν ότι τα λεκτικά προβλήματα που λύνονται με την ίδια αριθμητική πράξη, αλλά διάφερουν στη σημασιολογική τους δομή, αποσπούν διαφορετικές στρατηγικές επίλυσης. Στο σχήμα ταξινόμησης για τις στρατηγικές στην πρόσθεση διακρίναμε δύο είδη λεκτικών στρατηγικών μέτρησης: αυτές κατά τις οποίες το παιδί αρχίζει να μετρά από τον πρώτο αριθμό που του δίνεται στο πρόβλημα (Π-στρατηγικές), και αυτές που το παιδί αρχίζει με το μεγαλύτερο αριθμό που του δίνεται (Μ-στρατηγικές). Οι Μ-στρατηγικές είναι ιδιαίτερα αποτελεσματικές όταν ο μεγαλύτερος προσθετέος στο πρόβλημα είναι επίσης ο δεύτερος Χρησιμοποιώντας αυτή τη διάκριση, ανακαλύψαμε μια επίδραση της σημασιολογικής δομής στο είδος των λεκτικών στρατηγικών μέτρησης που τα παιδιά χρησιμοποιούν για να λύσουν λεκτικά προβλήματα πρόσθεσης. Το πρόβλημα σύνθεσης 1 («Ο Πέτρος έχει 3 μήλα· η Άννα έχει 7 μήλα· πόσα μήλα έχουν και οι δυο μαζί;») απέσπασε δεκαοκτώ Μ-στρατηγικές και μόνο δύο Π-στρατηγικές. Όμως, για το πρόβλημα μεταβολής 1 («Ο Πέτρος είχε 3 μήλα η Άννα έδωσε στον Πέτρο 5 ακόμη μήλα· πόσα μήλα έχει ο Πέτρος τώρα;), βρήκαμε την αντίθετη τάση: οκτώ Π και μόνο τέσσερις Μ-στρατηγικές. Θεωρούμε ότι αυτό το εύρημα μπορεί να εξηγηθεί ως εξής: Καταστρώνοντας τη νοητική αναπαράσταση ενός προβλήματος πρόσθεσης που ξεκινά από τους δυο αριθμούς που δίνονται με μια αποτελεσματική Μ-στρατηγική, ζητείται από το παιδί να ανταλλάξει τις δυο ποσότητες που του δόθηκαν στην αναπαράσταση που έχει για το πρόβλημα. Αυτή η επαναδιοργάνωση του αρχικού προβλήματος είναι πιθανώς πιο φανερή αν τα δυο σύνολα έχουν την ίδια λειτουργία στο πρόβλημα, όπως στα προβλήματα σύνθεσης 1 (και τα δυο είναι υποσύνολα), απ' ό,τι αν η λειτουργία ς διαφέρει, όπως στα προβλήματα μεταβολής 1 (αρχικό σύνολο μεταβαλλόμενο σύνολο. Αυτά τα αποτελέσματα που αφορούν τη σχέση ανάμεσα στη σημασιολογική δομή των προβλημάτων πρόσθεσης και τις στρατηγικές επίλυσης των παιδιών συμπληρώνουν παρόμοια ευρήματα των Carpenter & Moser σε σχέση με τα προβλήματα αφαίρεσης, που επιβεβαιώθηκαν περαιτέρω και στα δεδομένα των Eric de Corte *και* Lieven Verschaffel.

8.9.4. Λάθη στα στοιχειώδη λεκτικά αριθμητικά προβλήματα

Οι Eric de Corte *και* Lieven Verschaffel αναλύσανε επίσης τη φύση και την προέλευση των λαθών που κάνουν τα παιδιά στα λεκτικά προβλήματα.

Προς το παρόν, πολλοί άνθρωποι, ερευνητές και δάσκαλοι, πιστεύουν ότι η βασική δυσκολία των παιδιών στα λεκτικά προβλήματα βρίσκεται στην επιλογή της κατάλληλης πράξης για να βρεθεί το άγνωστο στοιχείο στην κατάσταση του προβλήματος .Τα λάθη στα δεδομένα μας δείχνουν ότι αυτή η άποψη δεν αληθεύει για έναν μεγάλο αριθμό παιδιών, για τα οποία η μεγάλη δυσκολία βρίσκεται σ' ένα προηγούμενο στάδιο, συγκεκριμένα στην κατασκευή της κατάλληλης αναπαράστασης του προβλήματος. Επιπλέον, η ανάλυση αυτών των λαθών έδειξε ότι συχνά είναι ιδιαίτερα συστηματικά: είναι αποτέλεσμα λανθασμένων αντιλήψεων της κατάστασης του προβλήματος, που οφείλεται σε ανεπάρκεια της βάσης της αντιληπτικής γνώσης των παιδιών.

Πρόσφατα, μερικά από αυτά τα λάθη και τις παρανοήσεις έχουν επίσης περιγραφεί και σχηματοποιηθεί από άλλους ερευνητές (Briars, Larkin, Riley κ.ά.) μα ανακαλύφθηκαν κι άλλες ελλείψεις των παιδιών στις αναπαραστάσεις των προβλημάτων, που δεν έχουν αναφερθεί από άλλους ερευνητές . Αυτό θα το αποδεικνύεται για τρία τυπικά λάθη των μαθητών της Α' τάξης στα προβλήματα σύνθεσης 2.

Κατά την πρώτη συνέντευξη, μερικά παιδιά ανταποκρίθηκαν με έναν ασυνήθιστο τρόπο στο πρόβλημα σύνθεσης 2 («Ο Πέτρος έχει 3 μήλα· η Άννα έχει επίσης μερικά μήλα· ο Πέτρος και η Άννα έχουν 9 μήλα και οι δυο μαζί· πόσα μήλα έχει η Άννα;»): Η απάντηση ενός παιδιού ήταν «μερικά μήλα», ένας άλλος μαθητής] είπε «κανα δυό», και η απάντηση ενός τρίτου ήταν «λίγα». Αν και αυτές οι απαντήσεις δεν είναι εντελώς λανθασμένες, είναι σίγουρα ακατάλληλες στο γενικό πλαίσιο επίλυσης των λεκτικών προβλημάτων του σχολείου. Οι απαντήσεις των παιδιών μπορούν να ερμηνευτούν, σε σχέση με την ανεπαρκή γνώση του σχήματος των λεκτικών προβλημάτων, ως μια συνιστώσα γνώση που έχει σχέση με τη δομή αυτών των προβλημάτων γενικά, το ρόλο τους, το σκοπό τους στην αριθμητική εκπαίδευση και τους λανθάνοντες κανόνες και τις υποθέσεις που βρίσκονται σ' αυτό τον τύπο κειμένων.

Συνεπώς, αυτά τα παιδιά δεν γνώριζαν τι ακριβώς τους ζητούσαν όταν αντιμετώπιζαν ένα τέτοιο λεκτικό κείμενο. Στην πρώτη και στη δεύτερη συνέντευξη, μερικά παιδιά της Α' τάξης απάντησαν στο πρόβλημα σύνθεσης 2 με το μεγαλύτερο αριθμό που τους δινόταν: το 9. Ο τρόπος που τα παιδιά επαναλάμβαναν το πρόβλημα, καθώς και η υλοποίηση της κατάστασης του προβλήματος, φανέρωσαν ότι αυτό το λάθος ήταν μια λογική και αναμενόμενη συνέπεια της λανθασμένης αναπαράστασης του προβλήματος. Πράγματι, παρερμήνευαν την τρίτη πρόταση («ο Πέτρος και η Άννα έχουν 9 μήλα και οι δυο μαζί») με τον ακόλουθο τρόπο: «ο Πέτρος και η Άννα έχουν και οι δυο 9 μήλα». Μ' άλλα λόγια, μια φράση που περιέχει τη λέξη «μαζί» θεωρήθηκε λανθασμένα ως *μια πληροφορία* που αφορούσε το ποσό που είχε το κάθε άτομο. Η λανθασμένη απάντηση 9, των παιδιών, ήταν λοιπόν μια προβλέψιμη συνέπεια της λανθασμένης τους ερμηνείας της τρίτης πρότασης. Η αναπαράσταση τους του προβλήματος περιλάμβανε ταυτόχρονα τις ακόλουθες πληροφορίες: (α) Η Άννα έχει 9 μήλα, και (β) Εγώ πρέπει να βρω τον αριθμό των μήλων που έχει η Άννα.

Στην πρώτη συνέντευξη δυο παιδιά απέτυχαν στο πρόβλημα σύνθεσης 2, όχι λόγω κάποιας παρανόησης μιας συγκεκριμένης λέξης ή έκφρασης στο προφορικό κείμενο, αλλά επειδή ερμήνευσαν κάθε πρόταση της ιστορίας ξεχωριστά, χωρίς να συνάγουν τις λανθάνουσες σημασιολογικά σχέσεις ανάμεσα στα σύνολα που εμφανίζονταν στο πρόβλημα. Ειδικότερα, τα παιδιά ερμήνευσαν το πρόβλημα με τέτοιο τρόπο, ώστε η τρίτη πρόταση, «Ο Πέτρος και η Άννα έχουν 9 μήλα και οι δύο μαζί», να εισάγει ένα σύνολο 9 μήλων -μοιρασμένο στον Πέτρο και την Άννα-, που είναι διαφορετικό από τα σύνολα που έχουν από μόνοι τους ο Πέτρος και η Άννα. Υπολογίζοντας αυτά τα δεδομένα, δεν μας εκπλήσσει το ότι τα παιδιά απέτυχαν να δώσουν τη σωστή απάντηση. Πράγματι, επειδή στην αναπαράσταση τους της κατάστασης του προβλήματος τα γνωστά και τα άγνωστα στοιχεία δεν συνδέονταν με αντιστοιχία σχέσης μέρους-όλου, δεν ήταν ικανά να προσδιορίσουν το άγνωστο μέρος. Προκύπτει βέβαια η ερώτηση: Γιατί τα παιδιά έφτιαξαν μια λανθασμένη αναπαράσταση του προβλήματος; Μία εύλογη ερμηνεία είναι ότι η λανθασμένη αναπαράσταση του προβλήματος από τα παιδιά που αρχίζουν την Α' τάξη προκλήθηκε από την πολύ πυκνή, και με μια έννοια ακόμη και ασαφή, διατύπωση του προβλήματος. Πράγματι, το λεκτικό κείμενο, όπως διαβαζόταν από τον ερευνητή, δεν αναφέρει με σαφή τρόπο ότι τα 13 μήλα του Πέτρου σχηματίζουν συγχρόνως ένα μέρος των 9 μήλων που ο Πέτρος και η Άννα έχουν μαζί. Η σχέση μέρους-όλου ανάμεσα στα σύνολα του προβλήματος θα ήταν πιο ξεκάθαρη εάν το πρόβλημα ήταν διατυπωμένο ως εξής:

Ο Πέτρος και η Άννα έχουν 9 μήλα μαζί· τα 3 απ' αυτά ανήκουν στον Πέτρο και τα υπόλοιπα ανήκουν στην Άννα. Πόσα μήλα έχει η Άννα;

Σε μια άλλη σχετική μελέτη οι Eric de Corte *και* Lieven Verschaffel βρήκανε πράγματι ότι μια τέτοια επαναδιατύπωση των λεκτικών προβλημάτων, όπου οι υπονοούμενες σημασιολογικές σχέσεις γίνονται πιο σαφείς, διευκολύνει την κατανόηση και την επίλυση αυτών των προβλημάτων από τα μικρά παιδιά.

Ἰ Β μέρος – ερευνητικό

9.1. Σκοπός του πειράματος

Το πείραμα αυτό διεκπεραιώθηκε με σκοπό να συγκριθούν ποσοτικά και ποιοτικά τα απλά ως προς τη γλωσσική διατύπωση προβλήματα με τα εμπλουτισμένα ως προς τη γλωσσική διατύπωση προβλήματα, να βρεθεί ποια είναι ποιο αποτελεσματικά για να κατανοηθούν από τα παιδιά και να διερευνηθεί ο τρόπος με τον οποίο σκέφτονται και ενεργούν τα παιδιά προκειμένου να λύσουν ένα πρόβλημα.

Απλά προβλήματα ως προς τη γλωσσική διατύπωση νοούνται αυτά των οποίων η διατύπωση είναι ανάλογη των σχολικών εγχειριδίων, ενώ εμπλουτισμένα προβλήματα ως προς τη γλωσσική διατύπωση νοούνται αυτά που εμπεριέχουν περισσότερα λόγια επεξήγησης του υποθετικού προβλήματος που καλούνται να λύσουν οι μαθητές.

Τα συμπεράσματα *αφορούν* τον συγκεκριμένο *πληθυσμό* που μελετήθηκε.

9.2. Πληθυσμός

Η έρευνα αυτή έγινε με βάση ένα πληθυσμό 15 παιδιών από το επαρχιακό Δημοτικό Σχολείο του Πλαταμώνα. Ο *πληθυσμός* αυτός αποτελείται από δεκαπέντε παιδιά, 7 κορίτσια και 8 αγόρια, μαθητές της Τρίτης τάξης του Δημοτικού, ηλικίας 9 χρονών.

9.2. Μέσα, διαδικασία συλλογής δεδομένων

Η συλλογή των στοιχείων έγινε με πείραμα. Αυτό περιλαμβάνει την επίλυση τεσσάρων προβλημάτων που δόθηκαν στα παιδιά και την παράλληλη παρακολούθηση τους μέσα στην τάξη.

Το πείραμα περιλάμβανε τέσσερα προβλήματα. **Το πρώτο πρόβλημα και το δεύτερο πρόβλημα** είναι απλά διατυπωμένα προβλήματα, παρόμοια με τα προβλήματα του πρώτου μέρους του σχολικού εγχειριδίου «τα μαθηματικά μου» , της Τρίτης τάξης Δημοτικού.

Το τρίτο και το τέταρτο πρόβλημα, είναι εμπλουτισμένα προβλήματα, με μεγαλύτερη γλωσσική διατύπωση.

Το επίπεδο δυσκολίας των δύο ειδών γλωσσικής διατύπωσης είναι το ίδιο και οι πράξεις που απαιτούνται για την λύση τους βρίσκονται σε αντιστοιχία. Συγκεντρωτικά η φύση των προβλημάτων δίνεται από τον πίνακα 1.

Πίνακας 1 : Χαρακτηριστικά των προβλημάτων του πειράματος

	ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1	**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2**	**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3**	**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4**
ΕΙΔΟΣ ΓΛΩΣΣΙΚΗΣ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗΣ	Απλή	Απλή	Εμπλουτισμένη	Εμπλουτισμένη
ΠΡΑΞΕΙΣ ΠΟΥ ΑΠΑΙΤΟΥΝΤΑΙ ΓΙΑ ΤΗΝ ΛΥΣΗ	Πολ/μος Διαίρεση	Πολ/μος Αφαίρεση	Πολ/μος Διαίρεση	Πολ/μος Αφαίρεση

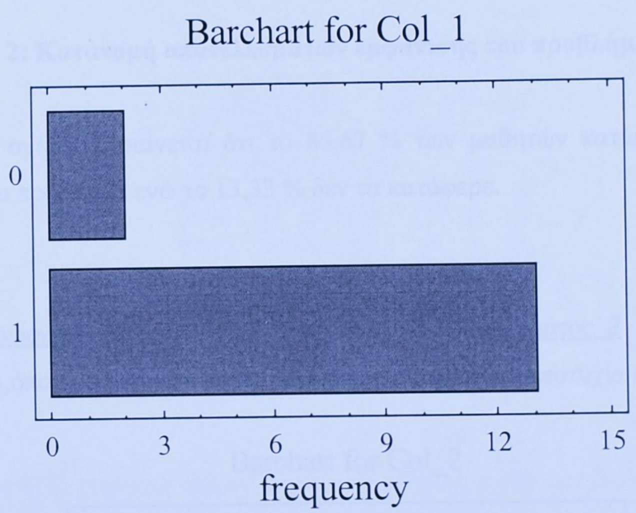
Στο τέλος της μελέτης , παρατίθεται το συγκεκριμένο πείραμα που δόθηκε στα παιδιά της Τρίτης Δημοτικού.

10.1. Αποτελέσματα

10.1.1. Ποσοτική ανάλυση

Η ανάλυση των αποτελεσμάτων της έρευνας έγινε με την χρήση του στατιστικού πακέτου STATGRAPHICS Plus. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται παρακάτω.

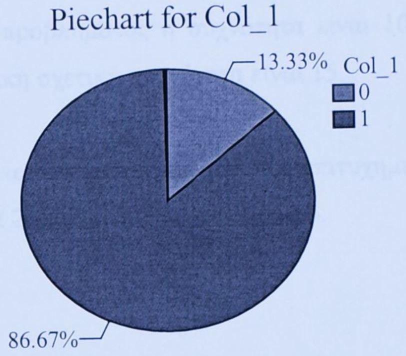
- *Όσον αναφορά την συχνότητα εμφάνισης του προβλήματος 1* προκύπτει το σχήμα 1,όπου με 1 συμβολίστηκε η επιτυχία και με 0 η αποτυχία επίλυσης .



Σχήμα 1 : Συχνότητα εμφάνισης του προβλήματος 1

Από το παραπάνω σχήμα και από την ανάλυση των δεδομένων προκύπτει ότι για την αποτυχημένη προσπάθεια επίλυσης του προβλήματος η συχνότητα είναι 2, η σχετική συχνότητα είναι 0,1333 και η αθροιστική συχνότητα είναι 2. Για την επιτυχημένη επίλυση του προβλήματος η συχνότητα είναι 13, η σχετική συχνότητα είναι 0,8667 και η αθροιστική σχετική συχνότητα είναι 15.

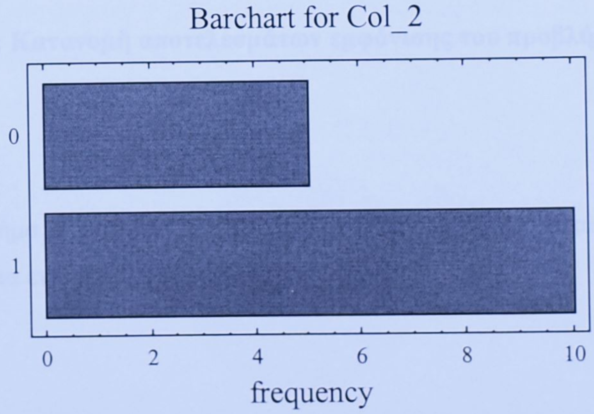
Όσο αναφορά την ποσοστιαία κατανομή των επιτυχημένων και αποτυχημένων απαντήσεων στο πρόβλημα 1 παρουσιάζεται το σχήμα 2.



Σχήμα 2: Κατανομή αποτελεσμάτων εμφάνισης του προβλήματος 1

Από το σχήμα 2 φαίνεται ότι το 86,67 % των μαθητών κατάφερε να λύσει σωστά το πρώτο πρόβλημα ενώ το 13,33 % δεν τα κατάφερε.

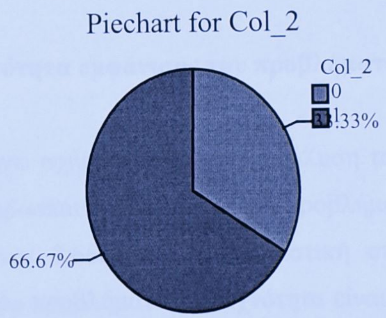
- <u>*Όσον αναφορά την συχνότητα εμφάνισης του προβλήματος 2*</u> προκύπτει το σχήμα 3,όπου με 1 συμβολίστηκε η επιτυχία και με 0 η αποτυχία επίλυσης.



Σχήμα 3 : Συχνότητα εμφάνισης του προβλήματος 2

Από το παραπάνω σχήμα και από την ανάλυση των δεδομένων προκύπτει ότι για την αποτυχημένη προσπάθεια επίλυσης του προβλήματος η συχνότητα είναι 5, η σχετική συχνότητα είναι 0,3333 και η αθροιστική συχνότητα είναι 5. Για την επιτυχημένη επίλυση του προβλήματος η συχνότητα είναι 10, η σχετική συχνότητα είναι 0,6667 και η αθροιστική σχετική συχνότητα είναι 15.

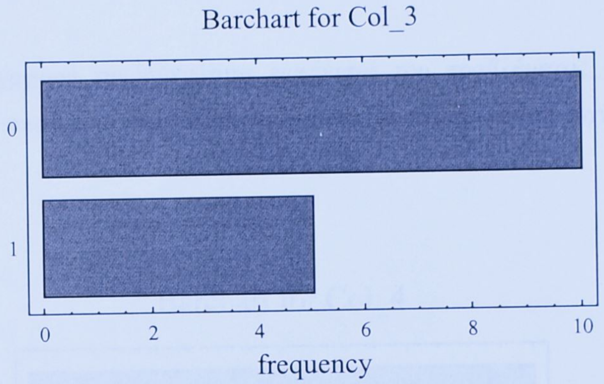
Όσο αναφορά την ποσοστιαία κατανομή των επιτυχημένων και αποτυχημένων απαντήσεων στο πρόβλημα 2 παρουσιάζεται το σχήμα 4.



Σχήμα 4: Κατανομή αποτελεσμάτων εμφάνισης του προβλήματος 2

Από το σχήμα 4 φαίνεται ότι το 66,67 % των μαθητών κατάφερε να λύσει σωστά το πρόβλημα ενώ το 33,33 % δεν τα κατάφερε.

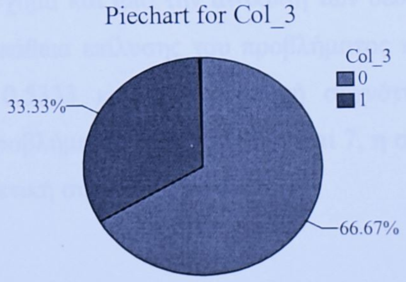
➢ *<u>Όσον αναφορά την συχνότητα εμφάνισης του προβλήματος 3</u>* προκύπτει το σχήμα 5,όπου με 1 συμβολίστηκε η επιτυχία και με 0 η αποτυχία επίλυσης.



Σχήμα 5 : Συχνότητα εμφάνισης του προβλήματος 3

Από το παραπάνω σχήμα και από την ανάλυση των δεδομένων προκύπτει ότι για την αποτυχημένη προσπάθεια επίλυσης του προβλήματος η συχνότητα είναι 10, η σχετική συχνότητα είναι 0,6667 και η αθροιστική συχνότητα είναι 10. Για την επιτυχημένη επίλυση του προβλήματος η συχνότητα είναι 5, η σχετική συχνότητα είναι 0,3333 και η αθροιστική σχετική συχνότητα είναι 15.

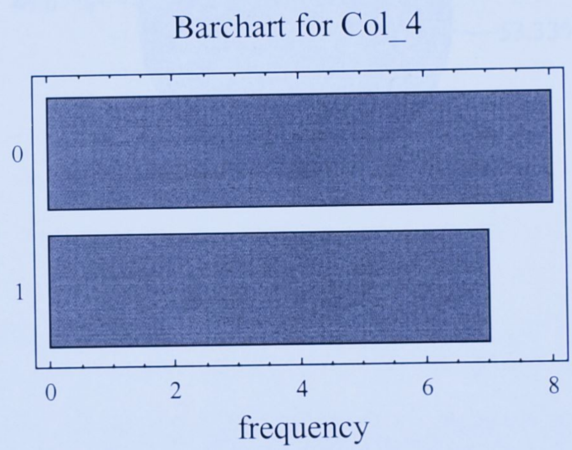
Όσο αναφορά την ποσοστιαία κατανομή των επιτυχημένων και αποτυχημένων απαντήσεων στο πρόβλημα 3 παρουσιάζεται το σχήμα 6.



Σχήμα 6: Κατανομή αποτελεσμάτων εμφάνισης του προβλήματος 3

Από το σχήμα 6 φαίνεται ότι το 33,33 % των μαθητών κατάφερε να λύσει σωστά το πρόβλημα ενώ το 66,67 % δεν τα κατάφερε.

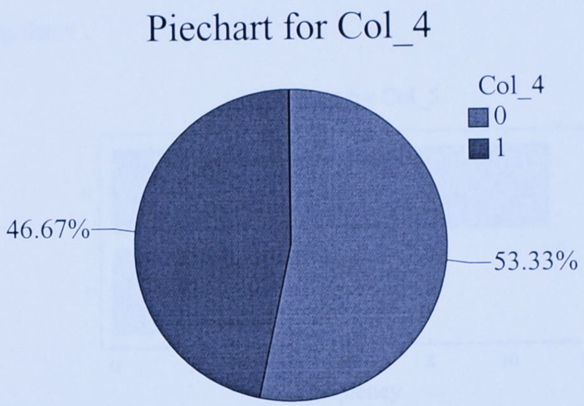
- *<u>Όσον αναφορά την συχνότητα εμφάνισης του προβλήματος 4</u>* προκύπτει το σχήμα 7,όπου με 1 συμβολίστηκε η επιτυχία και με 0 η αποτυχία επίλυσης.



Σχήμα 7 : Συχνότητα εμφάνισης του προβλήματος 4

Από το παραπάνω σχήμα και από την ανάλυση των δεδομένων προκύπτει ότι για την αποτυχημένη προσπάθεια επίλυσης του προβλήματος η συχνότητα είναι 8, η σχετική συχνότητα είναι 0,5333 και η αθροιστική συχνότητα είναι 8. Για την επιτυχημένη επίλυση του προβλήματος η συχνότητα είναι 7, η σχετική συχνότητα είναι 0,4667 και η αθροιστική σχετική συχνότητα είναι 15.

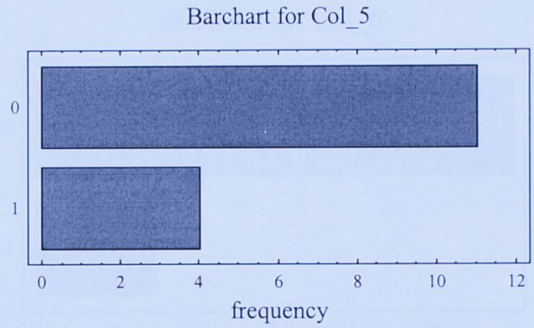
Όσο αναφορά την ποσοστιαία κατανομή των επιτυχημένων και αποτυχημένων απαντήσεων στο πρόβλημα 4 παρουσιάζεται το σχήμα 8.



Σχήμα 8: Κατανομή αποτελεσμάτων εμφάνισης του προβλήματος 4

Από το σχήμα 8 φαίνεται ότι το 46,67 % των μαθητών κατάφερε να λύσει σωστά το πρόβλημα ενώ το 53,33 % δεν τα κατάφερε.

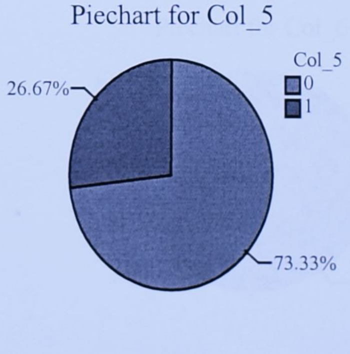
➢ Κάνοντας μια συνολική εκτίμηση των πειραμάτων που απαντήθηκαν και στα 4 προβλήματα σωστά, συμβολίσαμε με 1 την επιτυχή επίλυση και των τεσσάρων προβλημάτων και με 0 κάθε άλλο ενδεχόμενο. Έτσι έχουμε το σχήμα 9 που μας παρουσιάζει τη συχνότητα εμφάνισης ακριβώς τεσσάρων σωστά λυμένων προβλημάτων .



Σχήμα 9 : Συχνότητα εμφάνισης ακριβώς τεσσάρων προβλημάτων

Για την περίπτωση επίλυσης ακριβώς τεσσάρων προβλημάτων η συχνότητα είναι 4, η σχετική συχνότητα είναι 0,2667 και η αθροιστική συχνότητα είναι 15. Για οποιαδήποτε άλλη περίπτωση η συχνότητα είναι 11, η σχετική συχνότητα είναι 0,7333 και η αθροιστική συχνότητα είναι 11.

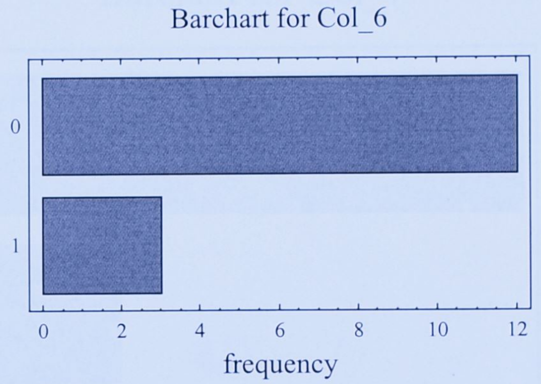
Όσο αναφορά την ποσοστιαία κατανομή της επίλυσης ακριβώς τεσσάρων προβλημάτων προκύπτει το σχήμα 10.



Σχήμα 10 : Ποσοστιαία κατανομή εμφάνισης ακριβώς τεσσάρων προβλημάτων

Σύμφωνα με το σχήμα 10 το 26,67 % των μαθητών έλυσαν ακριβώς 4 προβλήματα.

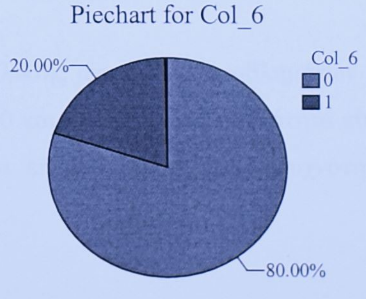
➤ Για να εξετάσουμε τη συχνότητα κατά την οποία έχουν λυθεί ακριβώς 3 προβλήματα (οποιαδήποτε) επεξεργαστήκαμε τα δεδομένα και συμβολίσαμε με 1 τις περιπτώσεις όπου οι μαθητές έλυσαν ακριβώς 3 προβλήματα και με 0 οποιαδήποτε άλλο ενδεχόμενο. Έτσι προέκυψε το σχήμα 11.



Σχήμα 11 :Συχνότητα εμφάνισης ακριβώς 3 προβλημάτων

Για την περίπτωση επίλυσης ακριβώς τριών προβλημάτων η συχνότητα είναι 3, η σχετική συχνότητα είναι 0,2000 και η αθροιστική συχνότητα είναι 15. Για οποιαδήποτε άλλη περίπτωση η συχνότητα είναι 12, η σχετική συχνότητα είναι 0,8000 και η αθροιστική συχνότητα είναι 12.

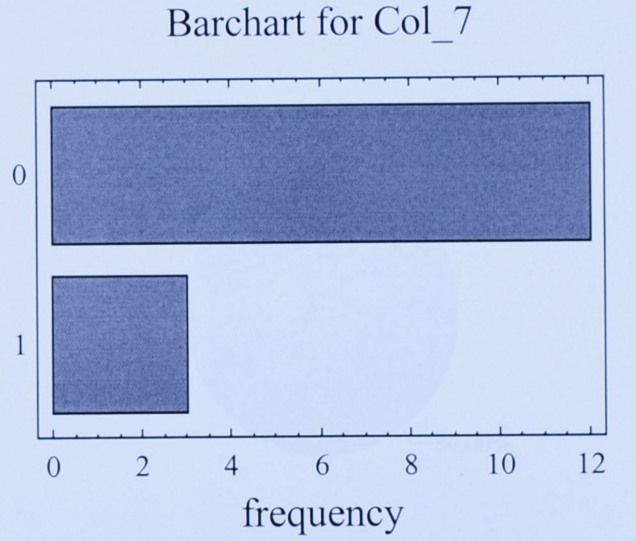
Όσο αναφορά την ποσοστιαία κατανομή της επίλυσης ακριβώς τριών προβλημάτων προκύπτει το σχήμα 12.



Σχήμα 12 : Ποσοστιαία κατανομή εμφάνισης επίλυσης ακριβώς 3 προβλημάτων

Σύμφωνα με το σχήμα 12 το 20,00 % των μαθητών έλυσαν ακριβώς 3 προβλήματα.

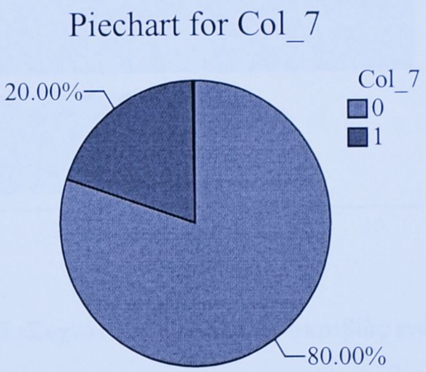
➢ Για να εξετάσουμε τη συχνότητα κατά την οποία έχουν λυθεί ακριβώς 2 προβλήματα (οποιαδήποτε) επεξεργαστήκαμε τα δεδομένα και συμβολίσαμε με 1 τις περιπτώσεις όπου οι μαθητές έλυσαν ακριβώς 2 προβλήματα και με 0 οποιαδήποτε άλλο ενδεχόμενο. Έτσι προέκυψε το σχήμα 13.



Σχήμα 13 :Συχνότητα εμφάνισης ακριβώς 2 προβλημάτων

Για την περίπτωση επίλυσης ακριβώς 2 προβλημάτων η συχνότητα είναι 3, η σχετική συχνότητα είναι 0,2000 και η αθροιστική συχνότητα είναι 15. Για οποιαδήποτε άλλη περίπτωση η συχνότητα είναι 12, η σχετική συχνότητα είναι 0,8000 και η αθροιστική συχνότητα είναι 12.

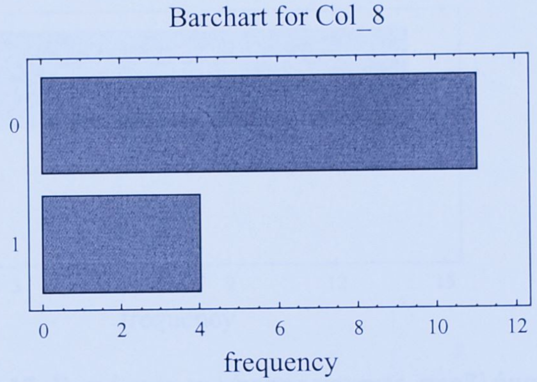
Όσο αναφορά την ποσοστιαία κατανομή της επίλυσης ακριβώς 2 προβλημάτων προκύπτει το σχήμα 14.



Σχήμα 14 : Ποσοστιαία κατανομή εμφάνισης ακριβώς 2 προβλημάτων

Σύμφωνα με το σχήμα 14 το 20,00 % των μαθητών έλυσαν ακριβώς 2 προβλήματα.

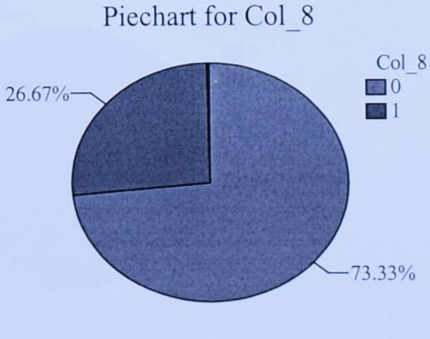
➢ Για να εξετάσουμε τη συχνότητα κατά την οποία έχει λυθεί ακριβώς ένα πρόβλημα (οποιοδήποτε) επεξεργαστήκαμε τα δεδομένα και συμβολίσαμε με 1 τις περιπτώσεις όπου οι μαθητές έλυσαν ακριβώς ένα πρόβλημα και με 0 οποιαδήποτε άλλο ενδεχόμενο. Έτσι προέκυψε το σχήμα 15.



Σχήμα 15 :Συχνότητα εμφάνισης ακριβώς ενός προβλήματος

Για την περίπτωση επίλυσης ακριβώς ενός προβλήματος η συχνότητα είναι 4, η σχετική συχνότητα είναι 0,2667 και η αθροιστική συχνότητα είναι 15. Για οποιαδήποτε άλλη περίπτωση η συχνότητα είναι 11, η σχετική συχνότητα είναι 0,7333 και η αθροιστική συχνότητα είναι 11.

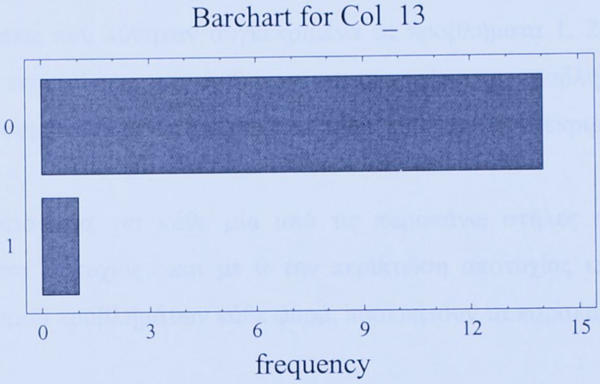
Όσο αναφορά την ποσοστιαία κατανομή της επίλυσης ακριβώς ενός προβλήματος προκύπτει το σχήμα 16.



Σχήμα 16 : Ποσοστιαία κατανομή εμφάνισης ακριβώς ενός προβλήματος

Σύμφωνα με το σχήμα 16 το 26,67 % των μαθητών έλυσαν ακριβώς 1 πρόβλημα.

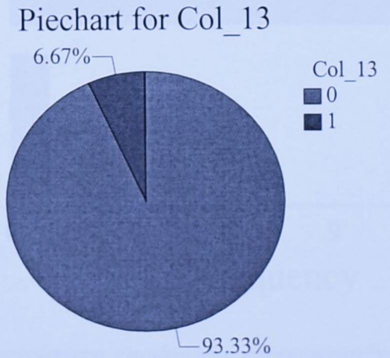
➢ Για να εξετάσουμε τη συχνότητα κατά την οποία <u>δεν λύθηκε κανένα πρόβλημα</u> εξετάσαμε τα δεδομένα , συμβολίσαμε με 1 τις περιπτώσεις που δεν λύθηκε κανένα πρόβλημα και με 0 οποιαδήποτε άλλη περίπτωση και προέκυψε το σχήμα 17.



Σχήμα 17 :Συχνότητα εμφάνισης κανενός προβλήματος

Για την περίπτωση επίλυσης κανενός προβλήματος η συχνότητα είναι 1, η σχετική συχνότητα είναι 0,0667 και η αθροιστική συχνότητα είναι 15. Για οποιαδήποτε άλλη περίπτωση η συχνότητα είναι 14, η σχετική συχνότητα είναι 0,9333 και η αθροιστική συχνότητα είναι 14.

Όσο αναφορά την ποσοστιαία κατανομή της επίλυσης κανενός προβλήματος προκύπτει το σχήμα 18.



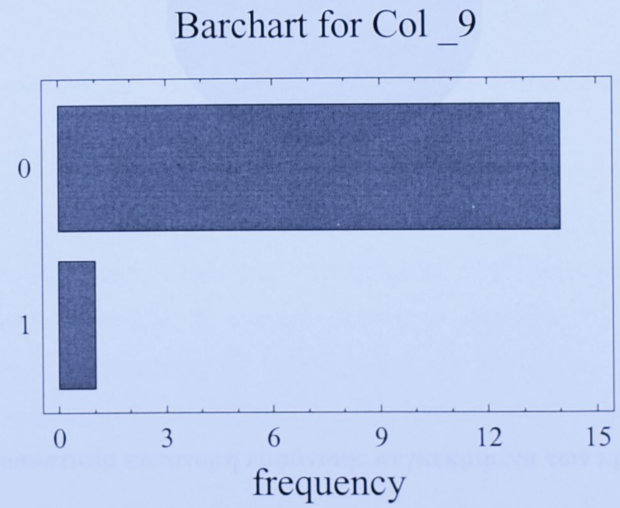
Σχήμα 18 : Ποσοστιαία κατανομή εμφάνισης κανενός προβλήματος

Σύμφωνα με το σχήμα 18 το 6,67 % των μαθητών δεν έλυσαν κανένα πρόβλημα.

➢ Για να εξετάσουμε την συχνότητα εμφάνισης ακριβώς τριών συγκεκριμένων προβλημάτων, συμβολίσαμε με «1» τις περιπτώσεις που λύθηκαν συγκεκριμένα τα προβλήματα 1, 2 και 3 από ένα μαθητή. Συμβολίσαμε με «2» τις περιπτώσεις που λύθηκαν συγκεκριμένα τα προβλήματα 1, 2, και 4. Συμβολίσαμε με «3» τις περιπτώσεις που λύθηκαν συγκεκριμένα τα προβλήματα 1, 3 και 4. Τέλος συμβολίσαμε με «4» τις περιπτώσεις που λύθηκαν συγκεκριμένα τα προβλήματα 2, 3 *και* 4.

Έτσι αντίστοιχα για κάθε μία από τις παραπάνω στήλες συμβολίζοντας με 1 την περίπτωση επιτυχίας και με 0 την περίπτωση αποτυχίας επίλυσης του αντίστοιχου συνδυασμού προβλημάτων κάθε φορά, προκύπτουν τα παρακάτω…

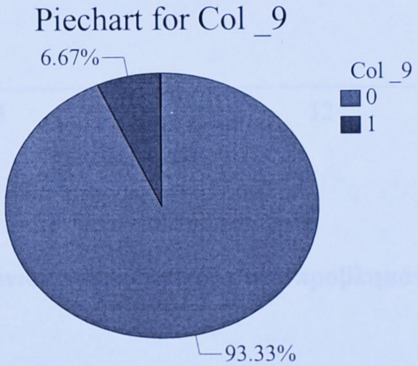
✓ Για να εξετάσουμε την συχνότητα εμφάνισης συγκεκριμένα των προβλημάτων 1, 2, *και* 3 έχουμε το σχήμα 19.



Σχήμα 19 :Συχνότητα εμφάνισης συγκεκριμένα των προβλημάτων 1, 2 και 3.

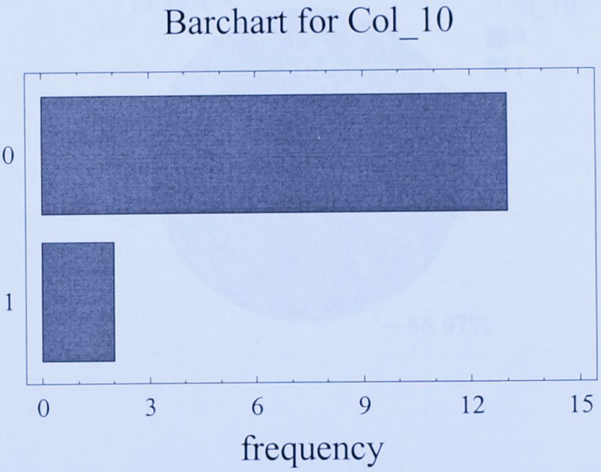
Για την περίπτωση εμφάνισης συγκεκριμένα των προβλημάτων 1, 2 και 3 έχουμε συχνότητα επιτυχίας 1, σχετική συχνότητα επιτυχίας 0,0667 και σχετική αθροιστική συχνότητα επιτυχίας 15. Όσο αναφορά την περίπτωση αποτυχίας, έχουμε συχνότητα 14, σχετική συχνότητα 0,9333 και σχετική αθροιστική συχνότητα 14.

Όσο αναφορά την ποσοστιαία κατανομή της εμφάνισης συγκεκριμένα των προβλημάτων 1, 2, και 3 έχουμε το σχήμα 20.



Σχήμα 20 : Ποσοστιαία κατανομή εμφάνισης συγκεκριμένα των προβλημάτων 1, 2 και 3.

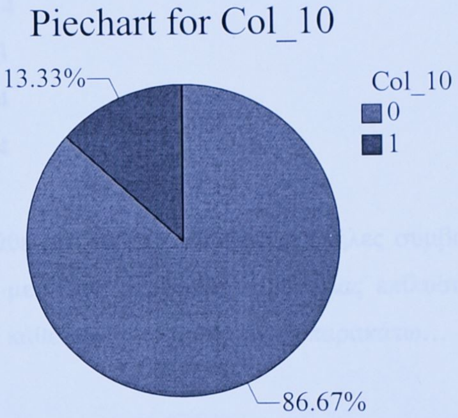
✓ Για να εξετάσουμε την συχνότητα εμφάνισης συγκεκριμένα των προβλημάτων 1, 2, και 4 έχουμε το σχήμα 21.



Σχήμα 21 :Συχνότητα εμφάνισης συγκεκριμένα των προβλημάτων 1, 2 και 4.

Για την περίπτωση εμφάνισης συγκεκριμένα των προβλημάτων 1, 2 και 4 έχουμε συχνότητα επιτυχίας 2, σχετική συχνότητα επιτυχίας 0,1333 και σχετική αθροιστική συχνότητα επιτυχίας 15. Όσο αναφορά την περίπτωση αποτυχίας, έχουμε συχνότητα 13, σχετική συχνότητα 0,8667 και σχετική αθροιστική συχνότητα 13.

Όσο αναφορά την ποσοστιαία κατανομή της εμφάνισης συγκεκριμένα των προβλημάτων 1, 2, και 4 έχουμε το σχήμα 22.



Σχήμα 22 : Ποσοστιαία κατανομή εμφάνισης συγκεκριμένα των προβλημάτων 1, 2 και 4.

✓ Για τις περιπτώσεις «3»(να λύθηκαν συγκεκριμένα και ακριβώς τα προβλήματα 1,3, και 4) και «4»(να λύθηκαν συγκεκριμένα και ακριβώς τα προβλήματα 2,3, και 4) δεν είχαμε καμία περίπτωση.

➢ Για να εξετάσουμε την συχνότητα εμφάνισης ακριβώς δύο συγκεκριμένων προβλημάτων, συμβολίσαμε με…

«1», την επίλυση των 1 και 2

«2», την επίλυση των 1 και 3

«3», την επίλυση των 1 και 4

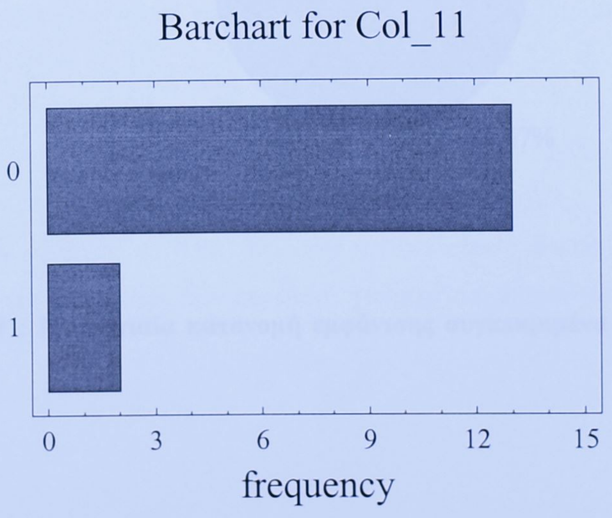
«4» την επίλυση των 2 και 3

«5» την επίλυση των 2 και 4

«6» την επίλυση των 3 και 4

Έτσι αντίστοιχα για κάθε μία από τις παραπάνω στήλες συμβολίζοντας με 1 την περίπτωση επιτυχίας και με 0 την περίπτωση αποτυχίας επίλυσης του αντίστοιχου συνδυασμού προβλημάτων κάθε φορά, προκύπτουν τα παρακάτω…

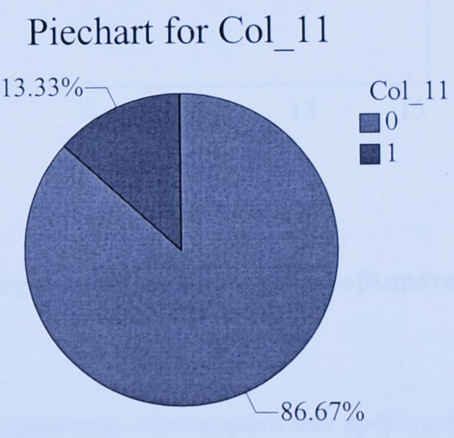
✓ Για να εξετάσουμε την συχνότητα εμφάνισης συγκεκριμένα των προβλημάτων 1 και 2 έχουμε το σχήμα 23



Σχήμα 23 :Συχνότητα εμφάνισης συγκεκριμένα των προβλημάτων 1 και 2.

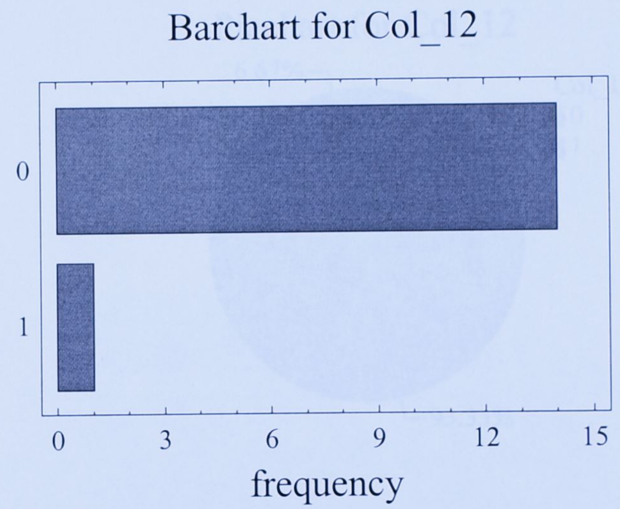
Για την περίπτωση εμφάνισης συγκεκριμένα των προβλημάτων 1 και 2 έχουμε συχνότητα επιτυχίας 2, σχετική συχνότητα επιτυχίας 0,1333 και σχετική αθροιστική συχνότητα επιτυχίας 15. Όσο αναφορά την περίπτωση αποτυχίας, έχουμε συχνότητα 13, σχετική συχνότητα 0,8667 και σχετική αθροιστική συχνότητα 13.

Όσο αναφορά την ποσοστιαία κατανομή εμφάνισης συγκεκριμένα των προβλημάτων 1 και 2 έχουμε το σχήμα 24.



Σχήμα 24 : Ποσοστιαία κατανομή εμφάνισης συγκεκριμένα των προβλημάτων 1 και 2.

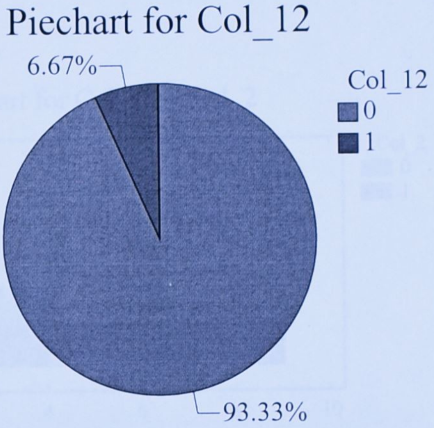
✓ Για να εξετάσουμε την συχνότητα εμφάνισης συγκεκριμένα των προβλημάτων 1 και 4 έχουμε το σχήμα 25.



Σχήμα 25 :Συχνότητα εμφάνισης συγκεκριμένα των προβλημάτων 1 και 4

Για την περίπτωση εμφάνισης συγκεκριμένα των προβλημάτων 1 και 4 έχουμε συχνότητα επιτυχίας 1, σχετική συχνότητα επιτυχίας 0,0667 και σχετική αθροιστική συχνότητα επιτυχίας 15. Όσο αναφορά την περίπτωση αποτυχίας, έχουμε συχνότητα 14, σχετική συχνότητα 0,9333 και σχετική αθροιστική συχνότητα 14.

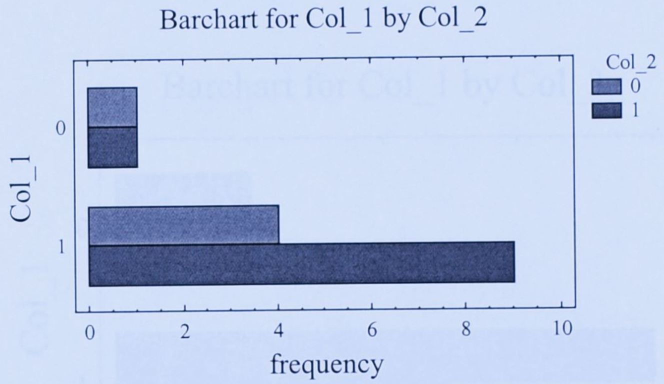
Όσο αναφορά την ποσοστιαία κατανομή της εμφάνισης συγκεκριμένα των προβλημάτων 1 και 4 έχουμε το σχήμα 26.



Σχήμα 26 : Ποσοστιαία κατανομή εμφάνισης συγκεκριμένα των προβλημάτων 1 και 4.

Για τις περιπτώσεις «2», «4», «5» και «6» δεν είχαμε καμία περίπτωση.

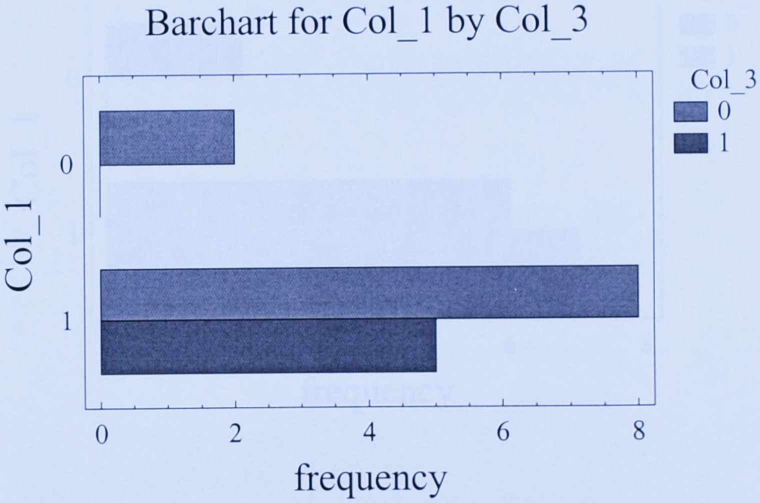
Κάνοντας έναν έλεγχο ανεξαρτησίας χ^2 για την περίπτωση που απαντήθηκε το πρώτο πρόβλημα (ανεξάρτητα με το αν απαντήθηκαν και άλλα) και την περίπτωση που απαντήθηκε το δεύτερο πρόβλημα (ανεξάρτητα με το αν απαντήθηκαν και άλλα), δηλαδή της μεταβλητής «πρόβλημα 1» και της μεταβλητής «πρόβλημα 2», προκύπτει το σχήμα 27.



Σχήμα 27 : Ραβδόγραμμα ελέγχου ανεξαρτησίας επίλυσης του πρώτου και του δεύτερου προβλήματος.

Από το αποτέλεσμα αυτής της ανάλυσης προκύπτει ότι οι δύο μεταβλητές είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Το αποτέλεσμα αυτό δικαιολογείται -παρά το γεγονός ότι οι λύσεις δίνονται από τον ίδιο μαθητή κάθε φορά-, γιατί τα προβλήματα διαφέρουν μεταξύ τους ως προς την δυσκολία της φύσης των πράξεων.

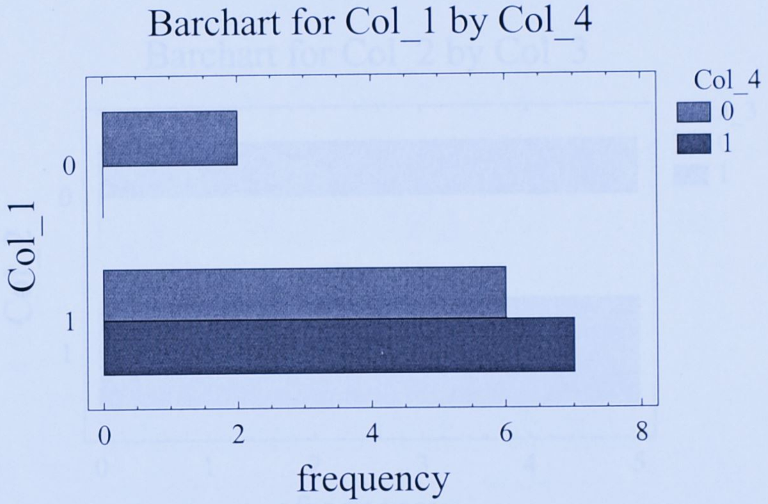
Ακολουθεί έλεγχος ανεξαρτησίας χ^2 της περίπτωσης που απαντήθηκε το πρώτο πρόβλημα και της περίπτωσης που απαντήθηκε το τρίτο πρόβλημα , δηλαδή της μεταβλητής «πρόβλημα 1» και της μεταβλητής «πρόβλημα 3»



Σχήμα 28 : Ραβδόγραμμα ελέγχου ανεξαρτησίας επίλυσης του πρώτου *και του* τρίτου προβλήματος.

Από το αποτέλεσμα αυτής της ανάλυσης προκύπτει ότι οι δύο μεταβλητές είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Το αποτέλεσμα αυτό δικαιολογείται -παρά το γεγονός ότι οι λύσεις δίνονται από τον ίδιο μαθητή κάθε φορά-, γιατί τα προβλήματα διαφέρουν ως προς το είδος της γλωσσικής τους διατύπωσης.

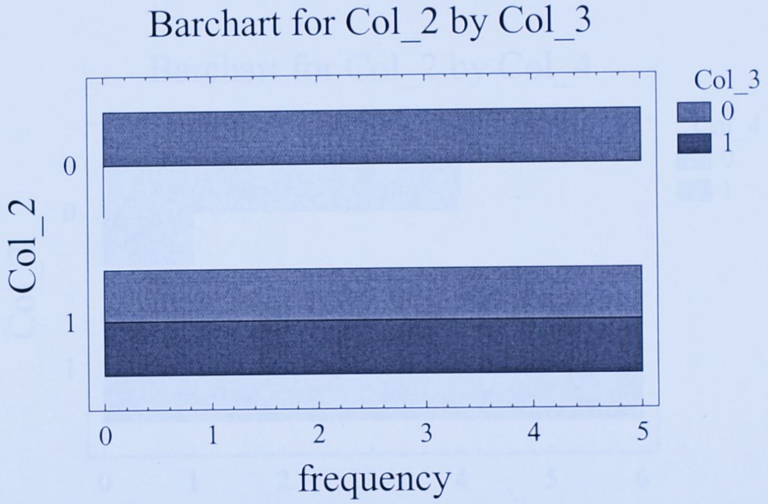
Ακολουθεί έλεγχος ανεξαρτησίας της περίπτωσης που απαντήθηκε το πρώτο πρόβλημα και της περίπτωσης που απαντήθηκε το τέταρτο πρόβλημα , δηλαδή της μεταβλητής «πρόβλημα 1» και της μεταβλητής «πρόβλημα 4».



Σχήμα 29 : Ραβδόγραμμα ελέγχου ανεξαρτησίας επίλυσης του πρώτου και του τέταρτου προβλήματος.

Από το αποτέλεσμα αυτής της ανάλυσης προκύπτει ότι οι δύο μεταβλητές είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Το αποτέλεσμα αυτό δικαιολογείται -παρά το γεγονός ότι οι λύσεις δίνονται από τον ίδιο μαθητή κάθε φορά-, γιατί τα προβλήματα διαφέρουν μεταξύ τους ως προς την δυσκολία της φύσης των πράξεων και το είδος της γλωσσικής τους διατύπωσης.

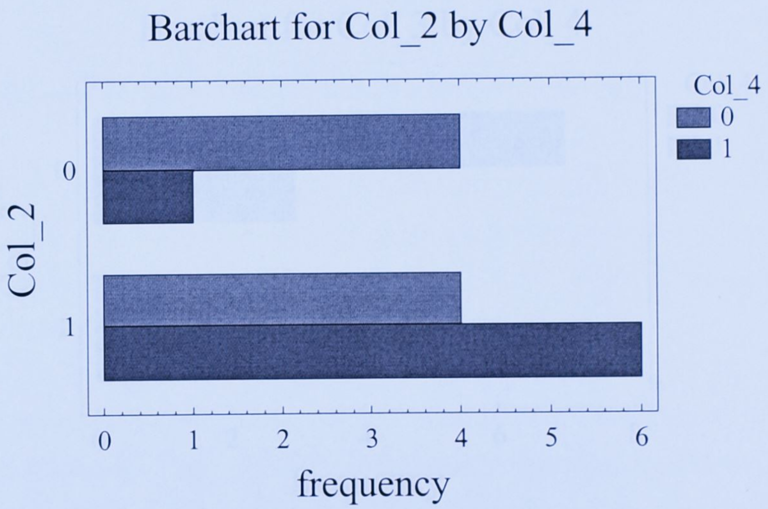
Ακολουθεί έλεγχος ανεξαρτησίας της περίπτωσης που απαντήθηκε το δεύτερο πρόβλημα και της περίπτωσης που απαντήθηκε το τρίτο πρόβλημα , δηλαδή της μεταβλητής «πρόβλημα 2» και της μεταβλητής «πρόβλημα 3».



Σχήμα 30 : Ραβδόγραμμα ελέγχου ανεξαρτησίας επίλυσης του δεύτερου και του τρίτου προβλήματος.

Από το αποτέλεσμα αυτής της ανάλυσης προκύπτει ότι οι δύο μεταβλητές είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Το αποτέλεσμα αυτό δικαιολογείται -παρά το γεγονός ότι οι λύσεις δίνονται από τον ίδιο μαθητή κάθε φορά-, γιατί τα προβλήματα διαφέρουν μεταξύ τους ως προς την δυσκολία της φύσης των πράξεων και το είδος της γλωσσικής τους διατύπωσης.

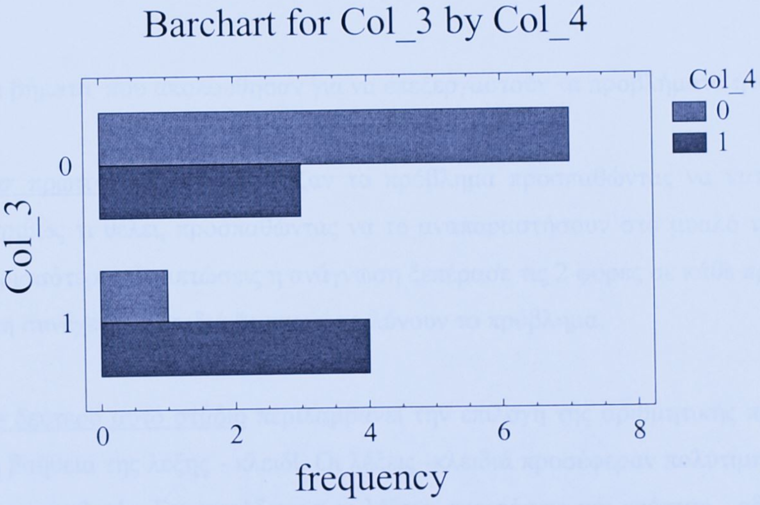
Ακολουθεί έλεγχος ανεξαρτησίας της περίπτωσης που απαντήθηκε το δεύτερο πρόβλημα και της περίπτωσης που απαντήθηκε το τέταρτο πρόβλημα, δηλαδή της μεταβλητής «πρόβλημα 2» και της μεταβλητής «πρόβλημα 4».



Σχήμα 31 : Ραβδόγραμμα ελέγχου ανεξαρτησίας επίλυσης του δεύτερου και του τέταρτου προβλήματος.

Από το αποτέλεσμα αυτής της ανάλυσης προκύπτει ότι οι δύο μεταβλητές είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Το αποτέλεσμα αυτό δικαιολογείται -παρά το γεγονός ότι οι λύσεις δίνονται από τον ίδιο μαθητή κάθε φορά-, γιατί τα προβλήματα διαφέρουν μεταξύ τους ως προς το είδος της γλωσσικής τους διατύπωσης.

Ακολουθεί έλεγχος ανεξαρτησίας της περίπτωσης που απαντήθηκε συγκεκριμένα το τρίτο πρόβλημα και της περίπτωσης που απαντήθηκε συγκεκριμένα το τέταρτο πρόβλημα, δηλαδή της μεταβλητής «πρόβλημα 3» και της μεταβλητής «πρόβλημα 3».



Σχήμα 32 : Ραβδόγραμμα ελέγχου ανεξαρτησίας επίλυσης του τρίτου και του τέταρτου προβλήματος.

Από το αποτέλεσμα αυτής της ανάλυσης προκύπτει ότι οι δύο μεταβλητές είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Το αποτέλεσμα αυτό δικαιολογείται -παρά το γεγονός ότι οι λύσεις δίνονται από τον ίδιο μαθητή κάθε φορά-, γιατί τα προβλήματα διαφέρουν μεταξύ τους ως προς την δυσκολία της φύσης των πράξεων.

10.1.2. Ποιοτική ανάλυση δεδομένων

Παρατηρήθηκαν και μελετήθηκαν τα παιδιά μέσα στην τάξη καθώς επίλυαν τα προβλήματα που τους δόθηκαν. Η μελέτη αυτή, αλλά και η παράλληλη συζήτηση για το σκεπτικό τους , μας οδήγησε σε μια επιφυλακτική προσέγγιση της στρατηγικής που ακολουθούν τα παιδιά. Πρώτα από όλα τους διαβάσαμε τα προβλήματα μια φορά μέσα στην τάξη. Ρωτήσαμε για απορίες για το αν καταλάβαιναν τα προβλήματα. Δεν υπήρχε καμία.

Τα βήματα που ακολούθησαν για να επεξεργαστούν τα προβλήματα ήταν :

- ✓ *Σαν* πρώτο βήμα ξαναδιάβαζαν το πρόβλημα προσπαθώντας να καταλάβουν ακριβώς τι θέλει, προσπαθώντας να το αναπαραστήσουν στο μυαλό τους. Στις περισσότερες περιπτώσεις η ανάγνωση ξεπέρασε τις 2 φορές σε κάθε πρόβλημα. Στη συνέχεια τα παιδιά ξεκινούν να λύνουν το πρόβλημα.

- ✓ Το δεύτερο αυτό στάδιο περιλαμβάνει την επιλογή της αριθμητικής πράξης με τη βοήθεια της λέξης - κλειδί. Οι λέξεις -κλειδιά προσέφεραν πολύτιμη βοήθεια στους μαθητές. Για παράδειγμα οι λέξεις «μοιράσει» και «ρέστα» οδηγούν το μυαλό των μαθητών στη διαίρεση και η φράση «η κάθε μία έχει» και το καθένα κάνει» τους οδηγούν στον πολ/μο.

- ✓ *Στο* τρίτο στάδιο οι μαθητές προσπαθούν να βρουν τους αριθμούς που θα συνδυάσουν στην αντίστοιχη πράξη που θα χρησιμοποιήσουν.

Το δεύτερο και τρίτο στάδιο εφαρμόζονται σταδιακά για κάθε έμμεσο ζητούμενο του προβλήματος μέχρι να οδηγηθούν στο τελικό αποτέλεσμα.

Μετά από μελέτη των λαθών που έκαναν τα παιδιά κατά την επίλυση των προβλημάτων, τα λάθη κατηγοριοποιήθηκαν ως εξής :

Ά Κατηγορία

Λάθος αποτέλεσμα στις πράξεις. Παρατηρήθηκαν 4 λάθος αποτελέσματα στη διαίρεση, 3 λάθος αποτελέσματα στον πολλαπλασιασμό και 3 λάθος αποτελέσματα στη αφαίρεση

Έ Κατηγορία

Λάθος επιλογή των αριθμών που λαμβάνουν μέρος σε μια πράξη. Παρατηρήθηκαν 4 λάθος επιλογές αριθμών στη διαίρεση και 4 λάθος επιλογές αριθμών στην αφαίρεση

Ί Κατηγορία

Λάθος επιλογή της κατάλληλης πράξης που απαιτείται για να λυθεί το πρόβλημα
Παρατηρήθηκαν 6 λάθος επιλογές αφαίρεσης ενώ οι 2 έπρεπε να είναι πράξεις πολλαπλασιασμού και οι 4 πράξεις διαίρεσης

10.2. Συμπεράσματα

Η έρευνα αυτή, μέσα από τη στατιστική και ποιοτική ανάλυση των δεδομένων που πήραμε από τους δεκαπέντε μαθητές της Τρίτης Τάξης του Δημοτικού Σχολείου, μας βοήθησε να βγάλουμε τα δικά μας συμπεράσματα όσον αφορά στον «κόσμο» των μαθηματικών εννοιών και την επίδρασή τους στη σκέψη των παιδιών, για τον συγκεκριμένο πληθυσμό.

Μέσα από τη στατιστική ανάλυση που κάναμε, τα αποτελέσματα ήταν τα εξής :

Δεδομένου ότι τα δύο πρώτα προβλήματα είχαν απλή γλωσσική διατύπωση και τα προβλήματα 3 και 4 είχαν εμπλουτισμένη γλωσσική διατύπωση, είναι φανερό αν συγκρίνει κανείς τα αποτελέσματα επιτυχίας επίλυσης των προβλημάτων, ότι τα δύο πρώτα προβλήματα με την απλή διατύπωση, είχαν μεγαλύτερα ποσοστά επιτυχίας.

Επιπλέον, πιο συγκεκριμένα το πρόβλημα που απαιτούσε πράξεις πολ/μού και διαίρεσης και είχε απλή διατύπωση, είχε μεγαλύτερη επιτυχία επίλυσης , σε σχέση με το πρόβλημα που επίσης απαιτούσε πολ/μό και διαίρεση και είχε εμπλουτισμένη διατύπωση.

Ομοίως και το πρόβλημα που απαιτούσε πράξεις πολ/μού και αφαίρεσης και είχε απλή διατύπωση, είχε μεγαλύτερη επιτυχία επίλυσης , σε σχέση με το πρόβλημα που επίσης απαιτούσε πολ/μό και αφαίρεση και είχε εμπλουτισμένη διατύπωση.

Η ποιοτική ανάλυση που κάναμε, μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι :

Οι μαθητές ακολουθούν κάποια στάδια επεξεργασίας των δεδομένων που έχουν σε ένα πρόβλημα. Στα απλά γλωσσικά διατυπωμένα προβλήματα οι μαθητές δεν δυσκολεύτηκαν ιδιαίτερα. Μια απλή εφαρμογή των σταδίων επεξεργασίας των προβλημάτων τους οδηγούσε στη λύση.

Στα εμπλουτισμένα γλωσσικά διατυπωμένα προβλήματα, οι μαθητές προβληματίζονταν από την επανάληψη αριθμητικών εννοιών. Δεν μπορούν να εφαρμόσουν τα στάδια επεξεργασίας τους γιατί το σύνολο των αριθμών που εμφανίζονται είναι μεγαλύτερο από το αναμενόμενο, τους μπερδεύει και αρχίζουν να κάνουν λάθη. Ακόμα και αν η λέξη- κλειδί τους οδήγησε στη σωστή πράξη, σε πολλές περιπτώσεις η επιλογή των αριθμών που έπρεπε να εφαρμόσουν στην αντίστοιχη πράξη ήταν λάθος. Αξιοσημείωτη είναι η τάση των μαθητών να δείχνουν μια προτίμηση στην πράξη της πρόσθεσης. Είναι η πρώτη πιθανή πράξη που τους έρχεται στο μυαλό αυτόματα ,μέχρι που κάποια λέξη- κλειδί να τους κάνει να την απορρίψουν.

Συμπερασματικά καταλήγω στο γεγονός ότι οι μαθητές βρίσκουν μεγαλύτερη ανταπόκριση σε προβλήματα με απλή γλωσσική διατύπωση, όπου είναι δομημένα έτσι ώστε η διάκριση των αριθμητικών δεδομένων και η λέξη- κλειδί να είναι ξεκάθαρες μέσα στο κείμενο και να τους οδηγούν αυτόματα στο συνδυασμό αριθμών και πράξεων.

Σε άλλη περίπτωση, δηλαδή σε ένα εμπλουτισμένο γλωσσικά διατυπωμένο πρόβλημα, χάνεται η σειρά των αριθμητικών στοιχείων για τους μαθητές και είναι δύσκολος ο εντοπισμός της λέξης- κλειδί και αυτό οδηγεί σε λάθος αποτελέσματα.

Όλα αυτά πιθανών να ξεκινούν από το γεγονός ότι οι μαθητές αδυνατούν να αναπαραστήσουν το πρόβλημα στο μυαλό τους. Αν πετύχαιναν σωστή αναπαράσταση, τότε πολύ πιθανόν να μην μπερδεύονταν από τον τρόπο διατύπωσης του προβλήματος.

Σε αυτή την προσέγγιση κατέληξαν και οι επιστήμονες Eric de Corte *και* Lieven Verschaffel που θεωρούν ότι «η μεγάλη δυσκολία βρίσκεται συγκεκριμένα στην κατασκευή της κατάλληλης αναπαράστασης του προβλήματος και όχι τόσο στην επιλογή της κατάλληλης πράξης. Επιπλέον, η ανάλυση των λαθών έδειξε ότι συχνά είναι ιδιαίτερα συστηματικά: είναι αποτέλεσμα λανθασμένων αντιλήψεων της κατάστασης του προβλήματος, που οφείλεται σε ανεπάρκεια της βάσης της αντιληπτικής γνώσης των παιδιών. Το επίπεδο δυσκολίας της σημασιολογικής διά- κρισης των προβλημάτων μπορεί να διαφέρει, είτε επειδή το αναγκαίο σημασιολογικό σχήμα για την αναπαράσταση των διαφορετικών τύπων προβλημάτων δεν είναι κάτι που τα παιδιά το κατέχουν εξίσου καλά, είτε επειδή μερικές αναπαραστάσεις προβλημάτων ταιριάζουν πιο εύκολα με την κατάλληλη αριθμητική πράξη απ' ό,τι άλλες.».

Επίσης τα αποτελέσματα είναι δυνατόν να ερμηνεύονται και με βάση τα στάδια ανάπτυξης της σκέψης ενός παιδιού κατά τον Piaget. Σύμφωνα με αυτά το παιδί στην ηλικία 6 με 12 περνά στο στάδιο των συγκεκριμένων λογικών πράξεων κατά το οποίο αρχίζει να αντιλαμβάνεται την έννοια του αριθμού και να κάνει απλές μαθηματικές πράξεις. Έτσι και τα παιδιά του δημοτικού 9 χρονών που πήραμε σαν δείγμα ακόμα δεν πέρασαν στο επόμενο στάδιο που είναι το στάδιο των τυπικών πράξεων, που ξεκινάει από την ηλικία των 12 ετών. Σε αυτό το στάδιο « *οι συγκεκριμένες λογικές πράξεις, οι* οποίες αποτελούν επίτευγμα της σκέψης του παιδιού της σχολικής ηλικίας, ενσωματώνονται προοδευτικά σε πολύπλοκα νοητικά σχήματα. Τα σχήματα αυτά επιτρέπουν την ανάπτυξη της αφηρημένης σκέψης. Χαρακτηριστικό αυτού του είδους σκέψης είναι ο σχηματισμός υποθέσεων και η διατύπωση επαγωγικών και παραγωγικών συλλογισμών. Με τη βοήθεια των συλλογισμών αυτών, το άτομο είναι σε θέση να κατανοεί βασικές έννοιες διαφόρων Επιστημών (Μαθηματικών, Φυσικών Επιστημών, Φιλοσοφίας κλπ.) και να διατυπώνει θεωρίες για να εξηγεί διάφορα κοινωνικά φαινόμενα , τα οποία είναι σε θέση να αντιμετωπίζει με κριτική διάθεση. Μπορεί να διαμορφώνει εναλλακτικές υποθέσεις για να εξηγήσει κάτι ή να σχεδιάζει διαφορετικές πιθανές λύσεις για την αντιμετώπιση ενός προβλήματος και να ελέγχει τα δεδομένα που διαθέτει για να καταλήξει στην υιοθέτηση κάποιας από αυτές. Είναι σε θέση να πειραματισθεί πριν απαντήσει σε κάποιο ερώτημα. Μπορεί να κάνει προεκτάσεις στο μέλλον, να στοχάζεται και να σχεδιάζει κατά τρόπο αφηρημένο μεταβολές στην κοινωνική πραγματικότητα ή να εξετάζει ποικίλες επιστημονικές θεωρίες, θρησκευτικές ή άλλες πεποιθήσεις, τις οποίες συχνά δυσκολεύεται να κατανοήσει, βλέποντας τις μόνο υπό το πρίσμα της αυστηρής λογικής σκέψης»(Μαριδάκη –Κασσωτάκη, 1999).

Συμπληρωματικά αξίζει να σημειωθούν και κάποιες παρατηρήσεις για τις πράξεις πολλαπλασιασμού και διαίρεσης. Ανεξάρτητα από τον τρόπο διατύπωσης του προβλήματος σημειώθηκε μια σημαντική διαφορά ως προς την ορθότητα επίλυσης πράξεων και πολλαπλασιασμού. Ακόμα μέσα στην τάξη ήταν εμφανή η δυσαρέσκεια των παιδιών προκειμένου να φέρουν σε πέρας μια πράξη διαίρεσης.

Η μεγαλύτερη επιτυχία επίλυσης πράξεων πολλαπλασιασμού επιβεβαιώνει τη θεωρία των Efraim Fischbein, Maria Deri, Maria Sainati Nello *και* Maria Sciolis Marino για το μοντέλο που χρησιμοποιούν τα παιδιά ,της επαναληπτικής πρόσθεσης, το οποίο βοηθάει σημαντικά τη χρήση του πολλαπλασιασμού, ακόμη και σε άτομα με σημαντική εκπαίδευση στα μαθηματικά. Επίσης ακόμη πιθανός παράγοντας για την επιτυχία του πολλαπλασιασμού είναι και το ότι από νωρίς γίνεται αποστήθιση από τα παιδιά των τυποποιημένων αποτελεσμάτων του πολλαπλασιασμού (από το 1- 10) που βρίσκονται σε πίνακα στο πίσω μέρος των βιβλίων των μαθηματικών του Δημοτικού.

Η μικρή επιτυχία της πράξης της διαίρεσης είναι δυνατόν να οφείλεται αφενός στο γεγονός ότι τα παιδιά θεωρούν ποιο εύκολο να «αθροίζουν» πράγματα παρά να τα «μοιράζουν» και αφετέρου στο ότι δεν υπάρχει ακόμα στα παιδιά ένα συγκεκριμένο μοντέλο διαίρεσης ώστε να το εφαρμόζουν και να λύνουν τυποποιημένα διαιρέσεις. Τα μοντέλα της διαίρεσης αρχίζουν να μαθαίνονται και να εφαρμόζονται ανάλογα, σε μεγαλύτερη ηλικία.

Αξιοσημείωτη είναι μια τελευταία συνολική σύγκριση που δείχνει ότι το ποσοστό επίλυσης και των τεσσάρων προβλημάτων από τα παιδιά της Τρίτης Δημοτικού είναι 26,67 %, το ποσοστό επίλυσης μόνο προβλημάτων είναι 20,00 %, το ποσοστό επίλυσης δύο προβλημάτων είναι 20,00 %, το ποσοστό επίλυσης μόνο ενός προβλήματος είναι 26,67% και το ποσοστό επίλυσης κανενός προβλήματος είναι 6,67 %. Δηλαδή ένα ποσοστό 66,67% έχει λύσει τουλάχιστον δύο προβλήματα ενώ το 33,34% λιγότερα από δύο. Ακόμη το ποσοστό των «άριστων» μαθητών είναι το ίδιο με εκείνο των μαθητών που έχουν λύσει λιγότερα από δύο, προβλήματα.

Τελικά από τα διάφορα αυτά ποσοστά μπορούμε να έχουμε μια εικόνα της τάσης επίδοσης στα Μαθηματικά.

Όνομα :
Τάξη :
Ημερομηνία :

Διαβάστε τα παρακάτω προβλήματα και απαντήστε

<u>ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1</u>

Ο Διονύσης έχει 3 νάιλον σακούλες που η κάθε μία έχει 24 καραμέλες. Αν μοιράσει τις καραμέλες σε 6 φίλους του, πόσες θα πάρει ο καθένας;

<u>ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2</u>

Η μητέρα έδωσε 90 λεπτά στην Ελένη για να αγοράσει 3 μολύβια, που το καθένα κάνει 25 λεπτά. Πόσα ρέστα θα φέρει η Ελένή στη μητέρα της;

ΠΡΟΒΛΗΜΑ3

Η Μαρία έχει 3 μεγάλα βάζα, σε κάθε βάζο έβαλε από 15 σοκολατάκια. Αν αποφασίσει να μοιράσει όλα τα σοκολατάκια που έχει και στα 3 βάζα, σε 6 παιδιά από τη γειτονιά, πόσα σοκολατάκια θα πάρει το κάθε ένα παιδάκι από τα 6;

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Ο Γιάννης έδωσε στον αδερφό του Κώστα 5 ευρώ να πάει να του πάρει 2 εφημερίδες. Η κάθε μια εφημερίδα κάνει 1,5 ευρώ. Πόσα λεφτά θα περισσέψουν στον Κώστα αν δώσει τα 5 ευρώ για να πληρώσει τις 2 εφημερίδες;

<u>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</u>

Βοσνιάδου, Σ. (1992). *Κείμενα εξελικτικής ψυχολογίας*. Αθήνα : Gutenberg

Βοσνιάδου, Σ. (1995).*Παρατηρώντας και καταγράφοντας τη συμπεριφορά των παιδιών*. Αθήνα : Gutenberg

Βοσνιάδου, Σ. (1998). *Η ψυχολογία των μαθηματικών*. Αθήνα : Gutenberg

Βοσνιάδου, Σ. (1998). *Γνωσιακή ψυχολογία*. Αθήνα : Gutenberg

Brown, I.S., & Burton, R.R. (1978), *Diagnostic Models for Procedural Bugs in Basic Mathematical Skills*. Cognitive Science

Bryant, P.– Nunes ,T . (1997). *Learning and teaching mathematics an international perspective.* United Kingtom : Psychology Press

Γιαννικοπούλου, Α. (1984). *Ψυχολογία προσαρμογής του παιδιού και του ενηλίκου*. Αθήνα : Γρηγόρης

Cobb, P- Steffe, L. P. (1983). *The constructivist researcher as teacher and model builder. Journal for research in mathematics education*

Coway, N. (1997). *The development of memory in childhood*. U.K. : Psycology Press

Davis, P.J. –Hersh, R.(1980). *Η μαθηματική εμπειρία* . (μεταφρ. Αναστασιάδης Γ.) Αθήνα : Τροχαλία. 29, 133,222, 301-302

Doulan, C. (1998). *The development of mathematical skills*. U.K. : Psycology Press

Εξαρχάκος, Θ. Γ. (1991). *Εισαγωγή στα μαθηματικά.* Ά τόμος. Αθήνα : Σ. Αθανασόπουλος –Σ. Παπαδάμης & Σια.

Εξαρχάκος, Θ. Γ. (1993). *Διδακτική των μαθηματικών*. Ύ έκδοση. Αθήνα : Ελληνικά Γράμματα

Gogolin, L. - Swartz, F. (1992). *A quantitative and qualitative inquiry into the attitudes toward science of nonscience college students. Journal of Research in Science Teaching*. 29, 487-504.

Haladyna, T. - Shaughnessy, J. (1982). *Attitudes toward science: A quantitative synthesis.* Science Education. 66 , 547-563

Καίλα, Μ.- Πολεμικός, Ν.- Φιλίππου, Γ. (1997). *Άτομα με ειδικές ανάγκες, Σύγχρονες κατευθύνσεις και απόψεις σε προβλήματα πρόληψης, παρέμβασης, αντιμετώπισης.* Αθήνα : Ελληνικά Γράμματα.

Καράς, Ι . (1991). *Οι θετικές επιστήμες στον ελληνικό χώρο.* Αθήνα : Δαίδαλος. 195

Κασωτάκης, Μ. - Φλουρής, Γ. (2001). *Μάθηση και διδασκαλία.* Αθήνα.

Λεμονίδης, Χ. (1999). *Περίπατος στη μάθηση της στοιχειώδους αριθμητικής.* Θες/νίκη : Εκδοτικός Οίκος.

Lang ,Serge. (1985). *Η γοητεία των μαθηματικών.* (μετάφρ. :Γαβράς Κ., Μουζακίτης Αρ., Μπουκής Γ.). Αθήνα :Κάτοπτρο. 11,19, 195

Μαριδάκη- Κασσωτάκη, Αικ. (1997). *Η διαμόρφωση συγκεκριμένων εννοιών.* Αθήνα : Γρηγόρης

Μαριδάκη- Κασσωτάκη, Αικ. (1999). *Σύγχρονες απόψεις για τη σκέψη του παιδιού.* Αθήνα : Γρηγόρης 18,19

Μόττη – Στεφανίδη, Φ. (1999). *Αξιολόγηση της νοημοσύνης παιδιών σχολικής ηλικίας και εφήβων.* Αθήνα : Ελληνικά Γράμματα

Μπούφη, Α. (2003). *Πρακτικές ασκήσεις διδακτικής μαθηματικών 1.Πανεπιστημιακές σημειώσεις.*

Munby, H. (1983). *Thirty studies involving the "scientific attutude inventory": what confidence can we have in this instrument? Journal of Research in Science Teaching.* 20 , 141-162.

Παπάς, Α. (1985). *Η αντιπαιδαγωγικότητα της παιδαγωγικής.* Αθήνα : Βιβλία για όλους

Piaget, J. (2000). *Περί παιδαγωγικής.* (μετάφρ: Αβαριτσιώτη Μ.). Αθήνα : Ελληνικά Γράμματα

Piaget, J. (1953). *How children form mathematical consepts.* Scientific american, 189, 74-79.

Πόρποδας, Κ.(1993). *Η διαδικασία της μάθησης*. Αθήνα : Μεταίχμιο

Πόρποδας, Κ. (1993). *Θέματα ψυχολογίας της γλώσσας, λύση προβλημάτων*. Αθήνα : Μεταίχμιο

Ρουσόπουλος, Γ. (1991). *Επιστημολογία των μαθηματικών*. Αθήνα : Gutenberg. 115

Σαμαρτζή, Σ. (1995). *Εισαγωγή στις γνωστικές λειτουργίες*. Αθήνα : Παπαζήση

Schibeci, R. (1989). *Home, school and peer group influences in student attitudes and achievement in science.* Science Education. 73 , 13-24.

Skemp, Richard. (1987), *The pcychology of learning mathimatics.* New Jersey :Lawrence erlbaum associates.

Τομασίδη- Χριστοδούλου, Χ. (1982). *Εισαγωγή στην ψυχολογία*. Αθήνα :Δίπτυχο

Tamier, P. (1989). *Home and school effects on science achievment on High School students. Journal of Educational Research.* 83, 30-39.

Τσακούμης, Α. (1988). *Συστήματα αριθμήσεως* . Αθήνα : Βιβλιοεκδοτική

Τσαμάτος, Π. (1989). *Εισαγωγή στη μαθηματική ανάλυση.* Ιωάννινα

Von Glasersfeld, E. (1983). *Learning as a constractive activity, problems of representation in the teaching and learning of mathematics.* New Jersey :Lawrence erlbaum associates.

Wads, B. (1971). *Piaget's theory of cognifine and affective development.* U.S.A. : Longman

Χαραλαμπόπουλος, Ι. (1983). *Γενική Παιδαγωγική.* Αθήνα :Ελληνικά Γράμματα

Χρηστάκης, Κ. (2000). *Θεωρητική και πρακτική προσέγγιση*. Αθήνα : Ατραπός

ΠΗΓΕΣ

Internet :(www.mathematics.gr)