ΧΑΡΟΚΟΠΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΤΜΗΜΑ ΓΕΩΓΡΑΦΙΑΣ

ΑΝΑΛΥΤΙΚΕΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ

Πτυχιακή εργασία του Ιωάννη Νεοκοσμίδη

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2005

ΧΑΡΟΚΟΠΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΤΜΗΜΑ ΓΕΩΓΡΑΦΙΑΣ

ΑΝΑΛΥΤΙΚΕΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ

Πτυχιακή εργασία του Ιωάννη Νεοκοσμίδη

Τριμελής Επιτροπή

Επιβλέπων : Αντώνης Ροβολής, Λέκτορας
Μέλη : Γεώργιος Καραμπατζός, Καθηγητής
Αλεξάνδρα Τραγάκη, Λέκτορας

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2005

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Με βάση το θέμα της παρούσας εργασίας, δηλαδή *Αναλυτικές Προσεγγίσεις στην Οικονομική Ανάλυση του Χώρου*, το όλο περιεχόμενο αυτής δεν μπορεί παρά να βασίζεται εντός πλαισίων των θεωρητικών μαθηματικών και της σύγχρονης οικονομικής του χώρου.

Στην αρχή γίνεται μια παρουσίαση της θεωρίας γενικής ισορροπίας, όπου ζητούμενο είναι η μεγιστοποίηση των κερδών των επιχειρήσεων με την παράλληλη μεγιστοποίηση της καμπύλης χρησιμότητας των νοικοκυριών. Έτσι παρουσιάζεται ένα κλασσικό υπόδειγμα που περιγράφει την γενική ισορροπία (η οικονομία του Ροβινσώνα Κρούσου). Στο επόμενο τμήμα καταγράφονται οι βασικές σχέσεις της θεωρίας της Νέας Οικονομικής Γεωγραφίας (ΝΟΓ). Στην συνέχεια παρουσιάζονται σύγχρονα μοντέλα περί αστικού σχεδιασμού και διοίκησης, όπως το μοντέλο Mills και το μοντέλο Henderson.

Το επόμενο κεφάλαιο περιγράφει το πώς το βασικό υπόδειγμα της ΝΟΓ μπορεί να επεκταθεί ώστε να περιλαμβάνει τις δημόσιες υποδομές και την σχέση τους με την οικονομική ανάπτυξη. Τέλος γίνεται μια πρωτότυπη προσπάθεια να τα βασικά στοιχεία των υποδειγμάτων αυτών, όπως η εργασία, η γη και το κεφάλαιο, να μην αντιμετωπίζονται ως απλές παράμετροι αλλά ως διαστάσεις του οικονομικού χώρου, και οι εξισώσεις των μοντέλων αυτών να αποδοθούν με τανυστική μορφή.

ABSTRACT

This dissertation deals with modern analytical theories regarding spatial economic analysis. Thus, the dissertation uses heavily mathematics and economic concepts.

In the first chapter there is a brief presentation of general equilibrium theory. The main point of this theory (general equilibrium theory) is the maximization of profits for a firm with the parallel maximization of utility function. The second chapter presents the basic model of New Economic Geography, which is now the most influential set of ideas in the economic analysis of space. This analysis is followed by the next chapter, which in turn presents models for urban planning, such as the models presented by Mills and Henderson.

The next part deals with the extension of the basic model of New Economic Geography with the incorporation of infrastructure and its impact on urban and regional growth. The last chapter presents an effort to 'built' a slightly different analytical framework where basic inputs of the economic modeling of space, such as labor, land and capital, are ascribed as tensors into a economic space.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η Οικονομική Γεωγραφία αποτελεί έναν από τους βασικούς κλάδους της Γεωγραφίας. Μία από τις «σχολές» της Οικονομικής Γεωγραφίας χρησιμοποιεί σε μεγάλη έκταση αναλυτικές – μαθηματικές προσεγγίσεις για την ανάλυση των οικονομικών φαινομένων στον χώρο.

Στα πλαίσια αυτά στην παρούσα εργασία γίνεται μια προσπάθεια εμβάθυνσης στη Νέα Οικονομική Γεωγραφία (New Economic Geography), καθώς επίσης και ερμηνείας των χωρικών μοντέλων που προτείνονται από αυτή και σύνθεσης νέων υποδειγμάτων τα οποία προκύπτουν βάσει των θεωρητικών μαθηματικών.

Θα ήθελα να χρησιμοποιήσω αυτή την ευκαιρία για να εκφράσω το διαρκές χρέος μου και την ευγνωμοσύνη μου στους δασκάλους μου (καθηγήτριες και καθηγητές) του Τμήματος γεωγραφίας οι οποίοι, καθεμία και καθένας με τη σειρά τους κατάφεραν να με μυήσουν στον πολυδιάστατο κόσμο της Γεωγραφίας. Ιδιαίτερα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου και επιβλέπων της πτυχιακής μου μελέτης κ. Αντώνη Ροβολή για τη σημαντική επιστημονική στήριξη που μου παρείχε καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης της μελέτης μου.

Ιωάννης Νεοκοσμίδης

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΣΤΗΝ ΑΓΓΛΙΚΗ

Ι. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ……...I-II

1. ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ.....1

1.1 Κατανομή Συγκέντρωσης.……4

1.2 Κατανομή Αποσυγκέντρωσης.……...6

1.3 Μια Πρώτη Προσέγγιση.……...……...11

2**. ΝΕΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΓΕΩΓΡΑΦΙΑ : ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ**.…….....17

2.1 Βασικό Μοντέλο ΝΟΓ…….20

2.2 Αποτελέσματα Διάχυσης (Spillovers Effects).……...……...…..25

2.3 Μη Μετακινούμενα Αγαθά Και Υπηρεσίες.……...……26

2.4 Εξωτερικές Οικονομίες Κλίμακας.……...28

3. ΟΙΚΟΝΟΜΙΕΣ ΣΥΣΣΩΡΕΥΣΗΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΑΣΤΙΚΟ ΧΩΡΟ……...29

3.1 Περιγραφική Ανάλυση……...……..30

3.2 Θεωρητικά Μοντέλα Αστικών Περιοχών……..……..33

3.3 Εκτιμήσεις πάνω στις Οικονομίες Συσσώρευσης…..……..40

4. ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΠΟΛΙΤΙΚΕΣ ΥΠΟΔΟΜΩΝ ΚΑΙ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ……41

4.1 Εκφράσεις Ισορροπίας…….....42

4.2 Δημόσια Πολιτική και Τεχνολογικές Επιδράσεις (Spillovers)..……..44

4.3 Υποδομές Μεταφοράς σε Υπόδειγμα Τριών Περιοχών……..45

4.4 Συγκέντρωση Οικονομικών Δραστηριοτήτων και Ανάπτυξη……....47

5. ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟΣ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ: ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΤΗΝ ΧΡΗΣΗ ΣΥΝΑΛΛΟΙΩΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ…….50

5.1 Αλγεβρική Κατασκευή του χώρου Κ.Ε.Κ……..51

5.2 Εφαπτόμενος χώρος του ΚΕΚ ……54

5.3 Τανυστές……..55

5.4 Εφαρμογές επί της Κ.Ε.Κ Πολλαπλότητας ……61

5.5 Θέματα προς έρευνα……65

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ……66

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ……....69

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ…….72

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην παρούσα εργασία έγινε μία προσπάθεια σκιαγράφησης των σύγχρονων αναλυτικών προσεγγίσεων για την οικονομική προσέγγιση του χώρου, δηλαδή των προσεγγίσεων που κάνουν ευρεία χρήση μαθηματικών εργαλείων.

Έτσι στο πρώτο μέρος της εργασίας αυτής παρουσιάζεται η θεωρίας γενικής ισορροπίας της οικονομικής ανάλυσης, η οποία αποτελεί το βασικό θεωρητικό πλαίσιο των σύγχρονων οικονομικών. Το επόμενο κεφάλαιο αποτελεί μία παρέκβαση στον χώρο των μαθηματικών, μιας και παρουσιάζει έννοιες και «εργαλεία» απαραίτητα για την κατανόηση των επομένων κεφαλαίων. Το βοηθητικό αυτό κεφάλαιο εστιάζει σε θεμελιώδες έννοιες της διανυσματικής ανάλυσης καθώς και σε βασικές έννοιες τοπολογίας.

Στην συνέχεια παρουσιάζεται με συντομία μεν αλλά και όσο πιο περιεκτικά και ουσιαστικά γίνεται, μια εικόνα για το τι είναι η Νέα Οικονομική Γεωγραφία (ΝΟΓ) και το βασικό μοντέλο αυτής. Γίνεται δε μια προσπάθεια να επισημανθούν οι όποιες διαφοροποιήσεις της θεωρίας της ΝΟΓ με την κλασική θεωρία της οικονομικής γεωγραφίας. Επίσης επιχειρείται η «κωδικοποίηση» των αποτελεσμάτων με την προοπτική να εφαρμοστούν στις θεωρίες οικονομικής αστικής ανάπτυξης και αστικού σχεδιασμού.

Το επόμενο βήμα ήταν η παρουσίαση βασικών θεωρητικών εννοιών για την αστική οικονομική ανάλυση και σχεδιασμό. Σε αυτό το τμήμα της εργασίας υπάρχει ανάλυση εννοιών όπως της συσσώρευσης, των οικονομιών αστικοποίησης, των οικονομιών συσπείρωσης κλπ. Στην συνεχεία διερευνάται ο τρόπος με τον οποίο οι έννοιες αυτές εφαρμόζονται σε υποδείγματα αστικών περιοχών. Σε αυτά τα μοντέλα καταγράφονται νέες θεωρίες οικονομικού αστικού σχεδιασμού με τη γλώσσα των θεωρητικών μαθηματικών και αναλύονται βασικές οικονομικές έννοιες, όπως το κέρδος, η εργασία, η γη, το κεφάλαιο, υπό το πρίσμα της ΝΟΓ. Επίσης στην ενότητα αυτή δίνεται έμφαση στην έννοια της συσσώρευσης και στις θεμελιώδεις εξισώσεις αυτής που θα μας απασχολήσουν στην συνέχεια.

Βασιζόμενοι πάντα στο βασικό πλαίσιο της ΝΟΓ, στην επόμενη ενότητα γίνεται αναφορά στις δημόσιες πολιτικές διαχείρισης. Εδώ καταγράφονται αρχικά καίριες εκφράσεις υποδειγμάτων ισορροπίας οι οποίες αποτελούν τη βάση για τον ορισμό των πολιτικών οργάνωσης του αστικού χώρου. Παρακάτω αναφέρονται σύγχρονα υποδείγματα για τις υποδομές, τις τεχνολογικές επιδράσεις και την οικονομική ανάπτυξη με την βοήθεια των βασικών εξισώσεων των υποδειγμάτων αυτών.

Στο τελευταίο κεφάλαιο, γίνεται προσπάθεια καταγραφής μιας νέας αντίληψης όσον αφορά τις οικονομικές και γεωγραφικές έννοιες. Έτσι ουσιαστικά οι βασικοί παράγοντες της ΝΟΓ αντιμετωπίζονται βάση μιας νέας λογικής όπου βασικά στοιχεία αυτής εκφράζονται ως τανυστές πάνω σε μία ΚΕΚ (Κύριο Εμπορικό Κέντρο) πολλαπλότητα[1]. Βασικός στόχος του εν λόγω κεφαλαίου είναι να εξετάσει την αναλλοίωτη μορφή βασικών εξισώσεων και να δείξει τη μη τήρηση αυτής της μορφής κάτω από ορισμένες συνθήκες, ή με άλλα λόγια στο κεφάλαιο αυτό έχει γίνει μια προσπάθεια να «αντιστοιχηθεί» ο οικονομικός γεωγραφικός χώρος σε χώρους περισσοτέρων διαστάσεων.

[1] Το ΚΕΚ στα αγγλικά αναφέρεται ως CBD (Central Business District).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{Ο}

ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

Ο Adam Smith τόνισε ότι υπάρχει ένα αόρατο χέρι που καθοδηγεί τους συμμετέχοντες στην αγορά και τους μηχανισμούς εγκαταστάσεις. Οι οικονομολόγοι του 19^{ου} αιώνα συμπεριλαμβανομένου τους, Ricardo, Mill, Marx και Jevons, τόνισαν την ανάγκη για μια γενική θεωρία ισορροπίας στη οικονομία, καθώς και την σημαντικότητα των αλληλεπιδράσεων μεταξύ των αγορών χωρίς ωστόσο να ορίσουν τα παραπάνω, μαθηματικά (για μια εκτενέστερη ιστορική παρουσίαση της θεωρίας της γενικής ισορροπίας, βλέπε Starr 1997).

Το διάγραμμα της προσφοράς και της ζήτησης, γενικά, παρουσιάζεται για τη θεωρία ανάλυσης της μερικής ισορροπίας και είναι γνωστό ως Marshallian, μετά από την «δουλειά» του Alfred Marshall το 1890. Παρόλα αυτά η «πατρότητα» για την παρουσίαση με μαθηματικό τρόπο της «ισορροπίας» ανήκει στον συγγραφέα Augustin Cournot (1838).

Ο Cournot και άλλοι συγγραφείς του 19^{ου} αιώνα κατάλαβαν ότι η ανάλυση της μερικής ισορροπίας αποτελεί ειδική περίπτωση των πολλαπλών αλληλεπιδράσεων της αγοράς (δηλαδή της γενικής ισορροπίας). Αυτοί οι συγγραφείς ωστόσο δεν δημιούργησαν ένα μοντέλο γενικής ισορροπίας. Αυτό επιτεύχθηκε επιτυχώς από τον Leon Warlas, Γάλλο οικονομολόγο που εργαζόταν σε σχολείο της Λοζάνης. Ο Warlas έθεσε το πρόβλημα και τις αρχές για όλη τη μαθηματική θεωρία περί γενικής ισορροπίας του εικοστού αιώνα. Έτσι για N αγαθά υπάρχουν N εξισώσεις (προσφοράς και ζήτησης) της μορφής $S_i(p_1,p_2,\ldots,p_N) = D_i(p_1,p_2,\ldots,p_N)$, με N αγνώστους p_i. Δεδομένου ότι ο αριθμός των αγνώστων και των εξισώσεων είναι ίσος, αν οι εξισώσεις είναι γραμμικές και ανεξάρτητες τότε αυτό υποδηλώνει μια άρρηκτη συνθήκη για την ύπαρξη λύσης.

Η νέα περίοδος της θεωρίας γενικής ισορροπίας, αρχίζει μεταξύ του διανοητικού αναβρασμού και της πολιτικής αστάθειας στην Βιέννη το 1930. Τα

σεμινάρια μαθηματικού περιεχομένου που λάμβαναν χώρα δύο φορές την εβδομάδα, με επικεφαλής τον (υιό του Carl Manger) Karl Manger, περιλάμβαναν δύο άνεργους μαθηματικούς, τους Abraham Wald και Karl Schlesinger. Ο τελευταίος μύησε τον Wald στην ιδέα της ύπαρξης γενικής ισορροπίας στα οικονομικά, όπου παρουσίασε μαθηματικές αποδείξεις της ύπαρξης γενικής ισορροπίας μέσω ποικίλλων μοντέλων όπου το κάθε ένα από αυτά αποτελούσε ειδική περίπτωση της γενικής ισορροπίας.

Οι επόμενες σημαντικές εξελίξεις στην θεωρία της γενικής ισορροπίας συνέβησαν την δεκαετία του ’50, με την εμφάνιση στο προσκήνιο τριών συγγραφέων, του Kenneth Arrow, του Gerard Debreu και του Lionel McKenzie. Αρχικά ο Arrow και ο Debreu δούλευαν ξεχωριστά ο ένας από τον άλλο, αλλά στη συνέχεια ανέπτυξαν μια καλή συνεργασία και πλέων δούλευαν ομαδοποιημένα. Οι εργασίες αυτών των συγγραφέων παρουσιάστηκαν στο συνέδριο της Αμερικανικής Οικονομετρικής Εταιρίας το 1952 και είχαν κοινό θεματικό άξονα όπου αποδεικνύονταν η ύπαρξη της γενικής ισορροπίας (βλέπε Starr 1997).

Το επόμενο βήμα στην εξέλιξη της θεωρίας της γενικής ισορροπίας γίνεται από την επεξεργασία του μοντέλου του Edgeworth (Starr 1997), όπου προκύπτει μια ισοδυναμία μεταξύ των πολυμερών συνόλων-συσσωρεύσεων στην αγορά και των διαπροσωπικών «συμφερόντων». Έτσι ο ρόλος του μεγάλου αριθμού συνόλων της οικονομίας, δηλαδή των πωλητών-αγοραστών και των παραγόμενων προϊόντων σε μια ανταγωνιστική οικονομία εδραιώθηκε μαθηματικά. Για την ερευνά τους, οι Arrow και Debrew, βραβεύτηκαν με το βραβείο Νόμπελ το 1972 και το 1983 αντίστοιχα. Πρέπει να σημειωθεί ότι η θεωρία της γενικής ισορροπίας είναι μέχρι και σήμερα ενεργή και ένα από τα κυρίαρχα υποδείγματα στην οικονομική ανάλυση. Στην συνέχεια θα αναλυθεί ένα στοιχειώδες μοντέλο γενικής ισορροπίας, ‘*η οικονομία του Robinson Crusoe*’ (Ροβινσώνα Κρούσου).

Αυτό το υπόδειγμα μπορεί να θεωρηθεί ως το πιο απλό μοντέλο γενικής ισορροπίας, όπου όλη η οικονομία αποτελείται μόνο από ένα νοικοκυριό. Αυτή η οικονομία του ενός νοικοκυριού έχει όλα τα συνήθη προβλήματα μιας οικονομίας, όπως προβλήματα επιλογών ‘παραγωγής – κατανάλωσης’. Στο υπόδειγμα της οικονομίας αυτής *του ενός ατόμου*, ο στόχος είναι η μοναδιαία μεγιστοποίηση της καμπύλης χρησιμότητας. Έτσι πρέπει να λύσουμε δύο, αρχικά, διαφοροποιημένα προβλήματα και έπειτα να δείξουμε ότι ουσιαστικά ταυτίζονται. Το πρώτο πρόβλημα εστιάζεται στην εύρεση μιας διαδικασίας ‘παραγωγής-κατανάλωσης’ ώστε να

μεγιστοποιείται η χρησιμότητα του *Robinson Crusoe*, με περιορισμούς τις διαθέσιμες πηγές και την διαθέσιμη τεχνολογία. Αυτή η μεγιστοποίηση θα έχει ως αποτέλεσμα την δημιουργία διακριτών συνόλων εξισώσεων που θα εκφράζουν το παραπάνω πρόβλημα. Έπειτα θα προσπαθήσουμε να εδραιώσουμε το πρόβλημα που χαρακτηρίζει μια ανταγωνιστική οικονομία στο φάσμα του *Robinson Crusoe*. Έτσι λαμβάνουμε ως δεδομένα μια επιχείρηση, έναν απλό ιδιοκτήτη (*Robinson Crusoe*) αυτής, έναν απλό καταναλωτή (*Robinson Crusoe*) που αγοράζει από την επιχείρηση και έναν απλό εργάτη (*Robinson Crusoe*) ο οποίος έχει προσληφθεί από την επιχείρηση[2].

Στο νησί του *Robinson Crusoe* υπάρχει μόνο μια παραγωγική διαδικασία, πχ. η σοδειά στρειδιών, ενώ ως εισροή στην 'παραγωγή' λαμβάνεται μόνο η 'εργασία κατά *Robinson Crusoe*'. Επίσης ο *Robinson Crusoe* προικίζεται με 168 εργατοώρες την εβδομάδα. Δεδομένων αυτών, ο *Robinson Crusoe* αντιμετωπίζει την παρακάτω συνάρτηση παραγωγής για τα στρείδια·

$$q=F(L),$$

όπου με F συμβολίζεται η συνάρτηση, με L η εργασία και με q το εξαγόμενο προϊόν από τα στρείδια.

Από την πλευρά της 'κατανάλωσης', συμβολίζουμε την κατανάλωση στρειδιών κατά *Robinson Crusoe* με c ενώ την κατανάλωση σε ελεύθερο χρόνο με R. Έτσι η διαθεσιμότητα ελεύθερου χρόνου ορίζεται από τη σχέση, R=168-L.

Η συνάρτηση χρησιμότητας δίδεται από τη σχέση u(c, R). Για να εξασφαλίσουμε ένα ικανοποιητικό μέγιστο, με τη μαθηματική έννοια του όρου, θεωρούμε ότι οι συναρτήσεις u, F είναι αρκετά κοίλες κοντά στο όριο. Έτσι για να υπολογίσουμε το μέγιστο της συνάρτησης χρησιμότητας καταλήγουμε στους ακόλουθους υπολογισμούς:

[2] Το γεγονός ότι στην απλούστατη αυτή μορφή ενός υποδείγματος γενικής ισορροπίας ο ιδιοκτήτης της επιχείρησης και ο εργαζόμενος είναι το ίδιο πρόσωπο δεν αποτελεί παρά μία απλούστευση που δεν επηρεάζει την λογική και τα συμπεράσματα του μοντέλου. Σε περιπλοκότερες μορφές υποδειγμάτων γενικής ισορροπίας αυτή η απλούστευση πάντα αναιρείται.

$$F'(.) > 0 \Rightarrow F''(.) < 0 \mapsto \frac{\partial u}{\partial R} > 0 \kappa \alpha \iota \frac{\partial u}{\partial c} > 0 \mapsto \frac{\partial^2 u}{\partial R^2} < 0 \kappa \alpha \iota \frac{\partial^2 u}{\partial c^2} < 0 \kappa \alpha \iota \frac{\partial^2 u}{\partial R \partial c} > 0.$$

Τώρα πρέπει να βρούμε μια επιλογή των παραμέτρων q, L ώστε να συμφωνούν με τα δεδομένα μας, 168 εργατώρες και διαθέσιμη τεχνολογία F(.), ενώ θα μεγιστοποιούν την καμπύλη χρησιμότητας u(c, R) με c=F(L)=q και R=168-L. Αυτό είναι ένα πρόβλημα που συνοψίζει όλες τις πηγές κατανομής αποφάσεων μίας μικρής οικονομίας. Το παραπάνω θα το ονομάζουμε «μηχανισμό κατανομής συγκέντρωσης». Το επόμενο βήμα είναι να διαχωρίσουμε το πρόβλημα σε δύο μέρη. Στην «απόφαση κατανάλωσης» και στην «απόφαση παραγωγής». Τα δύο αυτά μέρη απαρτίζουν ένα γενικότερο πρόβλημα το «πρόβλημα αποκέντρωσης». Στη συνέχεια θα επεκταθούμε, με συντομία, στα παραπάνω για να καταλήξουμε σε ορισμένα χρήσιμα συμπεράσματα και θεωρήματα για τη γενική ισορροπία.

1.1 ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΣΗΣ

Ο *Robinson Crusoe* αναζητά να μεγιστοποιήσει την καμπύλη χρησιμότητας u. Για την καλύτερη αντιμετώπιση του συγκεκριμένου προβλήματος και την ευκολότερη εξαγωγή συμπερασμάτων μεταθέτουμε, το μαθηματικό πρόβλημα εύρεσης μέγιστου σημείου της πεπλεγμένης συνάρτησης u(c, R), σε πρόβλημα εύρεσης μέγιστου σημείου συνάρτησης μιας μεταβλητής. Δηλαδή λύνουμε τις παραμέτρους c, R ως προς L. Έτσι έχουμε

u(c, R)=u(F(L), 168-L)

Εκτελούμε διαδικασίες εύρεσης μέγιστου ως προς L της u(F(L), 168-L): $\max_L u(F(L), 168-L)$.

Εφαρμόζουμε την πρώτη συνθήκη εύρεσης ακροτάτου:

$d/dL[u(F(L), 168-L)]=0$,

όπου καταλήγουμε στη σχέση (1.1.1)

$u_c(dF/dL)-u_R=0$,

όπου οι παράγοντες u_c, u_R εκφράζουν τις μερικές παραγώγους της u ως προς c, R αντίστοιχα.

Από τη σχέση (1.1.1) προκύπτει $dF/dL=-dq/dR = u_R/u_c$ (1.1.2)

Για να καταλήξουμε στη σχέση 1.2 από την 1.1 εφαρμόζουμε κάποιους μαθηματικούς υπολογισμούς, οι οποίοι παραλείπονται στο κυρίως μέρος της εργασίας για προφανείς λόγους.

Έτσι από τον ορισμό του ολικού διαφορικού προκύπτει ότι

$du = u_c dc+u_R dR$

$du = u_c dF(L)+u_R dR(L)$

$du = u_c F' dL+u_R R' dL$

$du/dL=u_c F'+u_R R'=0$, $u_c F'-u_R=0$, $\boxed{dF/dL=u_R/u_c}$. (1.1.2) (μιας και $R'=-1$)

Η ερμηνεία της σχέσης (1.1.2) υποδηλώνει ότι η κλίση της καμπύλης αδιαφορίας και αυτής της παραγωγής είναι ίση στο ακρότατο σημείο (μέγιστο). Αυτό

είναι γνωστό ως απόδοση Pareto (παίρνοντας το όνομα από τον οικονομολόγο Vilfredo Pareto). Ο όρος αυτός σημαίνει ότι η κατανομή δημιουργεί τεχνικές αποδόσεις χρησιμοποιώντας παραγωγικούς συντελεστές όπως (εργασία) για να παράγει τελικό προϊόν ή συνδυασμό εκροών (χρησιμοποιείται με το γενικό όρο εκροές συστήματος, το οποίο βρίσκεται υπό εξέταση) όπως τελικό προϊόν (στρείδια) και ελεύθερος χρόνος, έτσι ώστε να επιτυγχάνεται η (μέγιστη) χρησιμότητα ενός νοικοκυριού.

Τα παραπάνω είναι τα κύρια στοιχεία της μεθόδου κατανομής συγκέντρωσης στο μοντέλο του *Robinson Crusoe*. Παρακάτω θα αναπτύξουμε και θα σχολιάσουμε τα βασικά χαρακτηριστικά της μεθόδου κατανομής-αποσυγκέντρωσης.

1.2.ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΑΠΟΣΥΓΚΕΝΤΡΩΣΗΣ

Η συγκομιδή στρειδιών, η παραγωγική διαδικασία, θα λαμβάνει χώρα σε μία επιχείρηση όπου θα «απασχολεί» εργασία (κατά *Robinson Crusoe*) και θα πουλάει στρείδια. Τα κέρδη θα παίρνει ο ιδιοκτήτης (*Robinson Crusoe*). Σαν «νοικοκυριό» ο *Robinson Crusoe* θα λαμβάνει εισόδημα από δύο πηγές: από τα κέρδη ως ιδιοκτήτης της επιχείρησης και από το μισθό του ως πωλητής των προϊόντων αυτής (επιχείρησης). Επομένως υπάρχουν δύο αγορές που έχει να αντιμετωπίσει. Την αγορά εργασίας και την αγορά που σχετίζεται με την παραγωγή στρειδιών. Το επίπεδο μισθού, w, εκφράζεται σε παραγωγή στρειδιών ανά εργατοώρες, έτσι τα κέρδη που προκύπτουν και αναλογούν στην επιχείρηση συλλογής στρειδιών είναι,

$$\Pi = F(L) - w.L = q - w.L \quad (1.2.1)$$

Όπου q είναι η προσφορά στρειδιών και L η εργασία που απαιτήθηκε για την παραγωγή αυτή.

Για να αναπτύξουμε περαιτέρω το συλλογισμό μας, μπορούμε να κάνουμε την παραδοχή ότι αφού ο Robinson είναι ο μοναδικός ιδιοκτήτης της εταιρείας παραγωγής στρειδιών, ένα μέρος τον κερδών του θα προέρχονται από τα κέρδη της ίδιας της επιχείρησης. Αν προσπαθήσουμε να βρούμε μια σχέση που θα εκφράζει την εργασία εν συνάρτηση της προσωπικής ευχαρίστησης, θα καταλήγαμε στο εξής συμπέρασμα: αν πουλήσει όλη την εργασία που παράγει (ο Robinson) θα αγοράσει σε μεγάλο ποσοστό την προσωπική ευχαρίστηση. Έτσι οι δύο παράμετροι που αναφέρθηκαν παραπάνω συνδέονται με μια αρνητική σχέση, δηλαδή όσο αυξάνεται η μία θα μειώνεται η άλλη. Συμπεριλαμβανομένων των ανωτέρων, το γενικευμένο εισόδημα του Robinson, Y, θα δίνεται εν συναρτήσει της δωρεάς εργασίας και του εισοδήματος του Π.

$$Y = w.168 + \Pi \quad (1.2.2)$$

Σαν καταναλωτής ο Robinson ξοδεύει Y για την αγορά στρειδιών c και για αγορά ευχαρίστησης R, οπότε η εξισώσει (1.2.2) μετασχηματίζεται σε,

$$Y = w \cdot R + c$$

Από την πλευρά του Robinson ως ιδιοκτήτη η εταιρεία προσπαθεί να μεγιστοποιήσει τα κέρδη της σύμφωνα με τη διαθέσιμη τεχνολογία, γι‘αυτό το λόγω επιλέγει να παράγει σε δεδομένο (μαθηματικό) σημείο (q, L) που ανήκει στην καμπύλη μέγιστου κέρδους, δεδομένης της διαθέσιμης τεχνολογίας.

Με αμοιβή w, η επιχείρηση επιλέγει την καμπύλη μέγιστου κέρδους:

$$\Pi^* = q - w.L.$$

Κάνοντας μαθηματικούς υπολογισμούς για να καταλήξουμε στη μεγιστοποίηση της συνάρτησης Π καταλήγουμε στα εξής:

$$d\Pi/dL = dF(L)/dL - w = 0 \ , \ dF(L)/dL = w \quad (1.2.3)$$

Αν αντικαταστήσουμε το μέγιστο κέρδος Π* στην εξίσωση εισοδήματος, Y, του Robinson θα έχουμε

$$Y = \Pi^* + 168.w \quad (1.2.4)$$

Η εξίσωση (1.2.4) ικανοποιεί τον παράγοντα καταναλωτή, όμως από την πλευρά, του παράγοντα ιδιοκτήτη, αντιμετωπίζει το πρόβλημα να επιλέξει ένα μαθηματικό σημείο (c, R) ώστε να μεγιστοποιήσει τη καμπύλη χρησιμότητας u(c, R) δεδομένου της σχέσης w.R + c = Y.

Ύστερα από μαθηματικούς υπολογισμούς καταλήγουμε στη σχέση,

$$w = u_R/u_c \ ,$$

απ' όπου συμπεραίνουμε ότι για τη μεγιστοποίηση της καμπύλης χρησιμότητας u πρέπει το επίπεδο αμοιβής να ικανοποιεί την άνωθεν σχέση.

Όπως και σε προηγούμενη παράγραφο, έτσι και σε αυτό το σημείο ζητούμε την μεγιστοποίηση άρα και την εύρεση ακρότατου της συνάρτησης u(c, R) με περιορισμό w . R + c = Y. Για λόγους ευκολίας, λύνουμε την προηγούμενη σχέση ως προς R για να μην έχουμε να

αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα εύρεσης ακροτάτου συνάρτησης δύο μεταβλητών. Έτσι ουσιαστικά έχουμε να βρούμε μέγιστο σημείο συνάρτησης μια μεταβλητής, της L.

Οπότε $R = (Y – c)/w$

$u(c, R) = u(c, (Y-c)/w) = u (F(L), (Y – F(L))/w)$

το ολικό διαφορικό της άνωθεν σχέσης είναι: $du = u_c dc + u_R dR$

$du = u_c .dF(L)/dL.dL + u_R .(- 1/w). dF(L)/dL .dL$

$du = 0$

$u_c.dF(L)/dL –(1/w).dF(L)/dL = 0$

από την προηγούμενη σχέση καταλήγουμε,

$w = u_R/u_c$

Έτσι λοιπόν η αγορά βρίσκεται σε ισορροπία αν η προσφορά ισούται με τη ζήτηση στις δύο επιμέρους αγορές, στρειδιών και εργασία / ευχαρίστηση. Η προσφορά στρειδιών και η ζήτηση για εργασία ορίζονται από την εταιρεία η οποία επιλέγει ένα επίπεδο εκροών q και ένα επίπεδο εισροών L ώστε να μεγιστοποιεί τον παράγοντα Π δοθέντος του συντελεστή w. Η ζήτηση για τα στρείδια και η ζήτηση για προσωπική ευχαρίστηση καθορίζονται από το νοικοκυριό επιλέγοντας τις παραμέτρους c, R ώστε να μεγιστοποιούν την καμπύλη χρησιμότητας τους, δοθέντος του επιπέδου εισοδήματος. Έτσι μπορούμε να πούμε ότι το διαθέσιμο εισόδημα και η επιλογή μίας καμπύλης μέγιστου κέρδους συμπίπτουν. Οπότε η ισορροπία στην αγορά θα χαρακτηρίζεται από ένα επίπεδο αμοιβής w, ώστε c=q και L = 168 – R. Όταν αυτό συμβαίνει, οι αποφάσεις του νοικοκυριού και της επιχείρησης να συμφωνούν, οι αγορές βρίσκονται σε ισορροπία.

Για να εδραιώσουμε ένα καθαρό ορισμό της ισορροπίας, θα ήταν σκόπιμο να αναφερθούμε πρώτα στο θεώρημα μέσης τιμής.

Θεώρημα μέσης τιμής: ας είναι [α, β] ένα κλειστό διάστημα στο R και f μία συνεχής συνάρτηση στο [α, β] έτσι ώστε f(α) < f(β). Τότε για κάθε πραγματικό αριθμό γ που ισχύει f(α) < γ < f(β) θα υπάρχει χ ∈ [α, β] ώστε f(χ) = 0.

Προκειμένου να εφαρμόσουμε το παραπάνω θεώρημα, θα αναφερθούμε σε κάποιες ιδιότητες όσον αφορά την συμπεριφορά της προσφοράς και της ζήτησης προερχόμενες από τη μεγιστοποίηση της συνάρτησης χρησιμότητας u.

Έτσι έχουμε:

1. για w = 0, έχουμε R = 168 που σημαίνει ότι καμία εργασία δεν είναι εθελούσια προσφερόμενη όταν το επίπεδο αμοιβής είναι μηδέν. Υποθέτοντας ότι dF/dL > 0, τότε στο σημείο w = 0, ο παράγοντας εργασία ορίζεται και ισχύει η σχέση L > 0.
2. για αρκετά μεγάλο επίπεδο αμοιβής w, θα το συμβολίζουμε με w*, έχουμε $L \to 0$ αλλά R<< 168. Αυτό σημαίνει ότι για αρκετά υψηλό επίπεδο αμοιβής, θα απαιτείται πολύ «λίγη» εργασία και θα παρατηρείται αντίθετα μεγάλη προσφορά πρόθυμης εργασίας.
3. η εργασία, η ζήτηση προσωπικής ευχαρίστησης, η προσφορά στρειδιών και γενικά η ζήτηση είναι συναρτήσεις των μεταβλητών w, Y.

Σε αυτό το σημείο ήμαστε έτοιμοι να δώσουμε έναν ορισμό της ισορροπίας στην αγορά.

Ορισμός ισορροπίας: η ισορροπία στην αγορά αποτελείται από ένα επίπεδο αμοιβής w, ώστε να ισχύει q = c και L = 168 – R. Οι παράμετροι q και L καθορίζονται από τις αποφάσεις της επιχείρησης για μεγιστοποίηση κερδών, ενώ οι c, R καθορίζονται από το νοικοκυριό για τη μεγιστοποίηση της καμπύλης χρησιμότητας.

Τώρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα μέσης τιμής ώστε να δείξουμε ότι υπάρχει ένα επίπεδο ισορροπίας w ώστε q = c και L = 168 – R. Συμβολίζουμε τη ζήτηση προς ευχαρίστηση κατά w ως R(w) και τη ζήτηση εργασίας κατά w ως L(w). Έτσι έχουμε:

- οι συναρτήσεις R(w), L(w) είναι συνεχείς.
- Για w = 0, R(0) = 168 και L(0) > 0.
- Για w = w*, R(w*) < 168 και $L(w^*) \to 0$.

Έπειτα, συμβολίζουμε την υπερβολική ζήτηση για εργασία/ευχαρίστηση ως $Z_R(w) = R(w) + L(w) – 168$. Έτσι ισχύει $Z_R(0) > 0$ και $Z_R(w^*) < 0$, όπου η συνάρτηση $Z_R(w)$είναι συνεχείς.

Εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής, βρίσκουμε μια τιμή w^ για την οποία ισχύει w* > w^ > 0 έτσι ώστε να ισχύει $Z_R(w^) = 0$. Ο νόμος του Warlas λέει ότι στο σημείο w^ ικανοποιείται η ισότητα q = c. Η τιμή w^ αναφαίρετε ως επίπεδο αμοιβής γενικής ισορροπίας (βλέπε Starr 1997).

Παρατηρούμε ότι στην ανάλυση γενικής ισορροπίας, τα μαθηματικά και ιδιαίτερα ο μαθηματικός λογισμός παίζουν σπουδαίο ρόλο στην κατανόηση της οικονομικής θεωρίας και στην εύκολη διεξαγωγή συμπερασμάτων. Θα ήταν εύλογο λοιπόν αν μπορούσαμε κατά κάποιο τρόπο να αναπτύξουμε μια λογική που να στηρίζεται στην «μετάφραση» οποιουδήποτε οικονομικού θεωρητικού τμήματος σε μαθηματικό λογισμό ώστε το περιεχόμενο της θεωρίας να γίνεται ευκόλως αναλύσιμο, μέσω ντετερμινιστικών μεθόδων ανάλυσης.

1.3.ΜΙΑ ΠΡΩΤΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

Ας είναι N, σε πλήθος, αγαθά μέσα σε μία οικονομία. Τότε οι τιμές αυτών (αγαθών) θα παρίστατο με ένα διάνυσμα N διαστάσεων.

$P = (p_1, p_2, p_3, \dots , p_N)$.

Στην παραπάνω μαθηματική έκφραση, η τιμή του πρώτου αγαθού αντιστοιχεί στην πρώτη συντεταγμένη του διανύσματος P, που συμβολίζεται με p_1. Η τιμή του δεύτερου αγαθού συμβολίζεται με p_2 και αντιστοιχεί στην δεύτερη συντεταγμένη του διανύσματος P, κ.ο.κ. Έτσι δημιουργήσαμε, μέσω ενός μαθηματικού στοιχείου, το σύνολο τιμών N αγαθών. Τώρα ας δούμε την παρακάτω μαθηματική ισότητα.

$(p_1, p_2, p_3, \dots, p_N) = (3, 1, 5, \dots, 10)$.

Αυτή η ισότητα μας εξηγεί ότι η τιμή του αγαθού 1 είναι τρεις φορές μεγαλύτερη από την τιμή του αγαθού 2, και ότι η τιμή του αγαθού N είναι δύο φορές μεγαλύτερη από την τιμή του αγαθού 3 κ.ο.κ. Μόνο σχετικές (εν συγκρίσει με μια άλλη) τιμές μπορούμε να ερμηνεύσουμε μέσω της παραπάνω ισότητας και όχι απόλυτες (νομισματικές) τιμές. Αυτό είναι μια μικροοικονομική αντίληψη όπου η οικονομική δομή αγνοείται. Η ζήτηση ενός νοικοκυριού για κατανάλωση ή τα σχέδια για κατανάλωση μιας επιχείρησης αναπαρίστανται ως ένα διάνυσμα N- διαστάσεων. Κάθε ένα από τα προϊόντα αναπαρίστανται με μία συντεταγμένη διανύσματος.

Ας υποθέσουμε ότι το μαθηματικό σύνολο των νοικοκυριών είναι το H. Τότε για κάθε στοιχείο (νοικοκυριό) $h \in H$, ορίζουμε μια συνάρτηση ζήτησης $D^h(p)$, όπου p αναπαριστά την τιμή, ώστε $D^h : P \to R^n$. Αντίστοιχα έχουμε και τη συνάρτηση προσφοράς της επιχείρησης, $S^j : P \to R^n$, όπου με p αναπαρίστανται η τιμή.

Έτσι η συνάρτηση ζήτησης της αγοράς εκφράζεται με την κάτωθι σχέση:

$$Z(p) = \sum_{h \varepsilon H} D^h(p) - \sum_{j \varepsilon F} S^j(p) - r,$$

με F αναπαριστούμε το σύνολο των επιχειρήσεων.

Κάθε συντεταγμένη του διανύσματος p αναπαριστά την τιμή του εκάστοτε αγαθού. Έτσι το p είναι το διάνυσμα N-διαστάσεων με συντεταγμένες $(p_1, p_2, \dots, p_n)$.

Ο όρος Z(p), είναι ένα διάνυσμα N-διαστάσεων όπου κάθε συντεταγμένη αναπαριστά τη ζήτηση του αγαθού (ή την προσφορά αν η συντεταγμένη έχει αρνητική τιμή). Τα παραπάνω μπορούν να εκφραστούν μέσω το νόμο του Warlas.

Νόμος Warlas:

Για όλα τα p ∈ P ισχύει, $\boxed{p.Z(p) = \sum_{i=1}^{N} p_i.Z_i(p) = 0}$

Ο Warlas υποθέτει τη συνέχεια στην συνάρτηση Z(p) διότι έτσι εκφράζει τη συνέχεια στη συμπεριφορά των νοικοκυριών και επιχειρήσεων, στη ζήτηση και κατανάλωση όταν οι τιμές μεταβάλλονται.

Η οικονομία θα βρίσκεται σε ισορροπία αν και μόνο αν η ζήτηση εξισώνεται με την προσφορά για μια καθορισμένη τιμή. Αν ισχύει αυτό τότε η ζήτηση της αγοράς ισούται με μηδέν.

Ορισμός: μια τιμή p^0 θα χαρακτηρίζεται ως τιμή ισορροπίας αν ισχύει ότι $Z(p^0)<0$. Αυτό σημαίνει ότι η τιμή p^0 είναι τιμή ισορροπίας αν η προσφορά εξισώνεται με τη ζήτηση σε όλες τις αγορές. Για να αποδείξουμε την ύπαρξη ισορροπίας στην αγορά συνυπολογίζοντας τον νόμο Warlas και τη 'συνέχεια' πρέπει να αναφερθούμε σε μια ισχυρή μαθηματική δομή, το θεώρημα Fixed-Point του Brouwer.

Θεώρημα Fixed-point Brouwer:

Ας είναι f(.) μια συνεχής συνάρτηση, $f : P \to P$. Τότε υπάρχει x* ∈ P ώστε f(x*)=x*. Έπειτα θα χρησιμοποιήσουμε το παρακάτω μαθηματικό θεώρημα για να καταλήξουμε σε ένα οικονομικό θεώρημα – την ύπαρξη γενικής οικονομικής ισορροπίας.

Θεώρημα: Ας θεωρήσουμε ότι ισχύει ο νόμος του Warlas και η 'συνέχεια'. Τότε υπάρχει τιμή p* ∈ P ώστε η p* να είναι τιμή ισορροπίας.

Η απόδειξη του θεωρήματος είναι η μαθηματική ανάλυση ενός οικονομικού θέματος. Ας υποθέσουμε πως οι «τιμές» καθορίζονται από ένα «ρυθμιστή». Εν συνεχεία, φέρουμε διάνυσμα τιμών p ώστε η ανταπόκριση στην αγορά όσον αφορά τη ζήτηση να ισούται με Z(p). Έτσι κάποια αγαθά θα είναι σε υπερβολική ζήτηση και κάποια σε υπερβολική προσφορά, σε επίπεδο τιμών p. Σε αυτή τη περίπτωση ο «ρυθμιστής» εφαρμόζει κάτι το προφανές, αυξάνει την τιμή στα αγαθά που παρουσιάζουν υπερβολική ζήτηση και μειώνει τη τιμή στα αγαθά που παρουσιάζουν υπερβολική προσφορά. Το ερώτημα που προκύπτει είναι πως και με βάση ποια κριτήρια γίνεται η παραπάνω ρύθμιση στις τιμές. Καταρχήν, όσον αφορά τις νέες μειωμένες τιμές, δεν πρέπει να μειωθούν κάτω από το μηδέν και οι νέες αυξημένες τιμές πρέπει να κρατήσουν το αρχικό φορμαλισμό, δηλαδή όλα τα νέα διανύσματα αυξημένων τιμών να συνοψισθούν σε ένα.

Έτσι, η παραπάνω περιγραφή μπορεί να αποδοθεί με ένα μαθηματικό τρόπο που θα αναλυθεί, εν συντομία, παρακάτω.

Η συνάρτηση με την οποία ο «ρυθμιστής» «πράττει» τις όποιες μεταβολές στις τιμές είναι η $T : P \to P$, με T(p) = (T_1(p), T_2(p), … , T_N(p)) να είναι η νέα (ρυθμισμένη) τιμή του αγαθού I.

Η διαδικασία ρύθμισης για την i τιμή αγαθού μπορεί να αναπαρασταθεί με τη σχέση,

$$\mathrm{T}_i(p) \equiv \frac{\max[o, p_i + Z_i(p)]}{\sum_{n=1}^{N} \max[0, p_n + Z_n(p)]} \quad (1.3.1)$$

Ο όρος (p+Z(p)) εκφράζει την αύξηση τιμών στα αγαθά με μεγάλη ζήτηση και τη μείωση τιμών στα αγαθά με μεγάλη προσφορά. Ο όρος max[0, .] εκφράζει τη λογική ότι οι μειωμένες τιμές πρέπει να είναι μη αρνητικές (> 0).

Για να ήμαστε μαθηματικά ακριβείς πρέπει να δείξουμε ότι ο παρανομαστής του κλάσματος T_I(p) είναι διάφορος του μηδενός. Αν το άθροισμα στον παρανομαστή ήταν αρνητικό τότε όλα τα αγαθά θα ήταν σε κατάσταση υπερβολικής προσφοράς το

οποίο είναι αντίθετο με την αρχική μας παραδοχή και το νόμο Warlas (η απόδειξη όσον αφορά το νόμο Warlas παραλείπεται). Η συνάρτηση Z(.) είναι συνεχής, έτσι το άθροισμα συνεχών μη αρνητικών συναρτήσεων παραμένει συνεχείς. Ακολούθως, η συνάρτηση T(p) είναι και αυτή συνεχής.

Σύμφωνα με το θεώρημα (Fixed-Point) του Brouwer, υπάρχει μία τιμή $p^* \in P$ ώστε T(p*) = p*. Ποιοτικά αυτό σημαίνει ότι με την εφαρμογή της παραπάνω παραδοχής, σταματάει κάθε ρύθμιση τιμών μιας και η T εκφράζει τη συνάρτηση «ρύθμισης».

Το επόμενο βήμα είναι να δείξουμε ότι ο «ρυθμιστής» πράττει σωστά άμα επιλέξει την τιμή p*, δηλαδή η τιμή p* ικανοποιεί τις προσδοκίες του «ρυθμιστή» που δεν είναι άλλες από την εύρεση ισορροπίας (S = D).

Για κάθε αγαθό κ, έχουμε $T_K(p^*) = p_k^*$ για όλα τα κ = 1,2,...,N.

Άρα,

$$p_k^* = \frac{\max[o, p_k^* + Z_k(p^*)]}{\sum_{n=1}^{N} \max[0, p_n^* + Z_n(p^*)]} \quad (1.3.2)$$

Από τα παραπάνω προκύπτουν δύο περιπτώσεις:

Κατάσταση 1: άμα ισχύει $p_k^* = 0 = \max[0, p_k^* + Z_k(p^*)]$, τότε έχουμε $p_k^* + Z_k(p^*) = Z_\kappa(p^*)$ και $p_k^* + Z_k(p^*) < 0$. Αυτή είναι η κατάσταση που περιγράφει τα ελεύθερα αγαθά με την αγορά σε ισορροπία.

Κατάσταση 2: ας απλοποιήσουμε λίγο τις εξισώσεις μας κάνοντας την παραδοχή ότι,

$\lambda = \frac{1}{\sum_{N=1}^{N} \max[0, p_n^* + Z_n(p^*)]}$, ώστε να ισχύει $T_k(p^*) = \lambda(p_k^* + Z_n(p^*))$.

Οπότε $p_k^* = \lambda(p_k^* + Z_k(p^*)) > 0$ για όλα τα k με $p_k^* > 0$. Ο συντελεστής λ είναι ο ίδιος για όλα τα k.

Αν εφαρμόσουμε ορισμένους μαθηματικούς φορμαλισμούς στις παραπάνω εξισώσεις σε συνδυασμό με το νόμο Warlas και το θεώρημα Brouwer (Fixed-Point) θα καταλήξουμε στη σχέση

$$\lambda * \sum (Z_\kappa (p^*))^2 = 0 \quad (1.3.3)$$

Από την οποία προκύπτει ότι $Z_k(p^*) = 0$ για όλα τα k για τα οποία ισχύει $p_k^* > 0$.

Το παραπάνω αποτέλεσμα οδηγεί στην απόδειξη ισορροπίας μιας και ενσωματώνει τον παράγοντα p* που είναι όρος γενικής ισορροπίας.

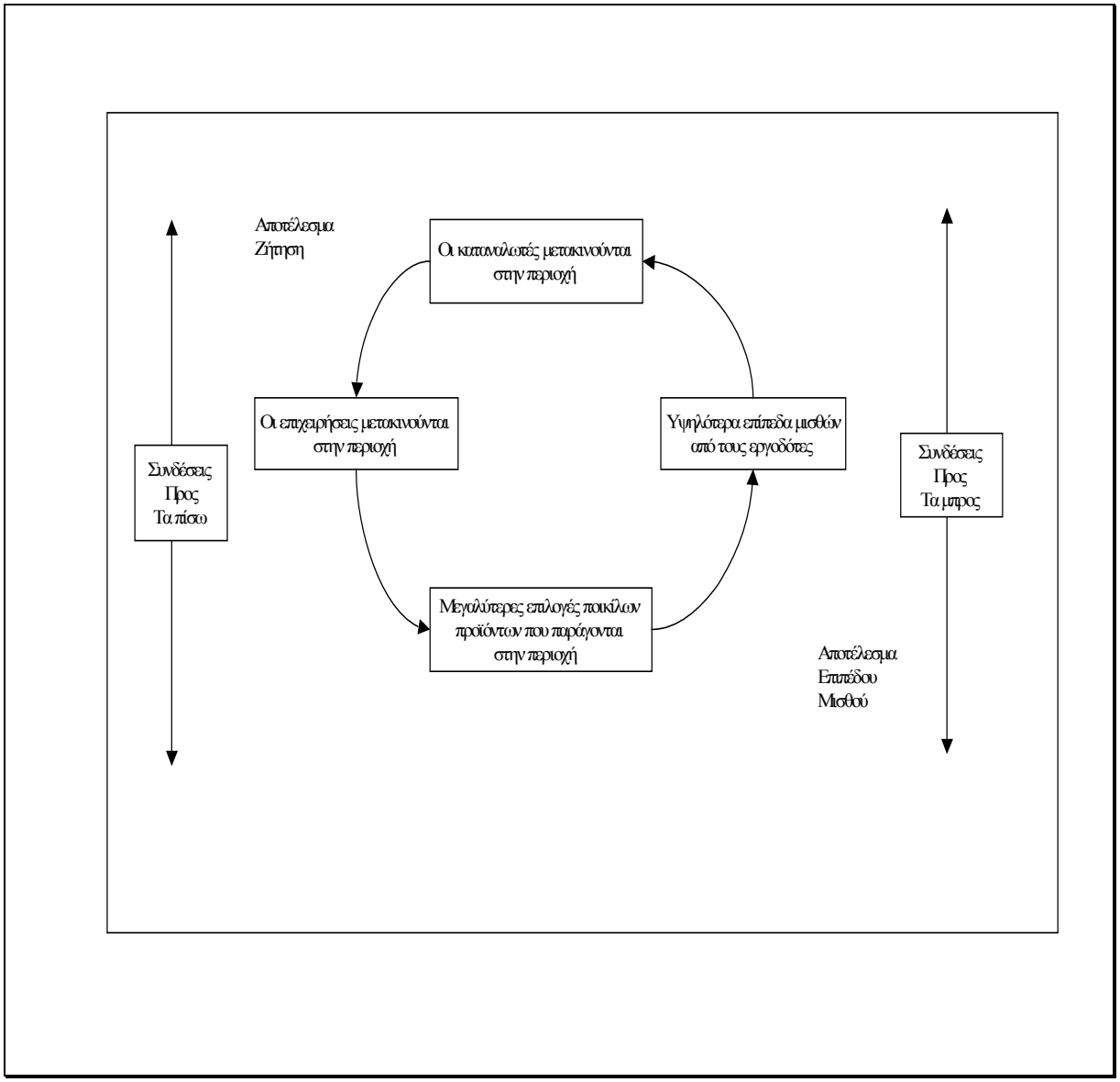
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{Ο}

ΝΕΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΓΕΩΓΡΑΦΙΑ : ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ

Η Νέα Οικονομική Γεωγραφία (ΝΟΓ), ουσιαστικά, εκφράζει μια νέα προσέγγιση των θεωριών περί οικονομιών του χώρου. Η ενότητα αυτή, αρχικά, μας παραπέμπει στις βασικές αρχές της θεωρίας αυτής (έτσι όπως έχει διατυπωθεί από την δουλειά του Krugman, βλέπε Krugman 1991, Fujita, Krugman και Mori 1999, Fujita, Krugman και Venables 1999) και παρουσιάζει με συντομία πως οι οικονομικές συσσωρεύσεις σχηματίζονται και κάτω από ποιες συνθήκες εδραιώνονται. Η θεωρία της ΝΟΓ μπορεί επίσης να μεταφραστεί ως μια σύνθεση μεταξύ των θεωριών ανάπτυξης πόλωσης και των νεοκλασικών μοντέλων.

Τα μοντέλα πόλωσης, βασίζονται σε μια έμφυτη τάση του οικονομικού συστήματος της αγοράς για χωρική ισορροπία. Επίσης, τα εν λόγω μοντέλα, προϋποθέτουν μια διαδικασία ενίσχυσης της αυξανόμενης συγκέντρωσης και της χωρικής αντισορροπίας. Ας φανταστούμε δύο περιοχές Α, Β. Συμβατικά θα λέμε ότι αυτές βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο ανάπτυξης. Ξαφνικά, η περιοχή Α επηρεάζεται από έναν χωροθετικό παράγοντα, ικανό να αλλάξει τις ισορροπίες. Ο παράγοντας αυτός είναι η εγκατάσταση μια εταιρείας. Στις νεοκλασικές θεωρίες αυτό το κενό που δημιουργήθηκε, θα καλυφθεί γρήγορα από εισοδηματική ρύθμιση και από την κίνηση (μεταφορά) δυνάμεων εργασίας. Στη θεωρία πόλωσης, τον ρόλο του «ρυθμιστή» θα παίξουν οι συνδέσεις προς τα εμπρός και προς τα πίσω ώστε να μπορέσει να εξισωθεί η αυξανόμενη απόκλιση από τη χωρική ισορροπία. Στο παράδειγμα μας το αποτέλεσμα θα είναι η μετακίνηση εργατικών δυνάμεων από την περιοχή Β στην περιοχή Α. Έτσι τα πλεονεκτήματα της συσσώρευσης και της αστικοποίησης αθροίζονται, με αποτέλεσμα η περιοχή Α να είναι πιο ελκτική από την Β, έχοντας ως αποτέλεσμα την αύξηση των οικονομικών δραστηριοτήτων στην περιοχή κτλ. Από μια πλευρά η παραγωγή αλλάζει τοποθεσία και στρέφεται προς την περιοχή Α, το

οποίο είναι αποτέλεσμα της αρνητικής επιρροής των συνδέσεων προς τα πίσω. Αν λάβουμε υπόψη μας όλα τα παραπάνω θα οδηγηθούμε σε μία αναπόφευκτη λογική η οποία είναι η αύξηση των τιμών γης στην περιοχή Α (όπως επίσης και τις περιβαλλοντικές συνέπειες σε αυτήν). Σε αυτό το σημείο η νεοκλασική θεωρία με τη θεωρία πόλωσης έρχονται αντιμέτωπες στην ερμηνεία του παραπάνω προβλήματος χωρικής ισορροπίας. Μια διαφορετική προσέγγιση αποτελεί η θεωρία της ΝΟΓ. Μία σχηματική παρουσίαση της βασικής «λογικής» της ΝΟΓ αναπαριστά το παρακάτω διάγραμμα (το οποίο προέρχεται από το M. Fujita και J-F. Thisse 2001).



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 2. 1

Όταν οι καταναλωτές μετακινούνται σε μια περιοχή, φέρνουν μαζί τους επιπτώσεις εξαιτίας της αυξανόμενης ζήτησης. Σαν αποτέλεσμα αυτού, είναι η άθροιση των πλεονεκτημάτων συσσώρευσης στη συγκεκριμένη περιοχή, έτσι ώστε οι επιχειρήσεις να μπορούν να επιτρέψουν την παραγωγή φθηνότερων καταναλωτικών αγαθών εξαιτίας του μηδενικού κόστους μεταφοράς. Έτσι φθηνότερες τιμές σημαίνει αυξανόμενο πραγματικό εισόδημα, το οποίο με τη σειρά του σημαίνει μετανάστευση (μετακίνηση ανθρωπίνου δυναμικού στην εν λόγω περιοχή).

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι ο βασικός «μηχανισμός» του υποδείγματος είναι νεοκλασικός, βασιζόμενος στα παρακάτω σημεία:

- Οι καταναλωτές αντιμάχονται για την μεγιστοποίηση της καμπύλης χρησιμότητας τους.
- Οι εργάτες αντιμάχονται για την μεγιστοποίηση του πραγματικού τους εισοδήματος.
- Οι επιχειρήσεις αντιμάχονται για τη μεγιστοποίηση των κερδών τους.
- Ο εντατικός ανταγωνισμός μειώνει τα κέρδη των εταιριών στο μηδέν.

Το βασικό τμήμα της ΝΟΓ είναι βασισμένο σε μοντέλο μονοπωλιακού ανταγωνισμού, το οποίο έχει τονιστεί και περιγραφεί από τους Dixit-Stiglitz (1977).

Όταν ένα βιομηχανικό αγαθό μεταφέρεται μεταξύ δύο περιοχών, τότε υπεισέρχεται ο παράγοντας – μεταφορικό κόστος και αυτό μας παραπέμπει στη θεωρία του «παγόβουνου» (βλέπε Samuelson 1952, Fujita, Krugman και Venables 1999). Αν μια μονάδα προϊόντος πρόκειται να φθάσει σε μία περιοχή – στόχο, τότε περισσότερο από μία μονάδες προϊόντος πρέπει να σταλούν από την περιοχή – πηγή, μια και θεωρείται ότι η μεταφορά του προϊόντος «κοστίζει» ένα ποσοστό αυτού.

2.1 ΒΑΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΝΟΓ

Στο βασικό μοντέλο της ΝΟΓ υπάρχουν δύο περιοχές και δύο τομείς (βλέπε πχ. Fujita, Krugman και Venables 1999 ή Baldwin, 2003). Ο ένας αντιστοιχεί στην παραγωγή αγροτικών προϊόντων, τα οποία παράγονται με σταθερές αποδόσεις κλίμακας, και ο άλλος αναφέρεται στα βιομηχανικά προϊόντα, τα οποία παράγονται με αυξανόμενες αποδόσεις κλίμακας.

Η χρησιμότητα U των καταναλωτών είναι του τύπου Cobb-Douglas,

$$U = C_M^{\mu} \cdot C_A^{1-\mu}$$

με

C_M, να αναπαριστά την κατανάλωση των βιομηχανικών προϊόντων.

C_A, να αναπαριστά την κατανάλωση των αγροτικών προϊόντων.

μ, να αναπαριστά την ελαστικότητα χρησιμότητας των βιομηχανικών προϊόντων.

1-μ, να αναπαριστά την ελαστικότητα χρησιμότητας των αγροτικών προϊόντων.

Υποθέτουμε ότι μόνο ένα αγροτικό προϊόν παράγεται, σε σχέση με πολλά (διαφοροποιημένα) βιομηχανικά προϊόντα τα οποία παράγονται αντίστοιχα. Αυτό μπορεί να εκφραστεί μέσω της συνάρτησης σταθερής ελαστικότητας υποκατάστασης (constant elasticity of substitution, CES) ως,

$$C_M = \left(\sum_{i=1}^{ncm} cm_i^{\rho} \right)^{1/\rho}$$

με

cm_i, να εκφράζει την κατανάλωση του βιομηχανικού προϊόντος i.

ncm, να εκφράζει το πλήθος των βιομηχανικών προϊόντων.

$$\rho = \frac{\sigma - 1}{\sigma}$$

σ, να εκφράζει την ελαστικότητα μεταξύ βιομηχανικών προϊόντων.

Γενικά το αποτέλεσμα είναι ότι οι καταναλωτές προτιμούν ποικιλία αγαθών. Δοθέντος ενός επιπέδου δαπάνης στα βιομηχανικά προϊόντα, η χρησιμότητα των καταναλωτών αυξάνει όσο αυξάνει και η πληθώρα ποικιλιών των βιομηχανικών αγαθών. Και αυτό γιατί η οριακή χρησιμότητα κάθε βιομηχανικού προϊόντος μειώνεται όσο η καταναλισκόμενη ποσότητα αυτού αυξάνεται.

Παρακάτω θα χρησιμοποιήσουμε παραδείγματα για να είναι πιο κατανοητά τα εκάστοτε συμπεράσματα.

Ας υποθέσουμε πως το εργατικό δυναμικό σε μία περιοχή ορίζεται ίσο με 1. Ας είναι μ, οι προσληφθέντες για την παραγωγή καταναλωτικών αγαθών και 1-μ, οι προσληφθέντες για την παραγωγή αγροτικών αγαθών. Ας πούμε ότι στον αγροτικό τομέα, κάθε μονάδα εργατικού δυναμικού παράγει μια μονάδα αγροτικού προϊόντος.

Έτσι αν ορίσουμε την αγροτική παραγωγή σαν μοναδιαία, τότε η τιμή για αυτήν και το επίπεδο μισθού του συγκεκριμένου τομέα είναι ίσο με 1.

Τα βιομηχανικά προϊόντα παράγονται σε καταστάσεις μονοπωλιακού ανταγωνισμού, αλλά την ίδια στιγμή κάθε εταιρεία παράγει μόνο ένα εξειδικευμένο προϊόν με αυξανόμενες οικονομίες κλίμακας. Για την παραγωγή cm_i μονάδων

βιομηχανικών προϊόντων, χρειάζονται l_i μονάδες εργασίας για όλες τις παραγόμενες ποικιλίες.

Έτσι ικανοποιείται η παρακάτω εξίσωση:

$$\boxed{\omega \cdot l_i = \omega \cdot (F + \beta \cdot cm_i)}$$

με

ω, να εκφράζει το επίπεδο μισθού των βιομηχανικών εργατών.

l_i, να εκφράζει την ποσότητα εργασίας που απαιτείτε στην παραγωγή αγαθού i.

$\omega \cdot F$, να εκφράζει το σταθερό κόστος στην παραγωγή αγαθού i.

$\omega \cdot \beta \cdot cm_i$, να εκφράζει το μεταβαλλόμενο κόστος στην παραγωγή αγαθού i.

Η μεγιστοποίηση των κερδών σε μονοπωλιακό ανταγωνισμό σημαίνει μια αύξηση τιμών στο κόστος παραγωγής, το οποίο εκφράζεται μέσω της σχέσης,

$$\boxed{p = \frac{\omega.\beta}{\rho} = \frac{\omega.\beta.\sigma}{\sigma - 1}}$$

Η τιμή ρ, αυξάνει με την αύξηση του μεταβαλλόμενου κόστους ανά μονάδα και μειώνεται όταν ο παράγοντας σ, αυξάνει. Αυτό σημαίνει ότι είναι πιο εύκολο στον καταναλωτή να επιλέξει μεταξύ άλλων βιομηχανικών αγαθών.

Εξαιτίας του υψηλού συναγωνισμού η εταιρία παραγωγής μόλις και καλύπτει τα έξοδα της, που σημαίνει ότι το κέρδος G_i είναι μηδέν.

$$G_i = p.\mathrm{cm_i} - \omega.(\mathrm{F} + \beta.\mathrm{cm_i}) = 0$$

Λύνοντας την παραπάνω σχέση ως προς $\mathrm{cm_i}$, έχουμε σαν αποτέλεσμα της ισορροπίας παραγωγής,

$$cm_i = \frac{F(\sigma - 1)}{\beta}$$

Επίσης η ποσότητα ισορροπίας της εργασίας εκφράζετε μέσω της σχέσης ,

$$l_i = F + \beta.\mathrm{cm_i} = F + \beta.\left[\frac{\mathrm{F}.(\sigma - 1)}{\beta}\right] = \mathrm{F}.\sigma$$

Έτσι αν μ, είναι οι μονάδες των εργατών που απασχολούνται σε βιομηχανίες, τότε η ποσότητα των εταιρειών παραγωγής δίνεται από τη σχέση,

$$ncm = \frac{\mu}{\mathrm{l_i}} = \frac{\mu}{\mathrm{F}.\sigma}$$

Για να απλοποιήσουμε λίγο τα πράγματα χωρίς όμως να χάσουμε την ουσία αυτών, αντικαθιστούμε στις παραπάνω σχέσεις τις ακόλουθες ισότητες.

$$\beta = \frac{\sigma - 1}{\sigma},$$

$$F = \frac{\mu}{\sigma}$$

Και τελικά παίρνουμε τους παρακάτω μετασχηματισμούς,

$$\boxed{\begin{aligned} cm_i &= \mu, \\ p &= \omega, \\ ncm &= 1 \end{aligned}}$$

Ο δείκτης τιμών για τα βιομηχανικά προϊόντα δίνεται από τη σχέση p=ω, ενώ για τα αγροτικά προϊόντα δίνεται από τη σχέση $P=\omega^{\mu}$

Τώρα απομένει να λύσουμε (να εκφράσουμε μαθηματικά) το επίπεδο ισορροπίας μισθού. Αυτό είναι το επίπεδο μισθού το οποίο συνδέει την ζήτηση με την προσφορά για τα βιομηχανικά προϊόντα. Η ζήτηση μπορεί να υπολογιστεί από το γινόμενο (μ*y), όπου y είναι,

$$\boxed{y = \omega \cdot \mu + 1 \cdot (1 - \mu)},$$

με

$\omega \cdot \mu$, να αναπαριστά το εισόδημα στον κατασκευαστικό τομέα.

$1 \cdot (1 - \mu)$, να αναπαριστά το εισόδημα στον αγροτικό τομέα.

Η ισότητα μεταξύ προσφοράς και ζήτησης για τα βιομηχανικά προϊόντα μπορεί να εκφραστεί με την παρακάτω σχέση:

$\mu = \mu.[\omega.\mu + 1.(1-\mu)]$, με ω=1.

Το παραπάνω μοντέλο ισορροπίας υποθέτει τη ύπαρξη μιας περιοχής (πχ. περιφέρειας). Το υπόδειγμα αυτό γίνεται πιο ρεαλιστικό αν υποθέσουμε την ύπαρξη δύο περιφερειών.

Το βασικό μοντέλο της ΝΟΓ έδειξε ότι δοθέντος δύο περιοχών οι οποίες έχουν ακριβώς ίδιες συνθήκες εγκατάστασης, τότε μπορούν εκεί να λάβουν χώρα διαδικασίες συσσώρευσης και αποσυσσώρευσης. Επίσης το εν λόγω μοντέλο επιτρέπει δύο καταστάσεις. Είτε η βιομηχανική παραγωγή να συγκεντρώνεται σε μια από τις δύο περιοχές είτε να διαμοιράζεται μεταξύ αυτών. Πρέπει να σημειωθεί ότι η «περιοχή» ανάλυσης μπορεί να έχει περισσότερες από μία περιφέρειες, οι οποίες να συνδέονται μεταξύ τους μέσω μίας ιεραρχικής σχέσης (για μια πιο λεπτομερή περιγραφή βλέπε Brakman κα. 2001).

2.2 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΔΙΑΧΥΣΗΣ (SPILLOVER EFFECTS)

Μεταξύ του επιπέδου παραγωγής στις περιοχές Α, Β υπάρχει μια σχέση η οποία πρέπει να είναι θετική $\left(\frac{dy_A}{dy_B} \succ 0\right)$ ή αρνητική $\left(\frac{dy_A}{dy_B} \prec 0\right)$. Δεδομένου ότι τα εξωτερικά παραγόμενα χρηματικής φύσης καθορίζονται από την χρηματιστηριακή αγορά, το συγκεκριμένο μοντέλο δεν έχει τέτοιου είδους προεκτάσεις και έτσι μεταφράζεται σε εξωτερικότητες (externalities) τεχνολογικής φύσης.

Τα αποτελέσματα διάχυσης (spillovers) τείνουν να ορίζουν εξισώσεις για το επίπεδο παραγωγής και στις δύο περιοχές. Οι εν λόγω εξισώσεις είναι,

$$y_A = \left(\lambda_A .\mu.\omega_A + \frac{1+\mu}{2} \right) + \theta.y_B$$
$$y_B = \left[(1-\lambda_A).\mu.\omega_B + \frac{1+\mu}{2} \right] + \theta.y_A$$

όπου θ, είναι η συνιστώσα spillover. Για θ = 0, προκύπτει ότι τα αποτελέσματα διάχυσης δεν εμφανίζονται.

2.3 ΜΗ ΜΕΤΑΚΙΝΟΥΜΕΝΑ ΑΓΑΘΑ ΚΑΙ ΥΠΗΡΕΣΙΕΣ

Στο βασικό μοντέλο της ΝΟΓ υπάρχει μόνο ο βιομηχανικός και ο αγροτικός τομέας. Δεν υπάρχουν υπηρεσίες. Ας υποθέσουμε πως εισάγουμε στο μοντέλο της ΝΟΓ υπηρεσίες οι οποίες έχουν και ιδιωτικό και δημόσιο χαρακτήρα.
Αν σημειώσουμε τις υπηρεσίες με C_D, τότε η εξίσωση χρησιμότητας του καταναλωτή μετασχηματίζεται ως,

$$U = C_M^{\mu} \cdot C_A^{1-\mu-\gamma} \cdot C_D^{\gamma}$$

Αν θέσουμε ξανά το σύνολο του εργατικού δυναμικού ίσο με τη μονάδα τότε η σχέση,

$$\mu(1-\mu-\gamma,\gamma)$$

θα εκφράζει τη συνολική εργασία στον κατασκευαστικό τομέα (κατασκευαστικός τομέας = γεωργία + τομέας υπηρεσιών).

Έτσι η πρόσληψη του εργατικού δυναμικού, στον τομέα υπηρεσιών, θα εξαρτάται άμεσα από την πρόσληψη εργατικού δυναμικού από τους δύο άλλους τομείς. Αυτό εκφράζεται μαθηματικά με τις παρακάτω σχέσεις.

$$\left[\mu + (1 - \mu - \gamma)\right] \cdot (1 + z) = 1$$
$$(1 - \gamma) \cdot (1 + z) = 1$$
$$\text{με } z = \frac{\gamma}{1 - \gamma}$$

Ο παράγοντας z, αναπαριστά τον αριθμό των προσληφθέντων στον τομέα υπηρεσιών όπου αυτό ορίζεται απευθείας από τους προσληφθέντες του αγροτικού και βιομηχανικού τομέα.

Με τα παραπάνω έχουμε ορίσει το εργατικό δυναμικό μέσω των βασικών σημείων της θεωρίας της ΝΟΓ.

Επίσης μπορούμε να ορίσουμε, μαθηματικά, την κινητικότητα του εργατικού δυναμικού μιας και είναι πολύ χρήσιμο για την ερμηνεία φαινόμενων και θεωρητικών προεκτάσεων που προκύπτουν άμεσα από τη ΝΟΓ.

Έτσι η κινητικότητα του εργατικού δυναμικού, μεταξύ δύο περιοχών A, B, είναι μια εκθετική συνάρτηση της μορφής,

$$\lambda = 1 - \frac{e^{(r\omega_A = r\omega_B) \cdot (-c100)}}{2},$$

με το e, να είναι η σταθερά Euler.

2.4 ΕΞΩΤΕΡΙΚΕΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΕΣ ΚΛΙΜΑΚΑΣ

Μοντέλα που περιέχουν εξωτερικές οικονομίες (externalities) περιγράφουν χωρικές ισορροπίες κάτω υπό την επίδραση αλληλεπιδράσεων μεταξύ νοικοκυριών και επιχειρήσεων (για περισσότερη ανάλυση και τεκμηρίωση, βλ. Huriot & Thisse 2000). Αυτά τα υποδείγματα βρίσκουν πλήρη εφαρμογή στις θεωρίες σχηματισμού πόλεων και γενικά σε θεωρίες αστικού σχεδιασμού. Έτσι η κεντρική ιδέα πίσω από το σχηματισμό πόλεων έχει πολύ εύστοχα διατυπωθεί από τον Lucas (1988): «*Τι κάνει τους ανθρώπους να πληρώνουν υψηλά ενοίκια σε περιοχές όπως το Manhattan και η πόλη του Chicago, αν δεν βρίσκονται μαζί με άλλους ανθρώπους;*». Η χρησιμότητα των νοικοκυριών έχει υποτεθεί ότι εξαρτάται από το μέσο όρο της απόστασης από όλα τα άλλα νοικοκυριά στην πόλη και από την περιοχή που καταλαμβάνει η αγορά.

Σε κατάσταση ισορροπίας, η καμπύλη που εκφράζει τις ενέργειες στην πόλη, έχει σχήμα καμπάνας σε όρους πληθυσμιακής κατανομής και η οποία υποστηρίζεται από μια καμπύλη ενοικίου ιδίου σχήματος. Μελετώντας τη συμπεριφορά των επιχειρήσεων αντιλαμβανόμαστε ότι οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ τους μπορούν να δημιουργήσουν συσσωρεύσεις, όπου λόγος για αυτές έχει γίνει παραπάνω.

Σε αυτό το σημείο ήμαστε σε θέση να προχωρήσουμε τόσο σε βασικές όσο και σε περιπλοκές εφαρμογές όσον αφορά τον αστικό σχεδιασμό, συμπεριλαμβανομένων και τις βασικές αρχές της ΝΟΓ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{Ο}

ΟΙΚΟΝΟΜΙΕΣ ΣΥΣΣΩΡΕΥΣΗΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΑΣΤΙΚΟ ΧΩΡΟ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

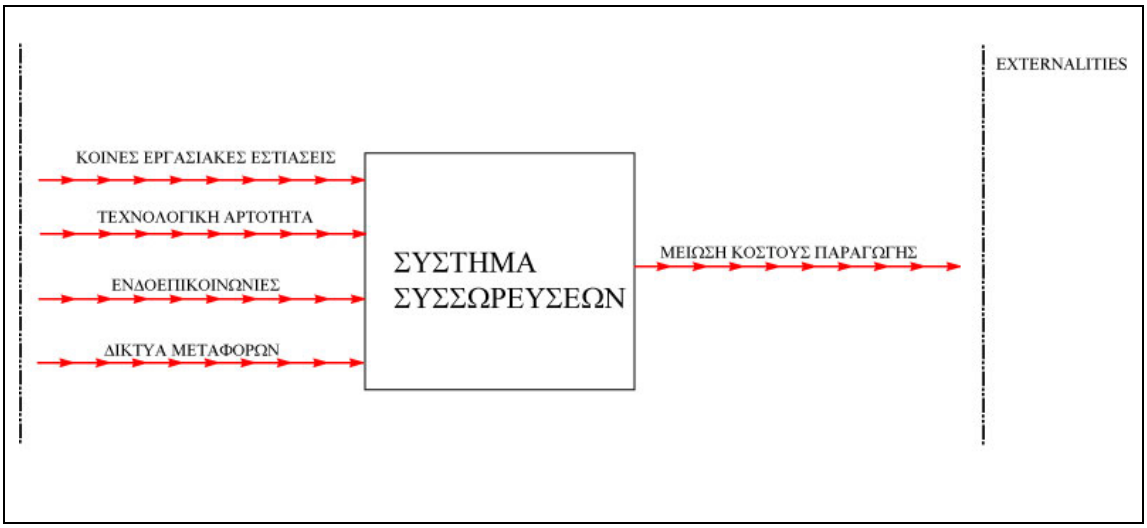
Οι οικονομίες συσσώρευσης και οι δημόσιες υποδομές, παίζουν κύριο ρόλο στις θεωρίες για τον αστικό οικονομικό χώρο. Η ύπαρξη των πόλεων, σε ένα επίπεδο, μπορεί να ερμηνευτεί από τις *εσωτερικές οικονομίες κλίμακας* στην παραγωγή σε επίπεδο επιχείρησης (βλέπε για παράδειγμα, O'Sullivan 2003) και από τις *εξωτερικές οικονομίες κλίμακας* που δημιουργούνται από τα «κέρδη» που έχει μία επιχείρηση από την δραστηριότητα άλλων επιχειρήσεων. Οι εξωτερικές οικονομίες κλίμακας είναι ιδιαίτερα σημαντικές, μια και η μεγάλη κλίμακα επιχειρήσεων έλκει εργατικό δυναμικό το οποίο με τη σειρά του, εγκαθίσταται και εδραιώνει μικρές κοινωνίες κοντά στις βιομηχανικές εγκαταστάσεις με σκοπό τη μείωση του «επικοινωνιακού»[3] κόστους. Οι οικονομίες συσσώρευσης ερμηνεύουν το επόμενο βήμα της αστικής ανάπτυξης: πώς οι «επιχειρησιακές πόλεις»[4] μπορούν να αναπτυχθούν περαιτέρω εντός μεγάλων βιομηχανικών κέντρων. Έτσι μπορούμε να πούμε ότι οι ανόμοιες επιχειρήσεις και τα νοικοκυριά δημιουργούν θετικές εξωτερικές οικονομίες (positive externalities) οι οποίες μειώνουν το κόστος παραγωγής σαν παραγόμενο άλλων

[3] Με την έννοια «επικοινωνιακό» αναφερόμαστε στο κύριο χαρακτηριστικό της θεωρίας την ΝΟΓ, όπου επιχειρήσεις, εργατικό δυναμικό, οργανισμοί κτλ εκμεταλλεύονται τις οικονομίες συγκέντρωσης μόνο για λόγους επικοινωνιακούς – ανταλλαγής πληροφοριών.

[4] Με την εφαρμογή του όρου «επιχειρησιακή πόλη», εξετάζουμε τις πόλεις από μία καθαρά επιχειρηματική σκοπιά και μόνο. Είναι η αντίστοιχη οπτική γωνία του CBD (Central Business District).

επιχειρησιακών αυξήσεων. Το αποτέλεσμα των θετικών εξωτερικών οικονομιών από τις επιχειρηματικές δράσεις φέρει ως εισροές στο όλο σύστημα, κοινές εστιάσεις των εργαζομένων, τεχνολογική αρτιότητα, ενδοεπικοινωνίες και δίκτυα μεταφορών.

Οι αστικές δημόσιες υποδομές είναι ένας παράγοντας εισροών, ο οποίος επηρεάζει άμεσα τις λειτουργίες των πόλεων, ειδικά των μεγάλων πόλεων, και προάγει την πραγμάτωση των οικονομιών συσσώρευσης. Τα παραπάνω μπορούν να συμπτυχθούν σχηματικά στο ακόλουθο διάγραμμα.



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 3.2

3.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Η παραδοσιακή οικονομική ανάλυση του χώρου ταξινομεί τις θεωρίες περί οικονομιών συσσώρευσης σε τρεις κατηγορίες:

1. εσωτερικές οικονομίες κλίμακας
2. οικονομίες, οι οποίες είναι εξωτερικές όσων αφορά τις επιχειρήσεις αλλά εσωτερικές όσων αφορά τους κλάδους παραγωγής.

3. οικονομίες που είναι εξωτερικές και στις επιχειρήσεις και στους κλάδους παραγωγής.

Η δεύτερη κατηγορία των οικονομιών συσσώρευσης, είναι αυτή των «οικονομιών συσπείρωσης» (localization economies), και η τρίτη κατηγορία αυτή των «οικονομιών αστικοποίησης» (urbanization economies)[5]. Μαζί η δεύτερη και η τρίτη κατηγορία αναφέρονται με τον όρο «οικονομίες συγκέντρωσης». Όλες αυτές οι κατηγορίες οικονομιών κλίμακας είναι τόσο σημαντικές για την οικονομική ανάλυση του χώρου, ώστε αξίζει τον κόπο να τις αναλύσουμε περισσότερο.

Εσωτερικές οικονομίες κλίμακας

Οι εσωτερικές οικονομίες κλίμακας προκύπτουν από την εσωτερική οργάνωση των επιχειρήσεων και ισχύει ότι όσο αυξάνεται η κλίμακα παραγωγής τόσο μειώνεται το μοναδιαίο κόστος της επιχείρησης.

Στις εν λόγω οικονομίες ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

- Η πρώτη σχέση σχετίζεται με την έννοια της «αδιαιρετότητας». Πρόκειται για τις δαπάνες ορισμένων λειτουργιών της επιχείρησης, οι οποίες δεν μπορούν να μειωθούν πέρα από ένα συγκεκριμένο όριο ανεξάρτητα από τον όγκο παραγωγής.
- Όσο μεγαλώνει η κλίμακα παραγωγής, γίνεται καλύτερη αξιοποίηση του εργατικού δυναμικού και του μηχανικού εξοπλισμού.
- Όσο αυξάνεται ο όγκος παραγωγής, η επιχείρηση εκμεταλλεύεται καλλίτερα τις συνδέσεις προς τα εμπρός και προς τα πίσω.

[5] Οι οικονομίες συσπείρωσης αναφέρονται στα ελληνικά και με τον εναλλακτικό όρο «οικονομίες εντοπισμού». Για τις οικονομίες αστικοποίησης χρησιμοποιείται εναλλακτικά ο όρος «αστικές οικονομίες».

Οικονομίες συσπείρωσης

Οι οικονομίες συσπείρωσης προκύπτουν όταν το μοναδιαίο κόστος της επιχείρησης είναι κατώτερο σε μία αστική περιοχή η οποία περιλαμβάνει μεγάλο αριθμό επιχειρήσεων του ιδίου κλάδου δραστηριότητας. Η οικονομία κλίμακας, σε αυτή την περίπτωση, είναι εξωτερική ως προς την επιχείρηση αλλά εσωτερική ως προς τον κλάδο δραστηριότητας.

Οι οικονομίες συσπείρωσης και οι εσωτερικές οικονομίες κλίμακας μπορούν να διαφέρουν, όπως επισήμανε ο Marshall (1890) παρουσιάζοντας την κλασσική όψη της θεωρίας περί οικονομιών συσπείρωσης.

Σε αυτήν την εισήγηση του Marshall γίνεται καθαρή αναφορά για τις οικονομίες «εργασίας-αγοράς» και για τις οικονομίες «ανταλλαγής πληροφοριών».

Οι οικονομίες «εργασίας-αγοράς» είναι ένα υποκεφάλαιο των οικονομιών συσπείρωσης. Ως παράδειγμα μπορεί να αναφερθεί η βιομηχανία πληροφορικής στο Silicon Valley (Santa Clara Country, California). Οι επιχειρήσεις λογισμικού στο Silicon Valley, είναι αρκετά μικρές τονίζοντας την απουσία εσωτερικών οικονομιών κλίμακας. Τα κόστη εκκίνησης είναι μικρά, αλλά το ρίσκο μεγάλο. Οι επιχειρήσεις συχνά αποτυγχάνουν και οι εργαζόμενοι σε αυτές αναζητούν εργασία κάπου αλλού.

Έτσι όταν η απασχόληση συγκεντρώνεται σε μία περιοχή, οι επιχειρήσεις μπορούν εύκολα να βρουν το εξειδικευμένο προσωπικό που χρειάζονται και οι εργαζόμενοι να βρουν εύκολα εργασία, ύστερα από μία πιθανή αποτυχία της επιχείρησης. Το συνολικό κόστος είναι μικρότερο όταν οι επιχειρήσεις, ιδίου κλάδου δραστηριότητας, συγκεντρώνονται σε μία περιοχή.

Στις οικονομίες «ανταλλαγής πληροφοριών», οι επιχειρήσεις εγκαθίσταντο κοντά η μία στην άλλη με σκοπό τη μείωση του κόστους αποκτώντας χρήσιμες πληροφορίες.

Ένας σημαντικός ρόλος των εν λόγω οικονομιών είναι η αύξηση του επιπέδου τεχνολογικής καινοτομίας στις αστικές περιοχές.

Οικονομίες αστικοποίησης

Οι οικονομίες αστικοποίησης προκύπτουν όταν οι οικονομίες κλίμακας είναι εξωτερικές και ως προς τις επιχειρήσεις και ως προς τους κλάδους παραγωγής. Έτσι επιχειρήσεις βρίσκουν κερδοφόρο να εγκατασταθούν σε μία αστική περιοχή ανεξάρτητα από τα οφέλη, όσον αφορά το κόστος, της γεωγραφικής συγκέντρωσης κλάδων δραστηριότητας σε αυτήν (αστική περιοχή). Ένας παράγοντας που δημιουργεί οικονομίες αστικοποίησης είναι οι δημόσιες υποδομές. Με το να παρέχεται καλής ποιότητας οδικό δίκτυο, δημόσια οφέλη, επικοινωνιακές δραστηριότητες κ.α, μια αστική περιοχή μειώνει το κόστος όλων των επιχειρήσεων που δρουν εντός αυτής της περιοχής. Ένα παράδειγμα οικονομιών συσπείρωσης είναι το εξής. Μια αστική περιοχή που βρίσκεται κοντά σε μία φθηνή πηγή ενέργειας μπορεί να θέλξει επιχειρήσεις όπου είναι παθητικές σε πηγές ενέργειας, δηλαδή η ενέργεια αποτελεί γι'αυτές τις συνδέσεις προς τα πίσω.

3.2 ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΑΣΤΙΚΩΝ ΠΕΡΙΟΧΩΝ

Το πρώτο μοντέλο γενικής ισορροπίας στην αστική οικονομία παρουσιάστηκε από τον Mills (1967). Το υπόδειγμα αυτό μοντελοποιεί μια αστική περιοχή στην οποία λαμβάνουν χώρα τρεις δραστηριότητες: (1) η παραγωγή ενός εξαγόμενου προϊόντος, (2) οι μεταφορές, οι οποίες χρησιμοποιούν «δαπανηρή» γη για να μεταφέρουν τους εργάτες στο κέντρο της πόλης, και (3) τα κτίσματα που προοριζόμενα για στέγαση, τα οποία κατασκευάζονται υπό συνθήκες κλίμακας

σταθερής απόδοσης. Για τις ανάγκες της παρούσας εργασίας, η πιο σημαντική δραστηριότητα είναι η πρώτη, η οποία και αναλύεται παρακάτω.

Το εξαγόμενο προϊόν αναπαρίστανται με X, το οποίο παράγεται από το συνδυασμό γης L, εργασίας N και κεφαλαίου K, σύμφωνα με την εξίσωση παραγωγής των Cobb-Douglas:

$$\boxed{X = AL^{\alpha} N^{\beta} K^{\gamma}} \quad (3.2.1)$$

Ο βαθμός των οικονομιών κλίμακας εξαρτάται από την σχέση,

$$\boxed{H = \alpha + \beta + \gamma}$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, σταθερές αποδόσεις κλίμακας έχουμε όταν ισχύει $H = 1$ και αυξανόμενες αποδόσεις κλίμακας έχουμε όταν ισχύει $H > 1$.

Το μειονέκτημα στην θεώρηση του Mills είναι ότι έχει αφήσει αδιευκρίνιστο το θέμα της οικονομίας κλίμακας και το πώς αυτή συμβάλει στην παραπάνω ανάλυση.

Σύμφωνα με ποιο πρόσφατες έρευνες, οι οποίες στηρίζονται κατά βάση στο μοντέλο του Mills, για παράδειγμα το μοντέλο Sullivan (1983), έχει αναπτυχθεί ένα μοντέλο γενικής ισορροπίας πάνω στις αστικές οικονομίες το οποίο παρέχει λεπτομερή ανάλυση της παραγωγής του εξαγόμενου προϊόντος. Υποθέτει ότι η παραγωγή του εξαγωγικού τομέα δίνεται από την ακόλουθη σχέση,

$$\boxed{C = C(P_K, P_L(u), P_T(u)) * \varphi(Z) \quad , \quad \varphi(Z) = (Z_0 / Z)^g} \quad (3.2.2)$$

Όπου P_K = τιμή του κεφαλαίου,

u = απόσταση από το κέντρο της πόλης,

$P_L(u)$ = η τιμή της εργασίας,

$P_T(u)$ = η τιμή γης,

$\varphi(Z)$ = η συνάρτηση της οικονομίας κλίμακας,

Z_0 = μια σταθερή παράμετρος,

Z = συνολικό εξαγόμενο προϊόν, και

g = ο βαθμός των αυξανόμενων αποδόσεων.

Αν g = 0, τότε ο εξαγωγικός τομέας χαρακτηρίζεται από σταθερές αποδόσεις κλίμακας. Αν ο παράγοντας g, γίνει μεγαλύτερος του μηδενός (g > 0) τότε αυτό φανερώνει την ύπαρξη αυξανόμενων αποδόσεων κλίμακας. Με άλλα λόγια, η ύπαρξη μεγάλου αριθμού επιχειρήσεων εντός της πόλης και η συνάρτηση οικονομιών κλίμακας εξαρτώνται από τη συνολική εξαγόμενη ποσότητα της βιομηχανίας, και έτσι οι οικονομίες συγκέντρωσης ταυτίζονται με τις οικονομίες συσπείρωσης.

ΑΥΞΑΝΟΜΕΝΕΣ ΑΠΟΔΟΣΕΙΣ ΚΛΙΜΑΚΑΣ

(ΕΣΩΤΕΡΙΚΕΣ ΚΑΙ ΕΞΩΤΕΡΙΚΕΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΕΣ ΚΛΙΜΑΚΑΣ).

Ο όρος «οικονομίες κλίμακας» ή «αυξανόμενες αποδόσεις κλίμακας», αναφέρεται σε μία κατάσταση όπου μία αύξηση του επιπέδου παραγωγής υποδηλώνει την μείωση του μέσου κόστους ανά μονάδα εξαγόμενου προϊόντος της επιχείρησης.

Με τις εσωτερικές οικονομίες κλίμακας η μείωση του μέσου κόστους προκαλείται από την αύξηση του επιπέδου παραγωγής της επιχείρησης. Η δομή της αγοράς για να υποστηρίξει τις εσωτερικές οικονομίες κλίμακας, πρέπει να βρίσκεται

απαραιτήτως σε κατάσταση ατελούς ανταγωνισμού. Με τις εξωτερικές οικονομίες κλίμακας, η μείωση μέσου κόστους προκύπτει απευθείας από την αύξηση του επιπέδου παραγωγής της επιχείρησης (που οφείλεται στο εξωτερικό περιβάλλον της επιχείρησης) και αυτό, γενικά, εκφράζεται από μία συναρτησιακή σχέση μεταξύ του εξαγόμενου προϊόντος της επιχείρησης και του κόστους αγοράς.

Επιπλέον ο Scitovsky μίλησε για ένα διαχωρισμό των εξωτερικών οικονομιών κλίμακας, σε *καθαρές (τεχνολογικές)* εξωτερικές οικονομίες και σε *χρηματικές* εξωτερικές οικονομίες.

Οι *τεχνολογικές* εξωτερικές οικονομίες, φανερώνουν την τεχνολογική σχέση μεταξύ των εισροών και εκροών μιας επιχείρησης.

Οι *χρηματικές* εξωτερικές οικονομίες, μεταδίδονται από την αγορά μέσω των επιδράσεων των τιμών για κάθε επιχείρηση, γεγονός το οποίο μπορεί να επηρεάσει τις αποφάσεις αυτής (επιχείρησης) όσον αφορά τις εκροές της.

Εν κατακλείδι, οι θεωρίες περί εξωτερικών οικονομιών και αποτελεσμάτων διάχυσης (spillovers) είναι μείζονος σημασίας όσον αφορά τις εξωτερικές οικονομίες κλίμακας. Το κεφάλαιο των αποτελεσμάτων διάχυσης (spillovers) αναφαίρετε στις (*τεχνολογικές*) εξωτερικές οικονομίες, ενώ οι *χρηματικές* εξωτερικές οικονομίες μπορούν να αναφερθούν σαν περίπτωση αλληλεξάρτησης των αγορών.

Το μοντέλο του Mills αντιπροσωπεύει μία μόνο πόλη. Ο Henderson δημιούργησε ένα μοντέλο πόλεων, κάθε μία από τις οποίες ειδικευόταν σε ένα είδος εξαγόμενων αγαθών των οικονομιών συσπείρωσης. Το εξαγόμενο αγαθό παραγόταν από εργασία και κεφάλαιο. Η συνάρτηση παραγωγής είναι η ακόλουθη:

$$X = Ag(N)\hat{N}_0^{\alpha}\hat{K}_0^{1-\alpha} \quad (3.2.3)$$

Όπου,

Α, α: εκφράζουν σταθερές παραμέτρους,

Χ: εκφράζει το εξαγόμενο προϊόν,

$\hat{N}_0$: εκφράζει την εργασία,

$\hat{K}_0$: εκφράζει το κεφάλαιο, και

Ν: εκφράζει τον αριθμό των πόλεων.

Βασικό ρόλο στο εν λόγω μοντέλο παίζουν οι δημόσιες υποδομές, οι οποίες μειώνουν το χρόνο μεταφοράς για έναν ακριβή αριθμό οικιστικών μονάδων, ελευθερώνοντας έτσι τον παράγοντα «εργασία» στη συνάρτηση των νοικοκυριών. Αυτό με τη σειρά του μειώνει την τιμή στέγασης και επιτρέπει στις επιχειρήσεις να πληρώνουν μικρότερους μισθούς. Με αυτό τον τρόπο, οι δημόσιες επενδύσεις στην τεχνολογία μεταφορών «υποστηρίζουν» την ανάπτυξη. Εστιάζοντας μόνο στις επενδύσεις μεταφορών, το υπό εξέταση μοντέλο δεν λαμβάνει υπόψη τον άμεσο ρόλο των δημόσιων υποδομών στο θέμα της μείωσης του κόστους των επιχειρήσεων. Έτσι το μοντέλο αυτό καταλήγει σε μία αναλογία. Σε ένα δοθέν επίπεδο τοπικής οικονομίας, μια αύξηση της ζήτησης σε ένα βιομηχανικό προϊόν οδηγεί σε αύξηση του αριθμού των πόλεων[6] οι οποίες ειδικεύονται στην συγκεκριμένη βιομηχανία. Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να οδηγηθούμε σε ένα δίκτυο πόλεων στα πλαίσια του υποδείγματος του Henderson.

Το να δίνεται έμφαση στις οικονομίες συσπείρωσης, έχει σημαντικές εφαρμογές. Πρώτον, ερμηνεύει το γιατί όλες οι παραγωγικές διαδικασίες δεν εγκαθίστανται σε ένα μικρό αριθμό μεγάλων πόλεων, όπως αναφέρεται στα μοντέλα αστικών οικονομιών. Δεύτερον, η ισορροπία σε ένα σύστημα πόλεων περιλαμβάνει διάφορα μεγέθη πόλεων, όπου οι μισθοί και το κόστος ζωής αυξάνονται με το

[6] Σε αυτό το σημείο η έννοια «πόλης» δίδεται με την ερμηνεία του επιχειρηματικού κέντρου (CBD). Για μια ανάλυση της έννοιας αυτής βλέπε, πχ. O'Sullivan 2003.

μέγεθος της πόλης. Εν τέλει, συσχετίζει την συνάρτηση παραγωγής σε μία αστική περιοχή με το είδος της βιομηχανίας.

Εν συνεχεία θα σχολιάσουμε και θα αναλύσουμε ένα μοντέλο αστικής ανάπτυξης το οποίο πλησιάζει στην φιλοσοφία της Νέας Οικονομικής Γεωγραφίας. Το εν λόγω μοντέλο είναι αυτό του Helsley (1990).

Ο Helsley (1990) δημιούργησε ένα μοντέλο όπου ερμήνευε τον ρόλο των πόλεων μέσα σε ένα πλαίσιο διάδοσης πληροφοριών. Σύμφωνα με αυτό μέσα σε μία πόλη απλής γραμμικής επέκτασης, κάθε επιχείρηση παρήγαγε ένα «απλό» προϊόν (q) με βάση μιας συνάρτησης παραγωγής η οποία περιλάμβανε ένα παράγοντα που σχετίζονταν με το επίπεδο γνώσης. Έτσι η συνάρτηση παραγωγής έχει την παρακάτω μορφή:

$$\boxed{q(u) = q[\alpha(u)]f[l(u), n(u)]} \quad (3.2.4)$$

Όπου,

u: εκφράζει την απόσταση από το κέντρο της πόλης,

l(u): εκφράζει τον παράγοντα γη,

n(u): εκφράζει μία εκροή του συστήματος, η οποία έχει μη γεωγραφικό χαρακτήρα,

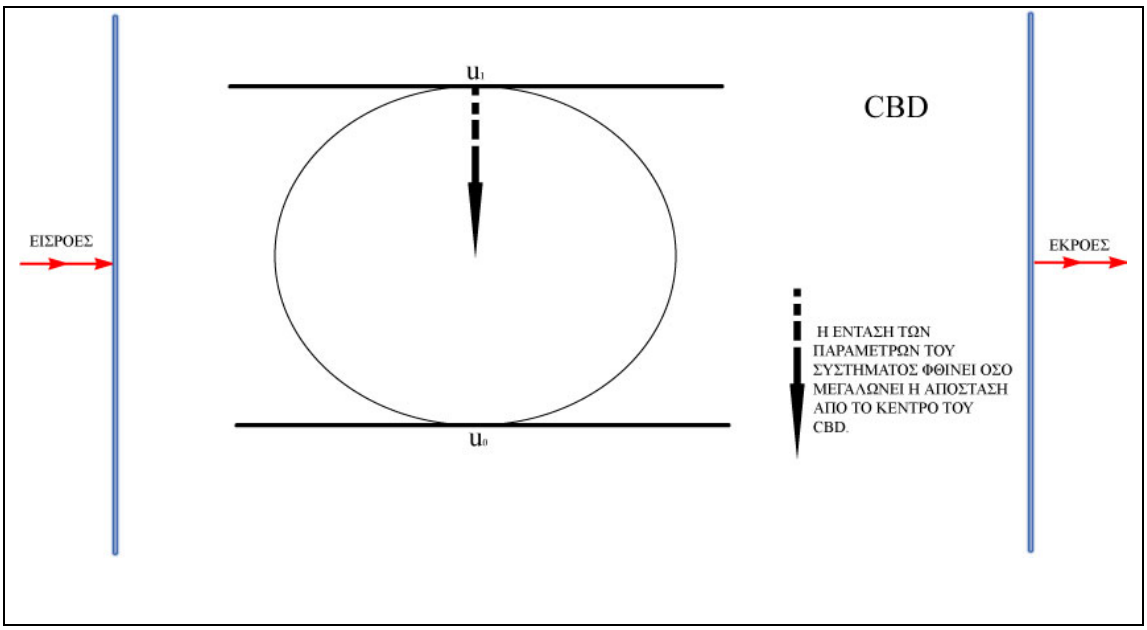
και

α(u): εκφράζει το επίπεδο γνώσης στην περιοχή u.

Έτσι κάθε επιχείρηση παράγει γνώση σαν μία δεύτερης κλάσης παραγωγή από αυτή το q. Οπότε η σχέση παραγωγής γνώσης και προϊόντος είναι αναλογική και εκφράζεται μαθηματικά σύμφωνα με τη σχέση,

$x(u) = \beta q(u)$, με $\beta>0$. (3.2.5)

Ο παράγοντας γνώση αντιμετωπίζεται σαν μία δημόσια εισροή, στο εν λόγω μοντέλο, η οποία φθίνει με την απόσταση σύμφωνα με μία συνάρτηση $\gamma(z,u)$, η οποία αναπαριστά το τμήμα της $x(u)$ που παραμένει στην περιοχή z. Η συνάρτηση $\gamma(z,u)$ έχει μέγιστο όριο στο σημείο z = u, όπου και γίνεται ίση με τη μονάδα ($\gamma(u,u)=1$). Το επίπεδο της γνώσης στην τοποθεσία u δίνεται από τη σχέση, $\alpha(u)=\int_{u_0}^{u_1}\gamma(u,z)x(z)dz$, με τα u_0, u_1 να αναπαριστούν τα άκρα της γραμμικής διαμέτρου του CBD.[7] Το μείζον συμπέρασμα είναι ότι το επίπεδο γνώσης, η γη και ο φόρος προς αυτή καθώς επίσης και η επιχειρηματική ένταση, επιτυγχάνουν μοναδική μεγιστοποίηση στο κέντρο του CBD, σε κατάσταση ισορροπίας, και φθίνουν σε αναλογία με την απόσταση από αυτό (Helsley, 1990).



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 3.3

[7] Σε αυτό το μοντέλο καθώς και σε όλα αυτά τα οποία έχουν ως κύριο θέμα την «ανάλυση» της πόλης, το κέντρο αυτής θα παρουσιάζεται και θα αναλύεται ως επιχειρηματικό κέντρο (CBD).

3.3 ΕΚΤΙΜΗΣΕΙΣ ΠΑΝΩ ΣΤΙΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΕΣ ΣΥΣΣΩΡΕΥΣΗΣ

Η πιο συνηθισμένη προσέγγιση για να υπολογίσουμε τα πλεονεκτήματα της παραγωγικότητας σε συγκεκριμένες αστικές περιοχές είναι να χρησιμοποιήσουμε συνολικές συναρτήσεις παραγωγής σε μητροπολιτικό επίπεδο. Η βάση των παραπάνω είναι μία συνάρτηση παραγωγής της μορφής,

$$\boxed{y_{ij} = g(S_j) f(K_{ij}, L_{ij}, G_{ij}, Z_{ij})} \quad (3.3.1)$$

Με τον παράγοντα y_{ij} να αναπαριστά τις εκροές για την (i) επιχείρηση στην (j) πόλη και τους παράγοντες (K,L,G,Z) να αναπαριστούν (το κεφάλαιο, την εργασία, δημόσιες υποδομές, άλλες εισροές) αντίστοιχα. Ο παράγοντας (δημόσιες υποδομές, G) εισέρχεται εμβόλιμα στη συνάρτηση παραγωγής (3.3.1) για να δηλώσουμε έτσι την σπουδαιότητα στο να δημιουργούμε συναρτήσεις παραγωγής που να περιέχουν συγχρόνως και κλασικές παραμέτρους των εισροών παραγωγής αλλά και την παράμετρο των δημόσιων υποδομών.

Η συνάρτηση παραγωγής, $f(.)$, συνήθως υποδηλώνει σταθερές αποδόσεις κλίμακας αλλά μπορεί να υποδηλώνει και αυξανόμενες αποδόσεις κλίμακας όταν ο παράγοντας (δημόσιες υποδομές) προστεθεί σαν εισροή σε αυτή την συνάρτηση (σταθερών αποδόσεων). Ο παράγοντας $g(S_j)$, αναπαριστά τις οικονομίες κλίμακας με την πρώτη παράγωγο αυτού ($g' \geq 0$).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{Ο}

ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΠΟΛΙΤΙΚΕΣ ΥΠΟΔΟΜΩΝ ΚΑΙ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

Το γεωγραφικό μοντέλο ανάπτυξης που θα σχολιαστεί σε αυτή την ενότητα είναι μια προέκταση του μοντέλου τοπικών αποτελεσμάτων διάχυσης LS (local spillovers). Γι' αυτό τον λόγω είναι αναγκαία μια, έστω σύντομη, παρουσίαση των βασικών αρχών του υποδείγματος LS πριν προχωρήσουμε στις όποιες προεκτάσεις αυτού (για μια πιο εκτενή ανάλυση αυτών των υποδειγμάτων βλέπε Baldwin, 2003).

Το μοντέλο LS έχει δύο περιφέρειες (βόρεια, νότια), δύο συντελεστές παραγωγής (εργαζόμενους, κεφάλαιο) και δύο τομείς παραγωγής αγαθών (τον «βιομηχανικό» τομέα που συμβολίζεται με Μ, και έναν τομέα παραγωγής ενός ομογενούς αγαθού που συμβολίζεται με Α και που αντιστοιχεί στον αγροτικό τομέα).

Ο παράγοντας κεφάλαιο χρησιμοποιείται μόνο στην περίπτωση του κατασκευαστικού τομέα και μόνο σε κάποιες άλλες ειδικές περιπτώσεις όπου θα δηλώνεται με σαφήνεια. Για κάθε ποικιλία ενός (βιομηχανικού) αγαθού απαιτείται μια μονάδα κεφαλαίου σαν σταθερό κόστος, αλλά όλα τα μεταβαλλόμενα κόστη είναι συναρτήσεις των εισροών εργασίας. Ένα αγαθό του τομέα Α, παράγεται σύμφωνα με σταθερές αποδόσεις κλίμακας χρησιμοποιώντας σαν παράγοντα εισροής μόνο τον παράγοντα εργασία. Επίσης ο παράγοντας κεφάλαιο είναι απόλυτα κινητικός με την έννοια ότι μπορεί να κινείται μεταξύ περιοχών χωρίς κόστος (μια απλουστευτική υπόθεση). Μια άλλη παράμετρος που οδηγεί στη ανάπτυξη είναι η προσθήκη ενός καινοτόμου τομέα, Ι, ο οποίος παράγει επιπλέον μονάδες κεφαλαίου.

Η επέκταση του παραπάνω υποδείγματος περιέχει ένα επιπρόσθετο κόστος μεταφοράς και έτσι υπάρχει μια επιπλέον διάσταση για τις δημόσιες παρεμβάσεις (και την άσκηση πολιτικής). Έτσι έχουμε τη ύπαρξη μεταφορικού κόστους και συγκεκριμένα την ύπαρξη κόστους μεταφοράς μεταξύ περιοχών (διαπεριφερειακά

κόστη) και εντός αυτών (εσωπεριφερειακά κόστη). Υποθέτουμε ότι οι δημόσιες υποδομές μπορούν να επηρεάζουν και τα δύο είδη κόστους ανεξάρτητα.

Καθώς οι πολιτικές δημόσιας διαχείρισης μεταβάλλουν τα κόστη μεταφοράς, επηρεάζουν την οικονομική γεωγραφία και αυτή με τη σειρά της επηρεάζει το δείκτη ανάπτυξης. Το υπόδειγμα αυτό, τουλάχιστον σε επίπεδο θεωρίας, δείχνει ότι υπάρχει μία αντίστροφη σχέση μεταξύ συνολικής μεγέθυνσης (του αθροίσματος δηλαδή των περιφερειών του υποδείγματος) και της «ισότητας» (ισοκατανομής εισοδήματος και πλούτου) στις περιφέρειες[8]. Αυτό έχει σαν συνέπεια, πράγμα πολύ σημαντικό από την άποψη άσκησης περιφερειακής πολιτικής, ότι πολιτικές που έχουν σαν στόχο την μείωση των περιφερειακών ανισοτήτων, πχ. βελτιώνοντας τις υποδομές σ' αυτές στις 'φτωχές' περιφέρειες έτσι ώστε να προσελκύσουν επιχειρήσεις, μπορεί να έχει ως αποτέλεσμα την δημιουργία στον χώρο συνθηκών που να μην ευνοούν την συνολική οικονομική μεγέθυνση.

4.1 ΕΚΦΡΑΣΕΙΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

Το κεφάλαιο κινείται στον χώρο προς αναζήτηση των υψηλότερων αποδόσεων. Έτσι τα σημεία στα σημεία το υπόδειγμα φθάνει σε ισορροπία μπορεί να εκφραστεί από τη συνθήκη $\boxed{\pi = \pi'}$ όπου,

$$\pi = bB\frac{E^w}{K^w},$$

$$\pi' = bB'\frac{E^w}{K^w}, \text{ με } b \equiv \frac{\mu}{\sigma}.$$

[8] Οι Quah (1996) και Martin (1998) έχουν παρουσιάσει κάποια εμπειρικά δεδομένα που υποστηρίζουν τα συμπεράσματα του μοντέλου αυτού.

Ο παράγοντας E^w, εκφράζει την παγκόσμια (του συνόλου των χωρικών μονάδων του υποδείγματος) δαπάνη και ο K^w, εκφράζει το απόθεμα κεφαλαίου.

Ο όρος Β ταυτίζεται με τη μαθηματική έκφραση $\frac{s_E \phi_D}{\Delta} + \frac{\phi_I s_E}{\Delta'}$, ενώ ο όρος B' με τη σχέση $\frac{\phi_I s_E}{\Delta} + \frac{\phi'_D s'_E}{\Delta'}$, με τα $\Delta \equiv \phi_D s_n + \phi_I (1 - s_n)$ και $\Delta' \equiv \phi_I s_n + \phi'_D (1 - s_n)$. Οι όροι $s_E \vee s'_E$ εκφράζουν τη βόρεια και νότια κατανομή της παγκόσμιας δαπάνης[9].

Λύνοντας την εξίσωση $\pi = \pi'$, αντιλαμβανόμαστε ότι η χωρική κατανομή των επιχειρήσεων εξαρτάται από το μέγεθος της αγοράς και από το μεταβαλλόμενο μεταφορικό κόστος. Έτσι καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι οι περιοχές με καλύτερες υποδομές έλκουν μεγαλύτερο αριθμό επιχειρήσεων. Ο λόγος έγκειται στο ότι τα (ενδοπεριφερειακά) κόστη επιφέρουν μείωση της ακτίνας επιρροής της τοπικής αγοράς για τους τοπικούς παραγωγούς, έτσι μία μικρή αγορά έλκει μικρό αριθμό επιχειρήσεων.

Για περιοχές ίσου μεγέθους ($s_n = 1/2$) η βόρεια κατανομή της παγκόσμιας δαπάνης μπορεί να εκφραστεί ως συνάρτηση της βόρειας κατανομής του παγκοσμίου αποθέματος κεφαλαίου και του δείκτη ενδογενούς ανάπτυξης[10].

$$\boxed{s_E = 1/2 + \frac{b\rho}{g + \rho + \delta}\left[s_K - 1/2\right]} \quad (4.1.1)$$

Όπου ο παράγοντας (s_K) εκφράζει την βόρεια κατανομή του παγκόσμιου κεφαλαίου, ο όρος (g) εκφράζει τον ενδογενή δείκτη ανάπτυξης, ο όρος (ρ) δηλώνει το επιτόκιο και ο όρος (δ) εκφράζει το δείκτη απόσβεσης.

[9] Σε αυτό το σημείο εννοούμε ότι οι όποιες δραστηριότητες καθώς επίσης και οι χωρικές συγκεντρώσεις αναπτύσσονται κατά τον άξονα Β-Ν.
[10] Ο χώρος της διπλωματικής δεν επιτρέπει δυστυχώς την ανάπτυξη του σημείου αυτού. Για μια εκτεταμένη ανάπτυξη, βλέπε Baldwin, 2003.

Έτσι αφού ο παράγοντας (s_E) ουσιαστικά φανερώνει την βόρεια κατανομή της παγκόσμιας κατανάλωσης, θα ορίσουμε τη σχέση ($s_E - 1/2$) σαν ένα μέτρο ανισότητας του τοπικού εισοδήματος. Οπότε η ανισότητα του εισοδήματος αυξάνει με την ανισότητα του κεφαλαίου και μειώνεται με την ανάπτυξη. Εν τέλει ήμαστε σε θέση να εκφράσουμε μαθηματικά, το δείκτη ανάπτυξης (g) ο οποίος εξαρτάται από τη χωρική κατανομή των μέσων παραγωγής. Έτσι η μαθηματική έκφραση του (g) είναι:

$$\boxed{g = 2bL[s_n + \lambda(1 - s_n)] - \rho(1 - b) - \delta, \qquad \forall 1/2 < s_n \leq 1} \quad (4.1.2)$$

Στην παραπάνω εξίσωση, η παράμετρος (λ) κωδικοποιεί τη κλίμακα γνώσης όσον αφορά τη συσσώρευση. Οπότε για (λ=0), υποδηλώνει φαινόμενα (spillovers) για μία περιφέρεια ενώ για (λ=1) υποδηλώνει ίδιες συνθήκες για όλες τις περιφέρειες.

4.2 ΔΗΜΟΣΙΑ ΠΟΛΙΤΙΚΗ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΕΣ ΕΠΙΔΡΑΣΕΙΣ (SPILLOVERS)

Μια δημόσια πολιτική η οποία δημιουργεί (spillovers) με κύρια παράμετρο την τεχνολογία, ουσιαστικά δημιουργεί (spillovers) γνώσης τα οποία έχουν συνολική (για όλες τις χωρικές μονάδες) εμβέλεια και οδηγούν στην υπέρανάπτυξη. Για παράδειγμα μια πολιτική η οποία βελτιώνει της τηλεπικοινωνιακές υποδομές, μπορεί να χαρακτηριστεί ως μία πολιτική η οποία ουσιαστικά αυξάνει την παράμετρο (λ) καθώς επίσης βοηθά στην εξάπλωση νέων τεχνολογιών από μία περιοχή σε άλλη.

Επίσης μία πολιτική όπου βάση της είναι οι μεταφορικές υποδομές και η οποία βοηθά στην κίνηση του ανθρωπίνου κεφαλαίου, θα έχει παρόμοιες επιπτώσεις μίας και διευκολύνει στη «μεταφορά» ιδεών οι οποίες τις περισσότερες φορές έχουν

ως αποτέλεσμα τη διαπροσωπική επαφή (επικοινωνία) όπου είναι το ζητούμενο για μια ανάπτυξη η οποία θα βασίζεται στις βασικές αρχές της ΝΟΓ.

Σε αυτή την περίπτωση ο δείκτης ανάπτυξης αυξάνει όσο το κόστος καινοτομιών μειώνεται, έτσι οδηγούμαστε σε μια προς τα αριστερά μετατόπιση της καμπύλης $g(s_n)$. Έτσι μεγαλύτερος αριθμός επιχειρήσεων εισέρχεται στην αγορά μειώνοντας έτσι την μονοπωλιακή δύναμη των είδη υπαρχουσών επιχειρήσεων. Αυτό μειώνει την διαφοροποίηση όσον αφορά το εισόδημα μεταξύ εργατών και αυτών που είχαν υψηλές αποδοχές από την προϋπάρχουσα μονοπωλιακή κατάσταση, και έτσι οδηγούμαστε σε επανεγκατάσταση των επιχειρήσεων προς το «νότο»[11].

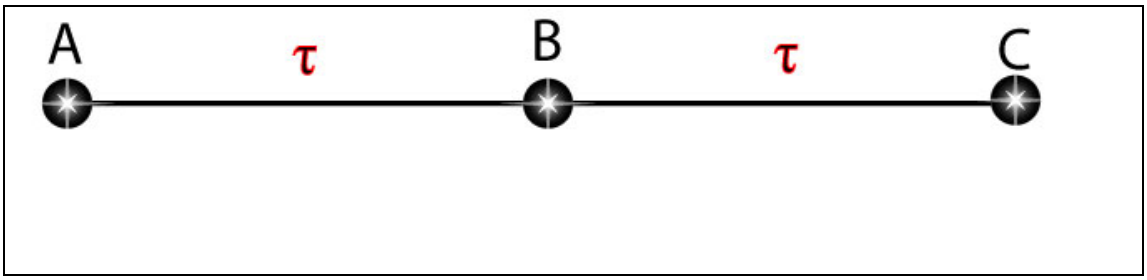
Με την επιδότηση αναπτυξιακών προγραμμάτων σε R&D, με την αύξηση του ανταγωνισμού στην αγορά αγαθών καθώς επίσης και στην αγορά εργασίας, όπως επίσης και με τη βελτίωση των μαθησιακών υποδομών κτλ, μπορεί να μειωθεί το κόστος καινοτομίας για τις επιχειρήσεις και έτσι τελικά τέτοιου ίδιους πολιτικές μπορούν να φέρουν πιο επιθυμητά αποτελέσματα από ότι παραδοσιακές αναπτυξιακές πολιτικές. Δηλαδή το μέλλον πολιτικών αστικής και περιφερειακής ανάπτυξης είναι συνδεδεμένο άρρηκτα με τη θεωρία της ΝΟΓ.

4.3 ΥΠΟΔΟΜΕΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΣΕ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΤΡΙΩΝ ΠΕΡΙΟΧΩΝ

Ας ονομάσουμε τις τρεις περιοχές ως Α, Β, C και ας υποθέσουμε ότι η περιοχή Β βρίσκεται μεταξύ των Α, C.

Το μεταφορικό κόστος μεταξύ των περιοχών Α, C είναι ίσο με (τ^2)και μεταξύ των Α, Β και Β, C ίσο με (τ).

[11] Σε αυτό το σημείο μετακινούμαστε πάνω στον άξονα Β-Ν με κατεύθυνση από βορρά προς νότο διότι η αρχική θέση της καμπύλης $g(s_n)$ ήταν «βόρεια» μίας και αυτό υποδηλώνει η παράμετρος (s_n).



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.4

Για να διευκολύνουμε την ανάλυση μας, υποθέτουμε ότι ο άξονας A-C είναι συμμετρικός και δεν υπάρχουν διαπεριφερειακά κόστη. Συμβολίζουμε με (s_{nB}) τις επιχειρήσεις που είναι χωροθετημένες στην περιοχή B και με (s_{EB}) τη συνολική δαπάνη στην εν λόγω περιοχή. Επίσης υποθέτουμε ότι $s_{ED} < 1/3$ έτσι ώστε η περιοχή B να κρίνεται ως σχετικά φθηνή περιοχή. Με τις παραπάνω παραδοχές ήμαστε σε θέση να εξάγομε μία σχέση ισορροπίας μεταξύ της εισοδηματικής ανισότητας και της χωροθέτησης των κλάδων παραγωγής.

$$s_{nB} = 1/3 + \frac{(3s_{EB} - 1)(1+\phi)}{3(1-\phi)^2} + 2/3\left(\frac{\phi}{1-\phi}\right)^2 \quad (4.3.1)$$

Σε αυτό το σημείο παρατηρούμε ότι πολιτικές οι οποίες μειώνουν το κόστος καινοτομίας μεταξύ περιοχών (αυξάνοντας την παράμετρο ϕ), πείθουν τις επιχειρήσεις να εγκατασταθούν σε μία φτωχή κεντρική περιοχή. Η παραπάνω πρόταση μπορεί να εκφραστεί μαθηματικά ως $\frac{\partial s_n}{\partial \phi} > 0$ αν ισχύει ότι,

$$s_{EB} > \frac{1-\phi}{3+\phi} \quad (4.3.2)$$

Οπότε μια πολιτική υποδομών η οποία μειώνει τα κόστη συναλλαγής μεταξύ μίας κεντρικής φτωχής περιοχής και δύο πλούσιων, θα είναι επιτυχής όσον αφορά την έλξη επιχειρήσεων στις φτωχές περιοχές αν το μέγεθος της αγοράς στις εν λόγω περιοχές είναι μικρό ή αν το υπάρχον κόστος καινοτομίας ανάμεσα στις φτωχές και στις πλούσιες περιοχές είναι επίσης μικρό.

4.4 ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΣΗ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ ΚΑΙ ΑΝΑΠΤΥΞΗ

Σε αυτή την ενότητα θα εξετάσουμε πώς η διαδικασία συγκέντρωσης μπορεί να καταστεί επιζήμια για την όλη ανάπτυξη.

Για να επιτύχουμε μια τέτοιου είδους μοντελοποίηση χρησιμοποιούμε στοιχεία από παραπάνω θεωρίες σε περιπτώσεις τέλειας κινητικότητας κεφαλαίου. Η μόνη διαφοροποίηση με τα προαναφερθέντα είναι ότι το κόστος καινοτομίας (στο βορρά)[12] θα δίνεται σύμφωνα με τις παρακάτω εξισώσεις.

$$F = a_1,$$

$$a_1 \equiv \frac{1}{K^w A},$$

$$A \equiv s_n + \lambda(1 - s_n) - \gamma(s_n - 1/2)^2$$

Η παράμετρος (λ) έχει την ίδια φύση και ερμηνεία με τις θεωρίες που αναπτύχθηκαν σε παραπάνω ενότητες. Η παράμετρος (γ) δείχνει ότι σε υψηλά επίπεδα συγκέντρωσης ($>> s_n$) το αποτέλεσμα της αύξησης της αναλογίας των

[12] Εξακολουθούμε να αναφερόμαστε στον άξονα B-N.

επιχειρήσεων στο (βορρά) μπορεί να προκαλέσει την αύξηση του κόστους καινοτομίας.

Σε αυτή την περίπτωση ο δείκτης ανάπτυξης στην οικονομία παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$\boxed{g = 2bL[s_n + \lambda(1-s_n) - \gamma {s_n}^2] - \rho(1-b) - \delta, \qquad \forall 1/2 < s_n < 1} \quad (4.4.1)$$

Η ανάπτυξη αυξάνει με τη χωρική οικονομική συγκέντρωση, σε χαμηλά επίπεδα συγκέντρωσης, αλλά έπειτα μειώνεται σε υψηλά επίπεδα συγκέντρωσης αν ικανοποιείται η σχέση $\gamma > (1-\lambda)/2$.

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω και αν συνυπολογίσουμε τις εξισώσεις (4.1&4.2), θα καταλήξουμε σε μία νέα μαθηματική έκφραση μεταξύ της ανάπτυξης και της ισορροπίας όσον αφορά τη χωροθέτηση των επιχειρήσεων.

$$\boxed{s_n = 1/2 + \frac{(\phi_D \phi_D{}' - {\phi_I}^2)\dfrac{\rho b}{q+\rho}(s_K - 1/2) + \phi_I(\phi_D - \phi_D{}')}{2(\phi_D - \phi_I)(\phi_D{}' - \phi_I)}} \quad (4.4.2)$$

Σύμφωνα με την παραπάνω εξίσωση η συσχέτιση είναι αρνητική. Μία αύξηση της ανάπτυξης μειώνει τα μονοπωλιακά κέρδη των επιχειρήσεων που πλεονάζουν στον βορρά ($s_K > 1/2$). Αν ($s_n = 1$) τότε τα κέρδη είναι μεγαλύτερα στο βορρά από ότι στο νότο.

Έτσι καταλήγουμε σε ένα συμπέρασμα που δεν είναι άλλο από το ότι καλύτερες υποδομές, οι οποίες μειώνουν το μεταφορικό κόστος μεταξύ περιοχών, είναι πιθανό να βάλουν την οικονομία σε μια κατάσταση ισορροπίας με μικρό ρυθμό ανάπτυξης, υψηλό βαθμό συγκέντρωσης και με υψηλό βαθμό εισοδηματικής ανισότητας.

Οι παραπάνω συσχετίσεις εξηγούνται σύμφωνα με τις όποιες μετατοπίσεις των εκάστοτε καμπύλων των συναρτήσεων(g, s_n , κτλ).Σχηματίζοντας συνεχόμενα πλήθη ομογενών εξισώσεων και έπειτα τοποθετώντας αυτές σε ένα γενικό πλαίσιο-άξονα, όπως παραδείγματος χάριν βορράς-νότος, επιτυγχάνουμε την προβολή της γενικής κατάστασης ισορροπίας και ανάπτυξης μίας αυστηρά οριοθετημένης περιοχής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^{Ο}

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟΣ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ: ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΤΗΝ ΧΡΗΣΗ ΣΥΝΑΛΛΟΙΩΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Σε αυτήν την ενότητα θα προσπαθήσουμε να αποδείξουμε ότι υπό ορισμένες συνθήκες οι εξισώσεις μας δεν διατηρούν τη συνήθη μορφή τους αλλά μεταβάλλονται ανάλογα με το εκάστοτε σύστημα συντεταγμένων.

Γενικά στις θετικές επιστήμες, τα όποια υποδείγματα μελετώνται μέσα σε ένα σύστημα συντεταγμένων ή συνεχή χώρο. Έτσι τα αποτελέσματα από την ανάλυση του μοντέλου εντάσσονται και αυτά στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων.

Αν θέσουμε προς ανάλυση το αρχικό μας μοντέλο σε ένα άλλο σύστημα, στο οποίο η όποια μεταβολή να σχετίζεται με το αρχικό μας σύστημα, τότε θα παρατηρήσουμε ότι τα αποτελέσματα δεν θα είναι τα ίδια, άρα θα οδηγηθούμε σε μία διαφορετική κατάσταση συμπεριφοράς του μοντέλου μας. Επομένως οι εξισώσεις μας θα έχουν διαφορετική μορφή.

Για να περιορίσουμε τις όποιες απώλειες στα τελικά αποτελέσματα καθώς επίσης και τις όποιες χαοτικές συμπεριφορές του μοντέλου, επιλέγουμε μια αιτιοκρατική[13] ανάλυση αυτού (μοντέλου) η οποία ερμηνεύεται στον κόσμο των θετικών επιστημών με τη χρήση των διαφορικών εξισώσεων. Έτσι προσπαθούμε να δώσουμε στο σύστημα μας μια, όπως συνηθίζεται να λέγεται, διαφορίσιμη δομή. Η προσπάθεια σε κάθε ανάλυση, μέσω ενός μοντέλου, να μπορέσει να εφαρμοστεί μια αιτιοκρατική λογική είναι πέρα για πέρα επιθυμητή, γιατί θέλουμε να μπορούμε να προβλέψουμε το τι θα γίνει την επόμενη στιγμή ή στην επόμενη φάση του μοντέλου.

[13] Γενικά ο επιστημονικός κόσμος, σήμερα, δέχεται δύο μορφές ανάλυσης. **Την ντετερμινιστική (αιτιοκρατική) και τη χαοτική**. Η πρώτη μας εξηγεί ότι πάντα και σε κάθε ανάλυση πρέπει να ισχύει η σχέση αιτίας – αποτελέσματος. Δηλαδή κάθε αποτέλεσμα υπάρχει γιατί υπάρχει και η αιτία του. Η παραπάνω φράση, στη λογική των μαθηματικών ερμηνεύεται με τη χρήση των διαφορικών εξισώσεων. Η χαοτική ανάλυση μας εξηγεί ότι για κάθε αποτέλεσμα δεν υπάρχει μια αιτία σε ποσοστό 100% που να ευθύνεται για την ύπαρξη αυτού. Η παραπάνω λογική στο χώρο των θετικών επιστημών ερμηνεύεται με τη χρήση των μαθηματικών του χάους.

Επομένως πρωταρχικός μας στόχος είναι να ορίσουμε το σύστημα συντεταγμένων που επρόκειτο να πραγματοποιηθεί η ανάλυση μας[14] και έπειτα να προσπαθήσουμε να βρούμε τον κατάλληλο μετασχηματισμό των εξισώσεων μας όπου θα μας οδηγήσει στο επιθυμητό αποτέλεσμα που δεν είναι άλλο από τη αλλαγή στον τρόπο συμπεριφοράς των εξισώσεων του προηγούμενου κεφαλαίου, άρα το να δούμε πως μεταβάλλονται οι πολιτικές διαχείρισης σε μία περιοχή.

Η παρούσα ενότητα θα αναπτυχθεί σε δύο επίπεδα. Στο πρώτο θα πραγματοποιηθεί η κατασκευή του χώρου Κύριου Εμπορικού Κέντρου (ΚΕΚ) και στο δεύτερο θα γίνει προσπάθεια για μία εφαρμογή-παράδειγμα και μετατροπή των συνήθων εξισώσεων σε τανυστική μορφή.

Εν κατακλείδι μεταφερόμαστε σε έναν νέο τρόπο σκέψης ο οποίος μας επιτρέπει να αντιμετωπίζουμε τις όποιες πολιτικές ανάπτυξης και γενικά τις όποιες μελέτες που γίνονται στον φυσικό χώρο, με μία λογική που ουσιαστικά είναι η μετατροπή και η εύρεση κατάλληλων μετασχηματισμών από τον οικονομικό αστικό ή περιφερειακό χώρο στην φυσική πραγματικότητα.

5.1 ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ ΚΕΚ

Επιλέξαμε το χώρο ΚΕΚ για κατασκευή και ανάλυση διότι καθίσταται βασικός παράγοντας για την ερμηνεία τόσο του αστικού οικονομικού χώρου όσο και της περιφέρειας, με έναν επαγωγικό συλλογισμό. Έτσι όλοι οι υπολογισμοί μας θα πραγματοποιούνται εντός του υπό μελέτη οικονομικού χώρου και τα όποια συμπεράσματα θα υπάγοντα σε αυτόν. Αργότερα θα δούμε πως δεν υπάρχει απόλυτη ταύτιση ενός οικονομικού ή αστικού πεδίου με τον φυσικό χώρο, και αυτός είναι ο λόγος που επιμένουμε να τονίζουμε αυστηρά την εκάστοτε περιοχή μελέτης που πραγματοποιείται κάθε φορά η μελέτη ενός φαινόμενου.

[14] Σε όλη την παρούσα ενότητα τα συστήματα συντεταγμένων και οι περιοχές ανάλυσης θα έχουν εξ' ορισμού μια διαφορίσιμη δομή άρα θα είναι και συνεχείς.

Για την αλγεβρική κατασκευή του χώρου ΚΕΚ θα χρησιμοποιήσουμε στοιχεία διανυσματικής και τανυστικής ανάλυσης. Πρέπει να σημειωθεί ότι κάθε όρος που χρησιμοποιείται παρουσιάζεται αυτόνομα στο παράρτημα έτσι ώστε να αποφεύγεται η οποία σύγχυση και να μην γίνεται κουραστική η ανάγνωση της παρούσας ενότητας.

Το ΚΕΚ θα αντιμετωπίζεται ως μια ευκλείδεια πραγματική πολλαπλότητα τεσσάρων διαστάσεων μέσα στην οποία θα οριστεί μια διαφορίσιμη δομή και έπειτα θα εφοδιάσουμε το χώρο αυτόν με μία μετρική έτσι ώστε να μπορέσουν να γίνουν οι όποιες μετρήσεις και κατ' επέκταση οι όποιες εφαρμογές.

Ο ΚΕΚ θα ταυτίζεται με τον καρτεσιανό πραγματικό διανυσματικό χώρο τεσσάρων διαστάσεων ($\Re^4$),

$$\Re^4 = \{x = (x^1,...,x^4) / x^i \in \Re, i = 1,...,4\}$$

εφοδιασμένο με την τοπολογία των ανοιχτών ορθογωνίων παραλληλεπιπέδων.

Ο $\Re^4$ ενσωματωμένος με μία μετρική d, η οποία ορίζεται ως

$$d : \Re^4 \times \Re^4 \to \Re^+,\ d(x,y) = [(x^1 - y^1)^2 + ... + (x^4 - y^4)^2]^{1/2},$$

καλείται *καρτεσιανός πραγματικός μετρικός χώρος*.

Επίσης ο $\Re^4$ εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο, το οποίο ορίζεται ως

$$<,>: \Re^4 \times \Re^4 \to \Re,\ < x, y >= x^i y^i,$$

καλείται *Ευκλείδειος πραγματικός διανυσματικός χώρος* 4-διαστάσεων.

Τώρα, επί του $\Re^4$ θεωρούμε την παρακάτω απεικόνιση

$$a : \Re^4 \to \Re^4$$
$$a(x) = x, \forall x \in \Re^4$$

Το ζεύγος $(\Re^4, a)$ καλείται *Ευκλείδεια πραγματική πολλαπλότητα* διάσταση 4 (βλ. Παναγιωτουνάκο, 1988).

Έτσι μέχρις στιγμής έχουμε ορίσει τον χώρο ΚΕΚ ως μία Ευκλείδεια πολλαπλότητα τεσσάρων διαστάσεων. Εν συνεχεία θα δώσουμε μια διαφορίσιμη δομή σε αυτόν και θα εξετάσουμε τον εφαπτόμενο χώρο σε ένα σημείο του μια και αυτό είναι που μας ενδιαφέρει περισσότερο γιατί οι όποιες μελέτες, ουσιαστικά, δεν πραγματοποιούνται εντός του ΚΕΚ αλλά σε μία περιοχή αυτού η όποια θα ταυτίζεται με έναν εφαπτόμενο χώρο.

Επί της $\text{ΚΕΚ} \equiv \Re^4$ Ευκλείδειας πολλαπλότητας ορίζονται οι *φυσικές συντεταγμένες* αυτής όπως παρακάτω:

$$a^1 : \Re^4 \to \Re$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a^4 : \Re^4 \to \Re$$

Δοθέντος της ΚΕΚ Ευκλείδειας πολλαπλότητας και ενός υποσύνολου της Α, ορίζουμε τις συναρτήσεις β επί του Α ως:

$$\beta : A \to \Re\,,\ \beta(x) = \beta(a^1(x),\ldots,a^4(x)) = \beta(a^1,\ldots,a^4)$$

Αν υπάρχουν όλες οι μερικές παράγωγοι της β μέχρι 4-τάξης για κάθε $x \in A$ τότε η β καλείται διαφορίσιμη συνάρτηση 4-τάξης στο Α και συμβολίζεται ως β, C^4 (βλ. Παναγιωτουνάκο, 1988).

Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε δώσει μια διαφορίσιμη δομή στην Ευκλείδεια πολλαπλότητα ΚΕΚ και άρα ήμαστε σε θέση να προχωρήσουμε σε όποια αλγεβρική και γεωμετρική εφαρμογή επιθυμούμε πάνω σε αυτήν (ΚΕΚ).

5.2 ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΟΣ ΧΩΡΟΣ ΤΟΥ ΚΕΚ.

Κάθε διάνυσμα επί της ΚΕΚ που έχει αρχή ένα σημείο $p \in KEK$, λέγεται εφαπτόμενο διάνυσμα της ΚΕΚ στο p.

Εφαπτόμενος χώρος της ΚΕΚ στο σημείο p καλείται το σύνολο των εφαπτόμενων διανυσμάτων αυτής στο εν λόγω σημείο. Ο εφαπτόμενος χώρος θα συμβολίζεται ως $T_p(KEK)$.

Τα διανύσματα $e_1(p) = (1,0,0,0),...,e_4(p) = (0,0,0,1)$ αποτελούν τη βάση του $T_p(KEK)$, οπότε κάθε διάνυσμα $X \in T_p(KEK)$ θα δίνετε με την μορφή $x = x^i e_i(p)$, με (i=1,…4)

Πριν προχωρήσουμε παρακάτω πρέπει να ορίσουμε και να αναπτύξουμε μερικώς την έννοια των τανυστών μιας και τα στοιχεία της ΚΕΚ αντιμετωπίζονται ως τανυστές.

5.3 ΤΑΝΥΣΤΕΣ

Στην τανυστική άλγεβρα (για μεγαλύτερη ανάλυση βλ. Παναγιωτουνάκο, 1988) έναν διανυσματικό χώρο Χ τον καλούμε ως *χώρο των ανταλλοίωτων διανυσμάτων*. Κάθε στοιχείο του Χ γράφεται ως $x = x^i e_i$, με τα x^i να παριστάνουν τις συνιστώσες του χ και τις ποσότητες e_i να παριστάνουν μια ορισμένη βάση του Χ [15].

Όπως παρατηρούμε το σύμβολο της άθροισης παραλείπεται γιατί στην τανυστική ανάλυση χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό Einstein, ο οποίος δηλώνει ότι άμα ένας δείκτης εμφανίζεται μία φορά ως άνω δείκτης και μία φορά ως κάτω δείκτης αυτομάτως αυτό θα δηλώνει άθροιση. Έτσι η παραπάνω έκφραση ($x = x^i e_i$) θα είναι ισότιμη με την έκφραση ($x = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i$)

Αν Χ* είναι ο δυϊκός χώρος του Χ και $\{\ \varepsilon^i\}$ η δυϊκή βάση της $\{e_i\}$ τότε τα στοιχεία του Χ*, $\varphi = \varepsilon^i z_i$, θα καλούνται *συναλλοίωτα δανύσματα*.

Ένας τανυστής βασίζεται στην έννοια του τανυστικού γινομένου.

Ας είναι Χ, Υ δύο διανυσματικοί χώροι και Χ*, Υ* οι δυϊκοί αυτών.

Το τανυστικό γινόμενο ορίζεται ως ένα σύνολο $X \otimes Y$ όπου έχει για στοιχεία τις διγραμμικές μορφές $f : X^* \times Y^* \to R$.

$$\boxed{X \otimes Y = \{f / f : X^* \times Y^* \to R\}}$$

Έτσι ένα στοιχείο $k = x \otimes y \in X \otimes Y$, ως προς μία βάση $e_r \otimes e_p$, γράφεται ως

$k = k^{rp} e_r \otimes e_p$, με k^{rp} να αποτελούν τις συνιστώσες του.

[15] Γνωρίζουμε πως κάθε διάνυσμα $x \in X$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των συνιστωσών του και των διανυσμάτων της βάσης του Χ. ($x = x^1 e_1 + ... + x^n e_n$)

Το τανυστικό γινόμενο κ φορές του Χ γράφεται ως $\overset{k}{\otimes} X = X \otimes X \otimes ... \otimes X$

Ένας τανυστής μπορεί να είναι ένας ανταλλοίωτος τανυστής ή ένας συναλλοίωτος τανυστής ή ένας μικτός τανυστής. Ο τελευταίως γράφεται ως

$$\boxed{K = (K^{i1i2...ir}_{j1j2...jp}) e_{i1} \otimes e_{i2} \otimes ... \otimes e_{ir} \otimes \varepsilon^{l1} \otimes \varepsilon^{j2} \otimes ... \otimes \varepsilon^{jp}}$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω ένας μικτός τανυστής είναι στοιχείο του διανυσματικού χώρου $(\overset{p}{\otimes} X) \otimes (\overset{r}{\otimes} X^*)$. ένας τανυστής r φορές συναλλοίωτος είναι ένα στοιχείο του διανυσματικού χώρου $\overset{r}{\otimes} X^*$ και ένας τανυστής p φορές ανταλλοίωτος είναι ένα στοιχείο του διανυσματικού χώρου $\overset{p}{\otimes} X$.

Τον παραπάνω συμβολισμό θα τον ακολουθήσουμε σε όλη την ενότητα μιας και τα στοιχεία που θα εισάγουμε θα είναι τανυστές, οι οποίοι θα μετασχηματίζονται εντός της ΚΕΚ πολλαπλότητας.

Μετασχηματισμοί συντεταγμένων

Σε αυτό το σημείο θα εξετάσουμε μετασχηματισμούς συντεταγμένων σε ένα υποσύνολο Α της ΚΕΚ πολλαπλότητας.

Αυτού του είδους οι μετασχηματισμοί θα είναι της μορφής:

$$\boxed{\Im : y^i = y^i(x^1, ..., x^4)}$$

Ο παραπάνω μετασχηματισμός θα είναι αντιστρέψιμος και μονοσήμαντος. Οπότε μπορούμε να γράψουμε,

$$\boxed{\Im^{-1} : x^i = x^i(y^1,...,y^4)}$$

Για να ήμαστε απολύτως σωστοί υποθέτουμε ότι η ιακωβιανή του μετασχηματισμού είναι διάφορη του μηδενός σε κάθε σημείο του Α. έτσι ισχύει $J = \left|\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right| \neq 0$ (βλ. Παναγιωτουνάκο, 1988).

Επίσης όποιος μετασχηματισμός της παραπάνω μορφής έχει αντίστροφο και J,L είναι οι ιακωβιανές τους, τότε ισχύει η σχέση $\boxed{JL=1}$

Τώρα ήμαστε σε θέση να διατυπώσουμε κάποιους θεμελιώδεις ορισμούς βάση των οποίων θα βασιζόμαστε κάθε φορά που χρειάζεται να εκφράσουμε έναν μετασχηματισμό στις εξισώσεις ενός τανυστή.

<u>Ορισμός 5.1</u> ένα σύνολο n^{r+p} ποσοτήτων ενός συστήματος συντεταγμένων $x(x^1,...,x^n)$ που έχουν την μορφή $B^{j1j2...jr}_{i1i2...ip}(x)$ είναι ουσιαστικά οι συνιστώσες ενός μικτού τανυστή r φορές ανταλλοίωτου και p φορές συναλλοίωτου με την προϋπόθεση οι αντίστοιχες ποσότητες $\Gamma^{j1...jr}_{i1...ip}(y)$ στο σύστημα συντεταγμένων $y(y^1,...,y^n)$ να δίνονται από την παρακάτω σχέση:

$$\boxed{\Gamma^{j1...jr}_{i1...ip} = \frac{\partial y^{j1}}{\partial x^{a1}} \cdots \frac{\partial y^{jr}}{\partial x^{ar}} \frac{\partial x^{b1}}{\partial y^{i1}} \cdots \frac{\partial x^{bp}}{\partial y^{ip}} B^{a1a2...ar}_{b1b2...bp}} \quad (5.3.1)$$

<u>Ορισμός 5.2</u> ένα σύνολο ποσοτήτων $B_{i1...ip}(x)$ στο σύστημα συντεταμένων X παριστούν τις συνιστώσες ενός συναλλοίωτου τανυστή p-τάξης αν το αντίστοιχο

σύνολο των ποσοτήτων $\Gamma_{i1\ldots ip}(y)$ στο σύστημα συντεταγμένων Y δίνεται από τη σχέση

$$\boxed{\Gamma_{i1i2\ldots ip} = \frac{\partial x^{a1}}{\partial y^{i1}} \ldots \frac{\partial x^{ap}}{\partial y^{ip}} B_{a1\ldots ap}} \quad (5.3.2)$$

Ορισμός 5.3 ένα σύνολο ποσοτήτων $B^{i1\ldots ir}(x)$ του συστήματος συντεταγμένων X, παριστούν τις συνιστώσες ενός ανταλλοίωτου τανυστή s-τάξης αν οι αντίστοιχες ποσότητες $\Gamma^{i1\ldots ir}(y)$ στο σύστημα συντεταγμένων Y δίνονται από τη σχέση

$$\boxed{\Gamma^{i1\ldots ir} = \frac{\partial y^{i1}}{\partial x^{a1}} \ldots \frac{\partial y^{ir}}{\partial x^{ar}} B^{a1\ldots ar}} \quad (5.3.3)$$

Ορισμός 5.4 ένας συναλλοίωτος τανυστής τάξης-1 είναι ουσιαστικά ένα σύνολο $\{B_i(x), \Gamma_i(y)\}$ όπου τα στοιχεία αυτού συσχετίζονται βάση της σχέσης

$$\boxed{\Gamma_i(y) = \frac{\partial x^a}{\partial y^i} B_a(x)} \quad (5.3.4)$$

Ορισμός 5.5 ένας ανταλλοίωτος τανυστής είναι ένα σύνολο $\{B^i(x), \Gamma^i(y)\}$ όπου τα στοιχεία του συσχετίζονται μέσο της ακόλουθης σχέσης

$$\boxed{\Gamma^i(y) = \frac{\partial y^i}{\partial x^a} B^a(x)} \quad (5.3.5)$$

Στις άνωθεν σχέσεις (5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5) οι δείκτες i,α παίρνουν τις τιμές (1,2,..,n).

Επομένως έχουμε ορίσει και κατά κάποιο τρόπο κωδικοποιήσει τις σχέσεις μετασχηματισμού των συνιστωσών ενός οποιασδήποτε μορφής τανυστή μεταξύ δύο συστημάτων συντεταγμένων. Σε οποιαδήποτε φάση ανάπτυξης του μοντέλου μας χρειαστεί να ελέγξουμε πως μεταβάλλεται ένα φαινόμενο, το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να αλλάξουμε τα σύμβολα στις παραπάνω σχέσεις και να πάρουμε τις νέες συνιστώσες εντός της ΚΕΚ ή και εκτός αυτής βάση ενός επαγωγικού συλλογισμού.

Μετρικός τανυστής

Ο ορισμός του μετρικού τανυστή είναι μείζονος σημασίας μιας και βάση αυτού ήμαστε σε θέση να μετράμε αποστάσεις εντός της ΚΕΚ.

Έτσι η απόσταση μεταξύ δύο σημείων στην ΚΕΚ πολλαπλότητα, σε ένα ορθογώνιο καρτεσιανό σύστημα, δίνεται από τη σχέση

$$ds^2 = dx^r dx^r, r = 1,...,4$$

Η παραπάνω σχέση μετασχηματίζεται σε $ds^2 = \frac{\partial x^r}{\partial y^a}\frac{\partial x^r}{\partial y^b}dy^a dy^b$, αν λάβουμε υπόψη μας ένα μετασχηματισμό συντεταγμένων της μορφής $x^i = x^i(y^1,...,y^4)$

Αν θέσουμε όπου $\frac{\partial x^r}{\partial y^a}\frac{\partial x^r}{\partial y^b} = g_{ab}(y)$, τότε η παραπάνω μετρική σχέση παίρνει την μορφή:

$$\boxed{ds^2 = g_{ab}dy^a dy^b} \quad (5.3.6)$$

Οι ποσότητες g_{ab} παριστάνουν έναν συναλλοίωτο τανυστή τον οποίο και καλούμε *μετρικό τανυστή*. Από τις ποσότητες g_{kl} μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν ανταλλοίωτο τανυστή g^{kl} έτσι ώστε να ισχύει $g^{kl}g_{ml} = \delta^k_m$.[16]

Συμπερασματικά, θα λέγαμε ότι ορίσαμε και κατασκευάσαμε αλγεβρικά το χώρο ΚΕΚ, τον οποίο τον ταυτίσαμε με μία Ευκλείδεια πραγματική πολλαπλότητα $\Re^4$. Εν συνεχεία δώσαμε σε αυτήν μια διαφορίσιμη δομή και ορίσαμε το πώς μεταβάλλονται οι συνιστώσες ενός στοιχείου της ΚΕΚ κάτω από ένα κατάλληλο μετασχηματισμό συντεταγμένων και τέλος εφοδιάσαμε την ΚΕΚ με μία μετρική έτσι ώστε να μπορούν να πραγματοποιηθούν οι όποιες μετρήσεις. Σε αυτό το σημείο πρέπει να τονίσουμε και να κάνουμε ξεκάθαρο ότι οι μετασχηματισμοί διατηρούν την ίδια μορφή για όποια συστήματα συντεταγμένων. Δηλαδή δεν είναι υποχρεωτικό οι όποιες μεταβολές να συμβαίνουν εντός της ΚΕΚ πολλαπλότητας αλλά μπορεί να συμβαίνουν μεταξύ της ΚΕΚ πολλαπλότητας και του φυσικού χώρου κτλ.

[16] Το σύμβολο δ^k_m ονομάζεται σύμβολο του Kronecker και ισούται με {1 για k=m και με 0 για $k \neq m$}.

5.4 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΕΠΙ ΤΗΣ ΚΕΚ ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΑΣ

Γενικά η ΚΕΚ πολλαπλότητα, όπως παρουσιάστηκε παραπάνω, είναι ένα υποσύνολο της φυσική πολλαπλότητας $\Re^4$ με τοπολογία αυτή της ανοικτής σφαίρας $d(x',x) < p$. Δηλαδή είναι ένα μέρος του φυσικού-πραγματικού κόσμου στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων $X(x^1,...,x^4)$.

Όμως μια ΚΕΚ πολλαπλότητα μπορεί να αντιμετωπιστεί ως μια πολλαπλότητα με διαστάσεις αυτές της οικονομικής πολλαπλότητας. Δηλαδή ως ένα υποσύνολο αυτής. Με την έννοια οικονομική πολλαπλότητα εννοούμε μια Ευκλείδεια πραγματική πολλαπλότητα όπου οι φυσικές συναρτήσεις έχουν της παρακάτω μορφή:

$$\boxed{\begin{array}{l} m^1 : {O_k}^n \to O_k \\ m^2 : {O_k}^n \to O_k \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m^n : {O_k}^n \to O_k \end{array}}$$

Με $O_κ$ αναπαριστούμε τον οικονομικό διανυσματικό χώρο.

Ο χώρος $O_κ$ είναι ισόμορφος με τον R^n. Ως στοιχεία του οικονομικού διανυσματικού χώρου θα είναι οι μέχρι τώρα οικονομικοί παράγοντες που επηρέαζαν τη μορφή των εξισώσεων μας σε προηγούμενα κεφάλαια αλλά υπό μορφή τανυστικών παραμέτρων.

Για παράδειγμα στο μοντέλο Mills (1967), το εξαγόμενο προϊόν δίνεται από τη σχέση

$$\boxed{X = AL^{\alpha} N^{\beta} K^{\gamma}}$$

Όπου η παράμετρος L αναπαριστά τη γή, η παράμετρος N την εργασία και η παράμετρος K το κεφάλαιο.

Οπότε στο συγκεκριμένο παράδειγμα ο οικονομικός χώρος είναι τριών διαστάσεων και η $O_κ$ πολλαπλότητα έχει τρεις φυσικές συντεταγμένες.

$$\boxed{\begin{aligned} m^1 &: {O_k}^3 \to O_k \\ m^2 &: {O_k}^3 \to O_k \\ m^3 &: {O_k}^3 \to O_k \end{aligned}}$$

Αν επεκτείναμε το παράδειγμα μας και δεχόμασταν ως εισροές περισσότερα στοιχεία, όπως για παράδειγμα άλλους παραγωγικούς συντελεστές κτλ, τότε ο χώρος $O_κ$ θα ήταν διάστασης ίσης με τον αριθμό των παραμέτρων του συστήματος.

Οπότε στο παράδειγμα των τριών διαστάσεων, το σύστημα συντεταγμένων είναι το

$a(a^1, a^2, a^3)$, με τις (a^1, a^2, a^3) να αναπαριστούν αντίστοιχα τους παράγοντες (γη, εργασία, κεφάλαιο).

Έτσι η εξίσωση του εξαγόμενου προϊόντος μετασχηματίζεται σε

$$\boxed{X = X(a^1, a^2, a^3) = AL^a(a^1, a^2, a^3)N^\beta(a^1, a^2, a^3)K^\gamma(a^1, a^2, a^3)}$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω οι παράγοντες L, N, K αποτελούν ανταλλοίωτους τανυστές.

Όπως έχει γίνει κατανοητό ο οικονομικός χώρος δεν συμπίπτει με τον φυσικό πραγματικό χώρο τριών διαστάσεων. Αλλά όμως μπορεί να συσχετιστεί με έναν κατάλληλο μετασχηματισμό συντεταγμένων της μορφής

$$\boxed{a^i = a^i(x^1, x^2, x^3)}$$

Έτσι οι ανταλλοίωτοι τανυστές της εργασίας του κεφαλαίου και της γης παίρνουν την ακόλουθη μορφή:

$$\boxed{\begin{aligned} L^i(x) &= \frac{\partial x^i}{\partial a^k} L^k(a) \\ N^i(x) &= \frac{\partial x^i}{\partial a^k} N^k(a) \\ K^i(x) &= \frac{\partial x^i}{\partial a^k} K^k(a) \end{aligned}}, \text{ (i, k=1,2,3)}$$

Με αυτόν τον τρόπο έχομε συσχετίσει τον οικονομικό κόσμο με την πραγματικότητα. Έτσι αντιλαμβανόμαστε ότι οι εξισώσεις μας δεν διατηρούν μια αναλλοίωτη μορφή σε οποιουσδήποτε μετασχηματισμούς. Δηλαδή η εξίσωση του εξαγόμενου προϊόντος δεν είναι αναλλοίωτη κάτω από οποιαδήποτε κατάσταση μεταβολής, αλλά εξαρτάτε από τον χώρο που κάθε φορά μελετάτε το φαινόμενο. Οπότε η τελική εξίσωση του εξαγόμενου προϊόντος παίρνει την μορφή:

$$\boxed{X^i = A \frac{\partial x^i}{\partial a^k} L^k \frac{\partial x^i}{\partial a^k} N^k \frac{\partial x^i}{\partial a^k} K^k}, \text{ (i,k=1,2,3)}$$

Η παραπάνω μορφή είναι αναλλοίωτη και για τα δύο συστήματα αναφοράς. Άρα η παραπάνω εξίσωση μπορούμε να πούμε ότι εκφράζει το γενικό εξαγόμενο προϊόν σε διαστάσεις πραγματικής αγοράς και όχι μόνο οικονομικής.

Συνεχίζοντας πάνω στο παράδειγμα μας, το μέτρο των ανταλλοίωτων τανυστών εργασίας, κεφαλαίου και γης δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις.

$$L = \sqrt{g_{mn} L^m L^n}$$
$$N = \sqrt{g_{mn} N^m N^n}$$
$$K = \sqrt{g_{mn} K^m K^n}$$

Άρα πλέων η τιμή της παραμέτρου εργασία, θα δίνεται μέσω της παραπάνω σχέσεις μέσω του μέτρου του τανυστή εργασία κοκ.
Επίσης αν επιλέξουμε μια καμπύλη διαδρομή μέσα σε ένα υποσύνολο της ΚΕΚ πολλαπλότητας, μπορούμε να μετρήσουμε πως μεταβάλλεται ο τανυστής *εργασία* πάνω σε αυτήν μέσω της σχέσης

$$Q = \int_k^l \sqrt{g_{kl} \dot{a}^k \dot{a}^l}\, dt$$, όπου $\dot{a}^k = \frac{da^k}{dt}$, με t να συμβολίζεται η παράμετρος της καμπύλης.

Η παραπάνω σχέση μας δίνει το μήκος της καμπύλης εντός της ΚΕΚ πολλαπλότητας από το σημείο κ στο σημείο l αυτής. Για να είναι σωστά ορισμένη η παραπάνω σχέση έχουμε υποθέσει τον εφοδιασμό σε κάθε σημείο της εν λόγω πολλαπλότητας μίας μετρικής g (0,2).

Σύμφωνα με τα παραπάνω ήμαστε σε θέση να προχωρήσουμε σε μεγαλύτερου βαθμού πολυπλοκότητας ανάλυση μιας και με τους παραπάνω ορισμούς, οι οποίοι αποτελούν τη βάση για μία οποιαδήποτε εφαρμογή, μπορούν να προκύψουν νέοι γεωμετρικοί σχηματισμοί ανάλογα με την εκάστοτε εφαρμογή. Όπως ορισμοί γωνιών και διαφορικών, ορισμοί κατεύθυνσης τανυστή καθώς επίσης και Riemann γεωμετρίες. Έτσι για παράδειγμα, μπορούμε να εφοδιάσουμε τον οικονομικό χώρο με μία Ρειμάννια δομή ώστε αργότερα, τις όποιες μεταβολές, να τις ορίσουμε πάνω σε αυτή. Αλλά λόγω της πολυπλοκότητας της παραπάνω προσπάθειας ιδιαίτερα όσων αφορά την γεωγραφική ερμηνεία, αποφεύγεται αυτή και εφαρμόζεται μόνο σε ειδικευμένες εφαρμογές που περιέχουν τον παράγοντα του καμπύλου φυσικού χώρου. Με έναν κατάλληλο μετασχηματισμό συντεταγμένων μπορούμε να πάρουμε μία

σχέση του καμπύλου χώρου και του οικονομικού χώρου και να θεωρήσουμε ότι όντως με την παρουσία μια οικονομικής μάζας, που δεν είναι τίποτα άλλο παρά μια οικονομική συσσώρευση, ο οικονομικός χώρος καμπυλώνεται και ισχύουν οι ανάλογοι μετασχηματισμοί πάνω στις εξισώσεις μας. Αυτό μπορεί να αναλυθεί σαφώς σε μεγαλύτερη κλίμακα αλλά βασισμένο πάνω σε μία αυστηρά ορισμένη εφαρμογή και όχι αυθαίρετα, αν επιθυμούμε οι σχέσεις που θα προκύψουν από την παραπάνω ανάλυση να είναι αντικειμενικά ορθές.

5.5 ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΕΡΕΥΝΑ

Το επόμενο βήμα για τη συνέχιση αυτού του κεφαλαίου είναι η ερμηνεία φαινόμενων οικονομικής γεωγραφίας μέσα σε πλαίσια διαστάσεων φράκταλ[17]. Επομένως θα πλησιάσουμε περισσότερο στην πραγματική ερμηνεία και εφαρμογή των θεωριών μας, μιας και γνωρίζουμε ότι η αντικειμενική πραγματικότητα προσεγγίζεται σε μεγάλο ποσοστό από κυβικές διαστάσεις και σύνολα φράκταλ.

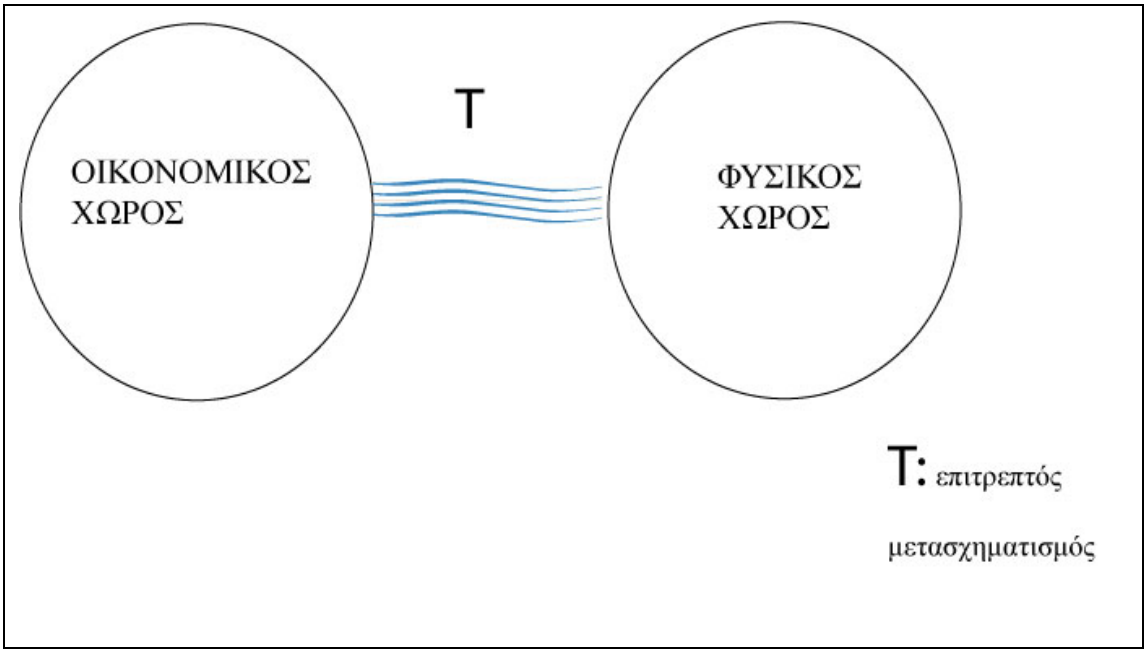
[17] Ο όρος φράκταλ (fractal) έχει αποδοθεί μερικές φορές στα ελληνικά με τις λέξεις *κλασματικός*, *θραυσματικός*, κλπ (Γκέκας, 1995). Εδώ αφήνουμε τον όρο αμετάφραστο όπως κάνουν πολλοί συγγραφείς.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Ο ρόλος της γενικής ισορροπίας στα οικονομικά του χώρου, όπως είδαμε στα πρώτα κεφάλαια, είναι μείζωνος σημασίας. Χωρίς την ύπαρξη αυτής δεν μπορούν να μελετηθούν οι όποιες αλληλεπιδράσεις πάνω στον οικονομικό χώρο. Έτσι μπορεί να υποτεθεί ότι τα πάντα κινούνται (οικονομικά) εντός των πλαισίων της μεγιστοποίησης των κερδών των επιχειρήσεων και παράλληλα στη μεγιστοποίηση της καμπύλης χρησιμότητας των νοικοκυριών. Με βάση αυτόν τον ισχυρισμό έχουν αναπτυχθεί οικονομικά μοντέλα που στόχο έχουν να αποδώσουν με αιτιοκρατικές μεθόδους τον τρόπο λειτουργίας της αγορά και της οργάνωσης του οικονομικού χώρου.

Ένα άλλο στοιχείο είναι ότι οι πολιτικές δημόσιας διαχείρισης, όπως πχ. οι δημόσιες υποδομές, που προκύπτουν από το βασικό μοντέλο της ΝΟΓ, μπορεί να μην έχουν τα αποτελέσματα που «διαισθητικά» κάποιος μπορεί να περιμένει, όπως για παράδειγμα το συμπέρασμα του υποδείγματος αυτού που λέει ότι καλύτερες υποδομές, που μειώνουν το μεταφορικό κόστος μεταξύ περιφερειών, θα μπορούσαν, κάτω από κάποιες προϋποθέσεις, να οδηγήσουν την οικονομία σε μια κατάσταση ισορροπίας με χαμηλή ανάπτυξη, υψηλό βαθμό συγκέντρωσης δραστηριοτήτων στον χώρο και μεγάλες εισοδηματικές ανισότητες.

Αναφερόμενοι στο τελευταίο κεφάλαιο, το βασικό συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι δεν υπάρχει ταύτιση, κατ' ανάγκη, ανάμεσα στον φυσικό και οικονομικό χώρο. Έτσι κάθε φορά θα μπορούσε να γίνεται σαφής διαχωρισμός αυτών των δύο και θα δηλώνεται με σαφήνεια σε ποιο χώρο εξετάζεται και αναλύεται η εκάστοτε εφαρμογή. Οπότε αν θελήσουμε να συνδέσουμε τους δύο χώρους, αυτό επιτυγχάνεται με έναν επιτρεπτό μετασχηματισμό συντεταγμένων, όπου οι συντεταγμένες του φυσικού χώρου είναι οι χωρικές συντεταγμένες ενώ οι διαστάσεις του οικονομικού χώρου μπορεί να είναι παράγοντες όπως η εργασία, το κεφάλαιο, η γη, κλπ.



Οπότε οι βασικές εξισώσεις της νέας οικονομικής γεωγραφίας δεν διατηρούν πάντα την ίδια αναλλοίωτη μορφή τους αλλά μετασχηματίζονται ανάλογα με τον επιτρεπτό μετασχηματισμό συντεταγμένων που εφαρμόζουμε κάθε φορά και με το σε ποιο χώρο το φαινόμενο που περιγράφεται από τις εν λόγω εξισώσεις μελετάται. Έτσι η εξίσωση του κέρδους δεν θα έχει την ίδια μορφή παντού και πάντα αλλά θα μετασχηματίζεται ανάλογα με το σε ποια περιοχή του φυσικού χώρου εφαρμόζεται και ανάλογα με το σύστημα συντεταγμένων του οικονομικού χώρου. Άρα δεν θα έχομε την ίδια μορφή εξίσωσης κέρδους στην περιοχή της Πάτρας και στην περιοχή του Λονδίνου. Δηλαδή δεν θα εφαρμόσουμε την ίδια εξίσωση για την εύρεση τιμών της παραμέτρου, κέρδος, αλλά μια ανάλογα μετασχηματισμένη.

Ένα άλλο συμπέρασμα που προκύπτει από τα παραπάνω είναι ότι δεν πρέπει ο οικονομικός χώρος να θεωρείται πάντα επίπεδος. Αυτό εξαρτάται από το μέγεθος της οικονομικής μάζας (πχ. οικονομική συσσώρευση). Όσο μεγαλύτερη είναι η οικονομική μάζα τόσο μεγαλύτερη είναι η καμπυλότητα του οικονομικού χώρου.

Το παραπάνω συμπέρασμα εύκολα μπορεί να αποδειχτεί μέσα σε μία εφαρμογή αν εφοδιάσουμε τον οικονομικό χώρο με μία Ρειμάννια δομή και θεωρήσουμε τους όποιούς μετασχηματισμούς μας πάνω σε αυτή. Έτσι η εργασία, η γη και το κεφάλαιο δεν θα έχουν την ίδια γεωμετρική μορφή και συνεπώς οι εξισώσεις μας θα μετασχηματιστούν ανάλογα όπως και η ερμηνεία των

αποτελεσμάτων μας. Οπότε σαφέστατα μια επιχείρηση θα πρέπει να λάβει υπόψη της το μέγεθος της οικονομικής μάζας πρώτου ορίσει την εμβέλεια επιρροής που επιθυμεί να έχει και άρα τον τόπο εγκατάστασης της. Οπότε δεν είναι αρκετό να εκμεταλλευτεί μόνο τις οικονομίες συγκέντρωσης, αν αυτό είναι επιθυμητό, αλλά να εξετάσει το μέγεθος της οικονομικής μάζας και την ακτίνα επιρροής της ώστε να εγκατασταθεί εντός αυτής.

Εν κατακλείδι ο ορισμός των οικονομιών συγκέντρωσης δεν είναι αναλλοίωτος και μετασχηματίζεται εννοιολογικά ανάλογα με τους εκάστοτε μετασχηματισμούς. Έτσι οι οικονομίες συγκέντρωσης θα ορίζονται ανάλογα με την ακτίνα επιρροής της οικονομικής μάζας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ι. ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΗ

1. **Alperovich,G.(**1995**). "**A General Equilibrium Model of an Open System of Cities Approach", "*Urban Studies"*, vol.32, No.6, 1995 853-862.

2. **Anas,A.(**2004**). "**Vanishing cities: what does the new economic geography imply about the efficiency of urbanization?", "*Journal of Economic Geography"*, pp. 181-199.

3. **Balchin,P.N, Isaac,D and Chen,J**.(2000).*"URBAN ECONOMICS"*. Palgrave.

4. **Baldwin, E.R.(**2003**). "**ECONOMIC GEOGRAPHY AND PUBLIC POLICY", Princeton University Press

5. **Brakman,Garretsen,H and Van Marrewijk.C .(**2001**). "**An introduction to geographical economics", Cambridge University Press.

6. **Branman,S and Garretsen, H.(**2003**). "**Rethinking the 'New' Geographical Economics", "*Regional Studies"*, vol.37.6&7, pp. 637-648.

7. **Cheshire,P and Mills,E.S.**(1999).*"HANDBOOK OF REGIONAL AND URBAN ECONOMICS "*.Elsevier Science B.V.

8. **Eisenhart,l.P.(**1997**). "**Riemannian Geometry". Princeton University Press.

9. **Fujita,M and Thisse,J-F**.(2002).*"ECONOMICS OF AGGLOMERATION"*. Cambridge University Press.

10. Fujita,**M, Krugman,P and Mori,T.**(1999)."On the Evolution of Hierarchical Urban Systems", *"European Economic Review"*, 43(2), 209-253.

11. **Fujita,M, Krugman,P and Venables,A.J.**(1999).*"The Spatial Economy: Cities, Regions and International Trade"*. MIT Press, Cambridge, Mass.

12. **Fulita,M.**(1989).*"Urban Economic Theory"*. Cambridge University Press.

13. **Holmes,J.T and Stevens,J.J.(**2004**)."**Geographic concentration and establishment size", " *Journal of Economic Geography "*, pp. 227-250.

14. **Hoover,E.M.**(1948)."*The Location of Economic Activity"*. New York:McGraw-Hills.

15. **Huriot,**J-M **and Thisse,J-F.**(2000).*"ECONOMICS OF CITIES"*. Cambridge University Press.

16. **Krugman,P.**(1991).*"Geography and Trade"*. MIT Press.

17. **Lucas,R.E.(**1998)."On the Mechanics of economic development", "*Journal of Monetary Economics",* 22:3-22.

18. **Ohsawa,Y and Koshizuka,T.(**2003**). "**Two-dimensional fiscal competition", "*Journal of Economic Geography"*, pp. 275-287.

19. **Robert-Nicoud,F.(**2004**). "**The structure of simple 'New Economic Geography' models (or, On identical twins)", "*Journal of Economic Geography"*, pp. 1-34.

20. **Samuelson,P.A.**(1952)."The transfer problem and transport costs: The terms of trade when impediments are absent.", "*Economic Journal",* 62:278-304.

21. **Starr,R.M.**(1977)."*General Equilibrium Theory: An Introduction"*. New York: Cambridge University Press.

ΙΙ. ΕΛΛΗΝΙΚΗ

1. **Γκέκας Βασίλης.**(1995)."*Κοσμική Τάξη και Χάος*". Εκδόσεις Στάχυ, Αθήνα..

2. **Καραμπατζός, Γ.Ι**.(2004). "*ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ*". Εκδόσεις Χαροκοπείου Πανεπιστημίου.

3. **Παναγιωτουνάκος, Δ.Ε.**(1998). "*ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΚΑΙ ΤΑΝΥΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ*". ΓΡ. ΦΟΥΝΤΑΣ.

4. **Πνευματικός, Σ.(**2002**).**"*ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ*". Εκδόσεις Γ.Α.Πνευματικού.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΒΟΗΘΗΜΑ

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Σύνολα

Θα συμβολίζουμε το σύνολο με κεφαλαίο γράμμα και το στοιχείο του με μικρό. Αν α είναι στοιχείο του συνόλου Α θα γράφουμε $a \in A$ και αν όχι θα γράφουμε $a \notin A$.

Ένα σύνολο Β καλείται υποσύνολο του συνόλου Α αν και μόνο αν κάθε στοιχείο του Β είναι και στοιχείο του Α. Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$ τότε τα δύο σύνολα είναι ίσα. Στα σύνολα ισχύουν κάποιες θεμελιώδεις πράξεις. Η τομή και η ένωση.

Καλούμε ένωση δύο συνόλων Α, Β το σύνολο $A \cup B = \{x / x \in A ή \chi \in B\}$ καθώς επίσης, καλούμε τομή δύο συνόλων το σύνολο $A \cap B = \{x / x \in A \,\&\, x \in B\}$. Οι παραπάνω σχέσεις μπορούν να επεκταθούν σε οποιαδήποτε πλήθος συνόλων.

Καρτεσιανό γινόμενο συνόλων

Δοθέντων δύο συνόλων Α, Β θα καλούμε καρτεσιανό γινόμενο αυτών το σύνολο ΑxΒ με στοιχεία διατεταγμένα ζεύγη (α,β) έτσι ώστε να ισχύει,

ΑxΒ = {χ/χ = (α,β) για κάποιο $a \in A \,\&\, \beta \in$ Β }.

Είναι φανερό από την ισότητα (α,β) = (α΄,β΄) προκύπτει α =α΄ και β = β΄.

Σχέσεις

Ας υποθέσουμε πως έχουμε δύο σύνολα Α,Β. Σχέση από το Α στο Β καλείται ένα υποσύνολο Γ του καρτεσιανού γινομένου ΑxΒ ($\Gamma \subseteq A \times B$).

Απεικονίσεις – Συναρτήσεις

Μια απεικόνιση *f* από το σύνολο Α στο σύνολο Β, είναι μια σχέση από το Α στο Β με τις παρακάτω ιδιότητες:

- $Για\ κάθε\ a \in A\ υπάρχει\ \beta \in B\ ώστε\ (\alpha, \beta) \in f$
- $Αν\ (\alpha, \beta 1) \in f\ \&\ (\alpha, \beta 2) \in f \Rightarrow \beta 1 = \beta 2$

Συμβολίζουμε $f : A \to B$ έτσι ώστε $f(\alpha) = \beta$ αν $(\alpha, \beta) \in f$.

Μια εσωτερική πράξη επί του συνόλου *f* είναι μία απεικόνιση $d : G \times f \to f$

Ομάδα

Ομάδα καλείται ένα ζεύγος (G, *) αποτελούμενο από ένα μη κενό σύνολο G και μία εσωτερική πράξη (*) στο G.

Δακτύλιος

Δακτύλιος είναι μια τριάδα (R, +, *) αποτελούμενη από ένα μη κενό σύνολο R και δύο εσωτερικές πράξεις, τον πολλαπλασιασμό και την πρόσθεση ώστε να ισχύει:

- Το ζεύγος (R, +) είναι αβελιανή ομάδα
- Η πράξη (*) είναι προσεταιριστική
- Η πράξη (*) είναι επιμεριστική ως προς την πράξη (+).

Σώμα

Το (σώμα) ορίζεται από μια τριάδα (D, +,*) αποτελούμενη από ένα μη κενό σύνολο D και από τις πράξεις του πολλαπλασιασμού και της πρόσθεσης, ώστε να ισχύουν τα παρακάτω:

- Η τριάδα (D,+,*) να είναι 1-δακτύλιος μεταθετικός.
- Το σύνολο (D-{0},*) να είναι αβελιανή ομάδα

Διανυσματικός χώρος

Ο διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα F ορίζεται από ένα ζεύγος (F, X) αποτελούμενο από ένα σώμα F και ένα μη κενό σύνολο X ώστε να ισχύει:

- Το σύνολο X να έχει μια εσωτερική πράξη, την πρόσθεση για την οποία να ισχύουν

  x1+(x2+x3) = (x1+x2)+x3 $\forall x1, x2, x3 \in X$

  x1+x2 = x2+x1 $\forall x1, x2 \in X$

  υπάρχει $0 \in X$: x1+0 = x1 $\forall x1 \in X$

  για κάθε $x \in X$ υπάρχει $(-x) \in$ X έτσι ώστε x+(-x) = 0.

- Το σύνολο X έχει μια εσωτερική πράξη, τον πολλαπλασιασμό, όπου ισχύει:

  k(x1+x2) = kx1+kx2 $\forall x1, x2 \in X; k \in F$

  (k1k2)x = k1(k2x) $\forall x \in X; k1, k2 \in F$

  (k1+k2)x = k1x+k2x $\forall x \in X; k1, k2 \in F$

  1x = x $\forall x \in X; 1 \in F$

Βάση διανυσματικού χώρου

Βάση διανυσματικού χώρου X ορίζουμε ένα σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων του X που παράγουν τον X.

Έτσι κάθε στοιχείο $x \in X$ γράφεται, $x = k_i x_i$.

Διάσταση διανυσματικού χώρου

Διάσταση διανυσματικού χώρου X καλείται το πλήθος των στοιχείων μιας βάσης του. Συμβολίζουμε αυτή ώς dimX.

ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Διαφορικός – ολοκληρωτικός λογισμός στον ευκλείδειο τριμετρικό χώρο

Γενικά οι όποιοι ορισμοί θα ακολουθήσουν θα αναφέρονται στον ευκλείδειο τριμετρικό χώρο. Η «βάση» του χώρου αυτού είναι ορθοκανονική και αποτελείται από τρία μοναδιαία διανύσματα (ι_1,ι_2,ι_3). Κάθε στοιχείο του χώρου ταυτίζεται με ένα διάνυσμα, x, με συντεταγμένες x_j.

Αλλαγή βάσης

Πολύ σημαντική ενότητα είναι αυτή της αλλαγή βάσης ενός συστήματος συντεταγμένων. Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να πετύχουμε διάφορους μετασχηματισμούς σε ότι αφορά τα στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου.

Ας είναι $\{ i_j\}$, $\{i_k\}$ (j,k = 1,2,3) δύο διατεταγμένες ορθοκανονικές βάσεις του R^3. Η μαθηματική σχέση που εκφράζει την αλλαγή βάσης είναι η ακόλουθη:

$i_j = \lambda_{jk} i_k$ (j = 1,2,3 , k = δείκτης άθροισης, $\lambda_{jk} \in R$)

Διαφόριση (βαθμωτή μεταβλητή)

Ας υποθέσουμε πως έχουμε ένα διάνυσμα $x \in R^3$. Εκφράζουμε το διάνυσμα αυτό εν συναρτήσει μιας μεταβλητής u, που είναι βαθμό μέγεθος και ισχύει $u \in R\,(x = x(u))$.

Η τιμή $\frac{dx}{du}$ καλείται παράγωγος της διανυσματικής συνάρτησης x(u) ως προς u.

Επίσης ισχύουν οι ακόλουθες ισότητες:

$$\frac{d(x1 + x2)}{du} = \frac{dx1}{du} + \frac{dx2}{du}$$
$$\frac{d(yx)}{du} = y\frac{dx}{du} + \frac{dy}{dx}x$$
$$\frac{d(x1 \times x2)}{du} = x1 \times \frac{dx2}{du} + x2\frac{dx1}{du}$$

Μερική διαφορική

Ας υποθέσουμε πως έχουμε τη βαθμωτή συνάρτηση $f = f(x) = f(x1, x2, x3)$, με x, να αποτελεί διάνυσμα θέσης του σημείου X ως προς σταθερή βάση συντεταγμένων του R^3.

Ο γενικός κανόνας που μας δίνει το ολικό διαφορικό της συνάρτησης f είναι:

$$\boxed{df = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j},$$

Αν η μεταβλητή x είναι με τη σειρά της και αυτή συνάρτηση μιας άλλης μεταβλητής λ, τότε η ολική παράγωγος της f ως προς λ δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{\frac{df}{d\lambda} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{dx_j}{d\lambda}}$$

Καλούμε *τελεστή αναδεκτά* το διάνυσμα,

$\nabla = (\partial / \partial x1, \partial / \partial x2, \partial / \partial x3)$.

Εφαρμόζοντας τον παραπάνω τελεστή στο βαθμό πεδίο f γράφουμε, $\nabla f = (\partial f / \partial x1, \partial f / \partial x2, \partial f / \partial x3)$, το διάνυσμα ∇f καλείται κλίση της f και ένας άλλος συμβολισμός είναι, grad*f*.

Οπότε η ολική παράγωγος της συνάρτησης *f* γράφεται,

$$\boxed{\frac{df}{d\lambda} = \nabla f * \frac{dx}{d\lambda}}$$

Ολοκλήρωση

Θεωρούμε διανυσματική συνάρτηση u(x) στον R^3. Το ολοκλήρωμα της αυτής διανυσματικής συνάρτησης (u(x)) ως προς x, δίνετε απο τη σχέση,

$\boxed{\int u(x)dx = i_j \int u_j(x)dx + c}$ j: δείκτης άθροισης= 1,2,3; i :

Ανάλογα με τη μορφή της διανυσματικής συνάρτησης έχουμε και ορισμένης μορφής ολοκληρώματα και σχέσεις που εκφράζουν αυτά. Όπου χρειαστεί, εντός του κυρίου μέρους της εργασίας, θα γίνεται εκτενέστερη αναφορά στις εν λόγω μορφές ολοκλήρωσης συνάρτησης.

ΤΟΠΟΛΟΓΊΑ

Η Τοπολογία, ουσιαστικά, είναι το επαγόμενο μιας σειράς ιδεών που αναπτύχθηκαν κατά την αρχαιότητα με βάση ορισμένους προβληματισμούς πάνω στις έννοιες του ορίου και της συνέχειας. Το συγκεκριμένο κεφάλαιο των μαθηματικών έχει σημαντικές προεκτάσεις, συν τις άλλης, τόσο στη Νέα Οικονομική Γεωγραφία (ΝΟΓ) όσο και στον τομέα της ανάπτυξης και της αστικής γεωγραφίας. Οι τοπολογικές δομές, που είναι η βάση της τοπολογίας, αποτελούν το ακριβές «μαθηματικό εργαλείο» όπου στηριζόμαστε για να ορίσουμε τις έννοιες του ορίου και της συνέχειας. Παρακάτω θα αναπτύξουμε τα βασικά στοιχεία της τοπολογίας και

όπου χρειαστεί θα γίνεται μια πιο εκτενή επέκταση στις έννοιες αυτές, εντός του κυρίου μέρους της εργασίας, στα πλαίσια εφαρμογών (για μία ποιο λεπτομερή ανάλυση των όρων και στοιχείων της τοπολογίας καθώς και για όποιες εφαρμογές πάνω σε αυτά, βλέπε *ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ-ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ, Σπύρου Ν. Πνευματικού*).

τοπολογικές δομές

Σε ένα σύνολο Α, ορίζουμε *τοπολογική δομή* όταν σε κάθε $a \in A$ οριστεί μια οικογένεια Β(χ) υποσυνόλων του, τα μέλη της οποίας ονομάζουμε *περιοχές* του α, που να ικανοποιεί τα παρακάτω αξιώματα:

- το στοιχείο α, ανήκει σε όλα τα μέλη της οικογένειας Β(χ).
- κάθε υποσύνολο του Α που εγκλείει μέλος της Β(χ) ανήκει επίσης στην Β(χ).
- από την τομή οποιουδήποτε πεπερασμένου πλήθους μελών της Β(χ) προκύπτει μέλος της Β(χ).
- αν $B \in B(\chi)$, υπάρχει $B' \in B(\chi)$ του οποίου κάθε στοιχείο δέχεται ως περιοχή το Β.

Κάθε σύνολο Α εφοδιασμένο με μία τοπολογική δομή, λέγεται *τοπολογικός χώρος* και τα στοιχεία αυτού *σημεία.*

Με βάση τα παραπάνω ορίζονται συγκεκριμένες τοπολογίες όπως, *ΤΟΠΟΛΟΓΙΕΣ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ, ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ, ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΥ ΧΩΡΟΥ, ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗΣ ΜΕΤΡΙΚΗΣ, ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΜΕΤΡΙΚΗΣ ΜΙΝΚΟWSKI* κ.α

Παρακάτω θα αναλύσουμε ορισμένες από αυτές τις τοπολογίες που κρίνονται σημαντικές για την μαθηματική και τοπολογική ανάπτυξη του κυρίου μέρους της εργασίας.

Τοπολογία πραγματικής ευθείας

Με τον όρο πραγματική ευθεία εννοούμε το σύνολο R των πραγματικών αριθμών με τις συνήθεις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και ως προς αυτές συμβατή σχέση διάταξης, που του προσδίδει διαστάσεις διατεταγμένου σώματος. Συνυπολογιζομένου τις έννοιας του ανοικτού διαστήματος, σχηματίζουμε τοπολογία στο R με τον ακόλουθο ορισμό:

«Περιοχή $x \in R$ είναι κάθε υποσύνολο του R στο οποίο εγκλείεται ανοιχτό διάστημα κεντροθετημένο στο x.»

Τοπολογία του ευκλειδείο χώρου R^N

Η βάση αυτής τοπολογίας είναι η ευκλείδεια μετρική, με την οποία προσμετράτε η απόσταση δύο σημείων στο χώρο R^N.

Έτσι αν έχουμε δύο σημεία $x, y \in R^N$, η ευκλείδεια μετρική ορίζεται ως εξής:

$$d(x,y) = \sqrt{(x1 - y1)^2 + ... + (xn - yn)^2}$$

Η τοπολογία που σχηματίζεται βασίζεται στην έννοια του σφαιρώματος που ορίζεται μαθηματικά ως,

$$S_{(x',\rho)} = \{x \in R^N / d(x,x'), \rho\}$$

με ($x' \in R^N$) να είναι το κέντρο της σφαίρας και (ρ<0) να αναπαριστά την ακτίνα.

Έτσι έχουμε τον παρακάτω ορισμό για την τοπολογία του R^N:

«Περιοχή $x \in R^N$ είναι κάθε υποσύνολο του R^N στο οποίο εγκλείεται σφαίρωμα κεντροθετημένο στο x.»

Τοπολογία μετρικών χώρων

Ο αυστηρός μαθηματικός ορισμός της έννοιας της μετρικής σε ένα σύνολο Α είναι:

$$D : A \times A \longrightarrow R^+$$

Η μετρική αυτή ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

- $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \forall x, y \in A$ (συνθήκη διαχωρισμού)
- $d(x,y) = d(y,x) \forall x, y \in A$ (συνθήκη συμμετρίας)
- $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y) \forall x, y, z \in A$ (συνθήκη τριγωνικής ανισότητας)

Το σύνολο Α αν εφοδιαστεί με μια μετρική, όπως έχει οριστεί παραπάνω, τότε αυτό ονομάζεται *μετρικός χώρος*. Σε κάθε μετρικό χώρο ορίζεται μια τοπολογία, η οποία βασίζεται στην έννοια του σφαιρώματος, $S_{(x',\rho)} = \{x \in A / d(x,x') < \rho\}$, με κέντρο (χ΄) και ακτίνα (ρ).

Έτσι έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

«Περιοχή $x \in A$ είναι κάθε υποσύνολο του Α στο οποίο εγκλείεται σφαίρωμα κεντροθετημένο στο x.»

Ένα άλλο σημαντικό στοιχείο στις έννοιες της τοπολογίας, είναι ο ορισμός εσωτερικών, εξωτερικών και συνοριακών σημείων ενός συνόλου.

<u>*Εσωτερικό σημείο*</u> σε ένα σύνολο Α, είναι αυτό που διαθέτη περιοχή εγκλεισμένη στο Α. Τ σύνολο τέτοιων σημείων καλείτε *εσωτερικό του Α* και συμβολίζεται ως $\overset{0}{A}$.

<u>*Εξωτερικό σημείο*</u> του Α είναι αυτό που διαθέτει περιοχή εγκλεισμένη στο συμπλήρωμα. Το σύνολο αυτών των σημείων καλείται *εξωτερικό* του Α.

<u>*Συνοριακό σημείο*</u> του Α είναι εκείνο το σημείο που δεν ανήκει ούτε στο εσωτερικό ούτε στο εξωτερικό του Α. το σύνολο τέτοιων σημείων καλείτε *σύνορο* του Α και συμβολίζεται ως ∂A.

Επίσης σημαντικές έννοιες είναι και αυτές των ανοιχτών και κλειστών συνόλων.

Έτσι ένα υποσύνολο Γ του συνόλου Α, θα καλείται *ανοιχτό* όταν όλα τα σημεία του είναι *εσωτερικά σημεία* ($\Gamma = \overset{0}{\Gamma}$).

Κάθε υποσύνολο ενός τοπολογικού χώρου Α, του οποίου το συμπλήρωμα είναι *ανοιχτό* καλείτε *κλειστό* σύνολο της τοπολογίας του Ε.

Μια άλλη έννοια που πρέπει να δοθεί προτού προχωρήσουμε στις έννοιες του ορίου και της συνέχειας, είναι αυτό της *βάσης μιας τοπολογίας*.

Σε ένα τοπολογικό χώρο Α, ορίζουμε ***τοπική βάση*** *ενός σημείου* $x \in A$ κάθε οικογένεια Γ(x), για την οποία ισχύει $\Gamma(x) \subset B(x)$, έτσι ώστε,

$$\boxed{\forall B \in B(x); \exists\ K \in \Gamma(x) \text{ με } K \subseteq B}$$

Όρια

Ας υποθέσουμε πως έχουμε μια ακολουθία $(Y_n)_{n\in N}$ σημείων τοπολογικού χώρου Α. Τότε λέμε ότι η άνωθεν ακολουθία *συγκλίνει* και δέχεται ως *όριο* το σημείο $L \in A$, αν κάθε περιοχή του L εμπεριέχει όλους τους όρους της εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος αυτών.

Η παραπάνω πρόταση συμβολίζεται ως $\boxed{Lim Y_n = L}$

Έτσι όπως και στην έννοια της τοπολογίας, ορίζονται οι ακόλουθες *συγκλίσεις*:

Σύγκλιση πραγματικής ευθείας, Σύγκλιση ευκλείδειου χώρου, Σύγκλιση στο ευκλείδειο επίπεδο κ.α

Σημαντική ενότητα είναι αυτή της συνθήκης διαχωρισμού του Haysdorff, η οποία μας μεταβαίνει σε μια άλλη διάσταση της τοπολογικής ανάλυσης.

Σύμφωνα με αυτή, ένας τοπολογικός χώρος Α ικανοποιεί τη *συνθήκη διαχωρισμού,* όταν $\forall x, y \in A$ με x ≠ y $\exists Bx, By \Rightarrow Bx \cap By = \varnothing$. Τότε ο τοπολογικός χώρος Α καλείτε **χώρος Hausdorff**.

Στους τοπολογικούς αυτούς χώρους, οι συγκλίνουσες ακολουθίες έχουν μοναδικό όριο. Επίσης στους χώρους Hausdorff ισχύουν και κάποιες ιδιότητες

ανάλυσης, όπως ότι από το γινόμενο τοπολογικών χώρων προκύπτει χώρος Hausdorff αν οι εκάστοτε τοπολογικοί χώροι είναι χώροι Hausdorff.

Δεν θα επεκταθούμε παραπάνω σε έννοιες και ορισμούς ορίων, αλλά ότι χρειαστεί παρακάτω θα σχολιαστεί εντός πλαισίου του ορισμού της «*συνέχειας*».

Συνέχεια

Το κεφάλαιο της *συνέχειας*, θα μπορούσε να λεχθεί, είναι το απόγειο στη θεωρία της τοπολογίας. Αποτελεί τη πηγή χρόνιων προβληματισμών και στοχαστικών αναλύσεων στο χώρο των μαθηματικών.

Έτσι θα επεκταθούμε λίγο παραπάνω από τις ανάγκες της όλης εργασίας, για να δοθεί αφορμή για περαιτέρω ανάλυση και σκέψη.

Μία απεικόνιση τοπολογικών χώρων $G : A \longrightarrow A'$ καλείτε *συνεχείς* σε σημείο $g \in A$ αν για κάθε περιοχή B' του G(g) στο χώρο A', υπάρχει περιοχή B του g στο χώρο A ώστε:

$$\boxed{y \in B \Rightarrow G(y) \in B'}$$

Γενικά ισχύει ότι μια απεικόνιση $G : A \to A'$ είναι συνεχής αν ικανοποιεί μια από τις παρακάτω συνθήκες:

- η προεικόνα κάθε ανοιχτού συνόλου της τοπολογίας του A' είναι ανοιχτό σύνολο του A
- η προεικόνα κάθε κλειστού συνόλου του A' είναι σύνολο κλειστό του A.

Απεικόνιση (ανοιχτή-κλειστή)

«Μια απεικόνιση $G : A \to A'$ λέγεται ανοιχτή, αν η εικόνα κάθε ανοιχτού συνόλου του Α είναι ανοιχτό σύνολο του A'».

Αντίστοιχα ο ορισμός επεκτείνεται και στην έννοια της κλειστής απικόνησης.

Ας υποθέσουμε πως έχουμε δύο τοπολογικούς χώρους Α,Β. Και Α1,Β1 είναι ανοιχτά υποσύνολα του Α για τα οποία ισχύει $A1 \cup B1 = A$. Αν

$G1 : A1 \to B$
και
$G2 : B1 \to B$

είναι συνεχείς απεικονίσεις ώστε να ισχύει $A1(x) = B1(x)\ \forall x \in A1 \cap B1$,

τότε προκύπτει μια συνεχείς απεικόνιση $G : A \to B$ όπου ισχύει $G(x) = G1(x), \forall x \in A1$ και $G(x) = G2(x), \forall x \in B1$.